

Занятие 17. Применение эквивалентных бесконечно малых. Второй замечательный предел.

Сравнение бесконечно малых в точке $\alpha = 0$. Эквивалентные бесконечно малые:

$$\sin \alpha \sim \alpha; \quad \sin^2 \alpha \sim \alpha^2; \quad \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha; \quad 1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}; \quad \arcsin \alpha \sim \alpha; \quad \ln(1 + \alpha) \sim \alpha; \\ e^\alpha - 1 \sim \alpha; \quad a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a; \quad (1 + \alpha)^n - 1 \sim n\alpha; \quad \sqrt{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}.$$

Второй замечательный предел (неопределенность 1^∞). $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \text{ Если } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (u(x) - 1)v(x)}.$$

Задачи.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{\arcsin x}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x-x^2} - 1}{x}. \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2]{1+3x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x} - 1}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+4}\right)^x. \quad 8. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+3) - \ln x). \\ 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}. \quad 10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}. \quad 12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Дополнительные задачи.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3^{\sin x}}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^3}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + x)^{1/x}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2)(\ln(x-2) - \ln(x+2)). \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x-1}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1 - \sin x}^2}.$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.VI, пар.4,5.

Найти пределы.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx} - 1}{x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x+1} - 1}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\arcsin x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}. \\ 6. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2)). \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10+5x}{10+2x}\right)^{\frac{1}{2x}}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3x}{3x+2}\right)^{4x}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{3x^2+3}\right)^{3+3x^2}.$$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8+x}{10+x} \right)^{2x+1}.$