

Занятие 3. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный метод и правило Крамера.

Система линейных уравнений третьего порядка имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

1. **Правило Крамера:** если определитель матрицы системы не равен 0, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы системы; Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой k -го столбца столбцом свободных членов, $k = 1, 2, 3$.

2. **Матричный способ:** система линейных уравнений в матричной форме имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения определяется формулой $X = A^{-1}B$.

Задачи.

1. Решить каждую систему уравнений по правилу Крамера и матричным способом.

$$1). \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \quad 2). \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 3). \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

Дополнительные задачи.

1. Решить систему уравнений по правилу Крамера и матричным способом:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл. I, пар. 5.

1. Решить каждую систему уравнений по правилу Крамера и матричным способом.

$$1). \begin{cases} x + y + 3z = -5, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases} \quad 2). \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 3). \begin{cases} x + 2y - z = 6, \\ 3x - y + 3z = -7, \\ 2x + y - 2z = 9. \end{cases}$$

Занятие 4. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для краткости вместо системы рассматриваем **расширенную матрицу** ее коэффициентов, которую приводим к треугольному виду:

$$\bar{A} = \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right\rangle \hat{=}$$

с помощью следующих, *не меняющих решения*, преобразований:

1. В \bar{A} можно менять местами строки.
2. Можно в \bar{A} менять местами столбцы *слева от прямой черты*.
3. К одной строке \bar{A} можно прибавить другую, умноженную на некоторое число.

Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх, последовательно находя неизвестные.

Задачи.

1. Решить каждую систему методом Гаусса.

$$1). \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \quad 2). \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad 3). \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases} \quad 5). \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Дополнительные задачи.

1. Решить систему методом Гаусса.
2. Вычислить определитель.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 2 \\ 9 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти матрицу, обратную данной матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.1. Гл.IV, пар.6.

1. Решить каждую систему методом Гаусса.

$$1). \begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases} \quad 2). \begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - 2y + 2z = -5, \\ 7x + y + z = 10. \end{cases} \quad 3). \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -6, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_2 - 3x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4. \end{cases} \quad 5). \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2, \\ -2x_1 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$