

Занятие 10. Приложения определенного интеграла. Площади и длины кривых.

Площадь плоской фигуры, ограниченной:

а) кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$: $S = \int_a^b f(x)dx$;

б) кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, $x \in [a, b]$: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$;

в) линией, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt;$$

г) линией, заданной в полярной системе координат $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi.$$

Длина дуги кривой:

а) в прямоугольной системе координат $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

б) в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Задачи.

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных заданными линиями.

1). $y = 1 - x^2$, $y = x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 1$. 2). $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

3). $y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi / 2$).

4). $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (одна арка циклоиды).

5). $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (астроида). 6). $r = a(1 + \sin \varphi)$ (кардиоида).

7). $r = \frac{4}{\cos(\varphi - \pi / 6)}$ ($\pi / 6 \leq \varphi \leq \pi / 3$).

2. Найти длины дуг следующих кривых.

- 1). $y = x^{3/2}$ (от $x = 0$ до $x = 5$). 2). $y = x^2 - 1$ (дуга отсечена осью Ox).
- 3). $y = \ln \cos x$ (от $x = 0$ до $x = \pi / 6$).
- 4). $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (астроида).
- 5). $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ (одна арка циклоиды).

Дополнительные задачи.

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x - 1)^2$ и гиперболой $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1, гл. 10, § 1, § 4.

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных заданными линиями.

- 1). $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$. 2). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс).
- 3). $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (I четверть).
- 4). $x = 12 \cos t + 5 \sin t$, $y = 5 \cos t - 12 \sin t$.
- 5). $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$. 6). $r^2 = 2 \cos 2\varphi$, $r = 1$ ($r \geq 1$).
- 7). Окружность $r = \sqrt{3} \sin \varphi$, кардиоида $r = 1 - \cos \varphi$ (вне кардиоиды).

2. Найти длины дуг следующих кривых.

- 1). $y = \ln \sin x$ (от $x = \pi / 3$ до $x = \pi / 2$). 2). $y = x^2 / 2$ (от $x = 0$ до $x = 1$).
- 3). $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ (от $t = 0$ до $t = 3$).
- 4). $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ (между точками пересечения с осями координат).