

Занятие 17. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**. Алгоритм нахождения общего решения:

1. Производная представляется в виде отношения дифференциалов: $y' = \frac{dy}{dx} : \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. 2. Обе части уравнения умножаются на dx :

$dy = f(x)g(y)dx$. 3. Каждую функцию переносим к дифференциалу того же аргумента. Для этого

разделим уравнение на функцию $g(y)$, стоящую у дифференциала другого аргумента: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

4. Интегрируем последнее уравнение. Получаем общий интеграл (общее решение в неявной форме):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Задачи.

Найти решения уравнений с разделяющимися переменными и задач Коши для них.

1). $y - xy' = 1 + x^2 y'$. 2). $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$. 3). $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

4). $dy = (2y + 1)ctg x dx$, $y(\pi/4) = 1/2$. 5). $xy' = \frac{y}{\ln x}$, $y(e) = 1$. 6). $xyy' + (1 + \ln x)y^2 = 0$.

7). $x + xy + y'(y + xy) = 0$. 8). $y - xy' = b(1 + x^2 y')$, $y(1) = 1$. 9). $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos yy' = 0$.

10). $2x\sqrt{1 - y^2} = y'(1 + x^2)$.

Дополнительные задачи.

Найти решение уравнения $x^3 y' - \sin y = 1$, удовлетворяющее условию $y \rightarrow 5\pi$ при $x \rightarrow \infty$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.2, гл.4, пар.1, пп.1,2.

Найти решения уравнений с разделяющимися переменными и задач Коши для них.

1). $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$. 2). $3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0$. 3). $xydx + \sqrt{1 + x^2}dy = 0$, $y(0) = 1$.

4). $\sqrt{3 + y^2} - yy' = x^2 yy'$. 5). $y(1 + x^2)y' = 1 + y^2$, $y(\pi/4) = 0$. 5). $xyy' + \sqrt{1 + y^2} \ln x = 0$.

6). $ye^{2x}dx + (1 + e^{2x})dy = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$. 7). $y' \sin x = y \ln y$. 8). $y' \sin x = y \ln y$, $y(\pi/2) = 1$.

9). $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$. 10). $y + xy' = a(1 + xy)$, $y(1/a) = -a$.