

Занятие 18. Дифференциальные уравнения первого порядка. Однородное уравнение.

Однородное уравнение. Уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ называется *однородным*. Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ будет однородным, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - многочлены одного и того же порядка относительно x и y . Однородное уравнение подстановкой $z = \frac{y}{x}$, где $z = z(x)$ - новая функция, приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Тогда $y' = xz' + z$ или $dy = xdz + zdx$.

Задачи.

Найти решения однородных уравнений и задач Коши для них.

1). $y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$. 2). $(xy + y^2)dx = (2x^2 + xy)dy$, $y(1) = 1$. 3). $yy' = 2y - x$. 4). $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

5). $xy' = xe^{y/x} + y$, $y(1) = 0$. 6). $x^2 y' = y^2 + xy$. 7). $xy' + 2\sqrt{xy} = y$. 8). $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

9). $(xy' - y)\arctg \frac{y}{x} = x$, . 10). $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Дополнительные задачи.

Какова должна быть функция $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ в уравнении $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, чтобы общим решением данного

уравнения было $y = \frac{x}{\ln Cx}$?

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.2, гл.4, пар.1, пп.3.

Найти решения однородных уравнений и задач Коши для них.

1). $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$. 2). $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$. 3). $xy' = y + x \cos^2 \frac{y}{x}$. 4). $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

5). $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$. 6). $(x - y)dx + xdy = 0$. 7). $2x^2 y' = x^2 + y^2$.

8). $(\sqrt{xy} - x)y' + y = 0$, $y(1) = 1$. 9). $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$.

10). $xy' = y + x \tg \frac{y}{x}$.