

## Занятие 2. Частные производные высших порядков. Производная неявной функции. Экстремум функции двух переменных.

Функция двух переменных  $z = z(x, y)$  имеет  $2^n$  производных  $n$ -го порядка, функция трех переменных  $u = u(x, y, z)$  –  $3^n$ . Производная функции одного аргумента  $y = f(x)$ , заданной неявно в виде  $F(x, y) = 0$ :  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ . Частные производные функции двух аргументов  $z = f(x, y)$ ,

заданной неявно в виде  $F(x, y, z) = 0$ :  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$ .

**Дифференциалы функции нескольких переменных:**  $z = z(x, y)$ ;

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy; \quad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad u = u(x, y, z);$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

**Экстремум функции двух переменных**  $z = z(x, y)$ . Точки, подозрительные на экстремум (*стационарные*) находятся из системы уравнений:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . Пусть  $P(x_0, y_0)$  – стационарная точка функции

$z = z(x, y)$ . Обозначим  $A = z''_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = z''_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C = z''_{yy}(x_0, y_0)$  и  $D = AC - B^2$ . Тогда

а) при  $D > 0$  в т.  $P(x_0, y_0)$  – максимум, если  $A < 0$  ( $C < 0$ ), и минимум, если  $A > 0$  ( $C > 0$ );

б) при  $D < 0$  экстремума нет;

в) при  $D = 0$  необходимы дополнительные исследования.

### Задачи.

1. Найти производные второго порядка от заданных функций.

1).  $z = x^5 + y^5 - 5x^3 y^3$ . 2).  $z = x^3 y - y^2 x^2$ . 3).  $z = \ln(2x + y^2)$ .

4).  $z = xy + \frac{y}{x}$ .

2. Показать, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

1).  $z = x \sin(ax + by)$ . 2).  $z = \cos \frac{y}{x} \arccos \frac{x}{y}$ .

3. Найти производные неявных функций.

1).  $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$ . 2).  $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ .

3).  $x^{y/z} + y^{z/x} = 2$ .

4. Найти  $dz$  и  $d^2z$ .

1).  $z = (x^3 + y^3 - xy^2)^2$ . 2).  $z = y^3 \ln x$ .

5. Найти экстремумы функций.

1).  $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ . 2).  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ .

**Дополнительные задачи.**

Дана функция  $u = \arctg(2x - t)$ . Доказать, что  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ .

**Задачи для самостоятельной работы.** Данко, ч. 1, гл. 8, § 2, пп. 2, 3, 6; § 4, п. 1.

1. Найти производные второго порядка от заданных функций.

Убедиться, что  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

1).  $z = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4$ . 2).  $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . 3).  $z = xe^{-xy}$ . 4).  $z = \frac{\cos y^2}{x}$ .

5).  $z = x^3 \sin y + y^3 \sin x$ .

2. Найти производные неявных функций.

1).  $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$ . 2).  $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ .

3. Найти  $dz$  и  $d^2z$ . 1).  $z = e^{2x-2y}$ . 2).  $z = \sin^2(2x + 3y)$ .

4. Найти экстремумы функций.

1).  $z = (x-1)^2 + 2y^2$ . 2).  $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$  ( $x > 0, y > 0$ ).