

Занятие 24. Метод Лагранжа для линейных уравнений второго порядка.

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Пусть дано неоднородное уравнение второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$. Для соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ найдем общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, где C_1 и C_2 - неизвестные функции от x . Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

Задачи.

Найти общие решения линейных неоднородных уравнений.

1). $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$. 2). $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}$. Найти решение задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 1$,

$y'(0) = 2$. 3). $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}$. 4). $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. 5). $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

6). $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$. 7). $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$.

Дополнительные задачи.

При каких q уравнение $y'' + qy = 0$ имеет решения, стремящиеся к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч.2, гл.4, пар.3, п.4.

Найти общие решения линейных неоднородных уравнений.

1). $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. 2). $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{1 + x^2}}$. 3). $y'' + y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. 4). $y'' + y = \frac{16}{\sin 4x}$.

5). $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x} \ln x}{x}$. 6). $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$. 7). $y'' + y = \operatorname{tg} x$.