

Занятие 3. Непосредственное интегрирование.

Свойства интегралов.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$ 2. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$ 4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$

Таблица интегралов.

1. $\int 0dx = C.$ 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \int dx = x + C; \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$
 $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C; \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$ 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \int e^x dx = e^x + C.$ 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$ 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C.$ 12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$
15. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln|a^2 \pm x^2| + C.$ 16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$
17. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$ 18. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$ 20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$
21. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$
22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Задачи.

Вычислить неопределенные интегралы.

- 1). $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$. 2). $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$. 3). $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2} dx$.
4). $\int 2^x \left(5^x + \frac{1}{3^x} \right) dx$. 5). $\int \frac{dx}{x^2 - 10}$. 6). $\int \frac{dx}{3 + 2x^2}$. 7). $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$.
8). $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x^2}}$. 9). $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$. 10). $\int \frac{x^2}{1 - x^2} dx$. 11). $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.
12). $\int t g^2 x dx$. 13). $\int \frac{3 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$. 14). $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$. 15). $\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$.

Дополнительные задачи.

1. Найти неопределенные интегралы.

- 1). $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$. 2). $\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx$.

2. Найти первообразную для функции $f(x) = \sin x$, которая в точке $x = \pi / 2$ принимает значение, равное 10.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1, гл. 9, § 1, п. 1.

- 1). $\int \left(x + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} \right) dx$. 2). $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) dx$. 3). $\int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{x} dx$.
4). $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{6^x} dx$. 5). $\int \frac{dx}{4x^2 + 5}$. 7). $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 12}}$. 8). $\int \frac{x^2 + 2}{4 - x^2} dx$.
9). $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. 10). $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x} dx$. 11). $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$.