

Занятие 4. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование иррациональностей.

Формула замены переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки):

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

После вычисления интеграла необходимо вернуться к старой переменной x .

При интегрировании выражений, содержащих корни, необходимо сделать такую подстановку, чтобы корни извлекались.

Пример. В сумме $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ подстановка $x = t^6$, тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$.

Задачи.

1. Найти интегралы с помощью замены переменной.

1). $\int (5-3x)^{19} dx$. 2). $\int x(x+6)^6 dx$. 3). $\int x(5x^2-3)^7 dx$, замена $5x^2-3 = t$.

4). $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, замена $t = \sin x$. 5). $\int \frac{dx}{1+e^{2x}}$, замена $t = e^x$.

6). $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, замена $t = \frac{1}{x}$.

2. Проинтегрировать иррациональности.

1). $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$. 2). $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x+2}} dx$. 3). $\int \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$. 4). $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}} dx$. 5). $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

6). $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$. 7). $\int \frac{\cos \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$.

Дополнительные задачи.

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$, сделав две замены переменных: $x = \frac{1}{\sin t}$ и $u = \cos t$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1, гл. 9, § 1, п. 2.

1. Найти интегралы с помощью замены переменной.

1). $\int x(x-1)^8 dx$. 2). $\int \frac{x^3}{(x+2)^3} dx$. 3). $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}$ (замена $e^x + 1 = t^4$).

4). $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$, замена $t = \cos x$. 5). $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, замена $t = \frac{2}{x}$.

2. Проинтегрировать иррациональности.

1). $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. 2). $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. 3). $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$. 4). $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

5). $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} dx$. 6). $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x}}$.