

Занятие 8. Интегрирование тригонометрических функций.

При нахождении **интегралов вида** $\int \sin^m x \cos^n x dx$, если: а) степень m у синуса нечетная, то применяют подстановку $\cos x = t$; б) степень n у косинуса нечетная, то применяют подстановку $\sin x = t$; в) m и n – четные, то применяют формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Если под интегралом содержится **произведение синуса и косинуса различных аргументов**, то применяют формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

При нахождении **интегралов вида** $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная дробь, применяют **универсальную подстановку** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$,

$$\text{тогда } x = 2 \operatorname{arctg} t; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

В **интегралах** $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$, $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ применяют подстановку $\operatorname{tg} x = t$, тогда $x = \operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$.

Задачи.

1. Вычислить неопределенные интегралы.

1). $\int \sin^5 x dx$. 2). $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. 3). $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. 4). $\int \cos^4 x dx$.

5). $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 6). $\int \sin 5x \cos x dx$. 7). $\int \cos 5x \cos 3x dx$.

2. Найти неопределенные интегралы, используя универсальную подстановку.

1). $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$. 2). $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$. 3). $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.

3. Найти неопределенные интегралы, используя подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

1). $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$. 2). $\int \operatorname{tg}^4 x dx$. 3). $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$.

Дополнительные задачи.

Вычислить неопределенные интегралы.

1). $\int \sin 3x \sin 2x \cos x dx$. 2). $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x \sin x}}$.

Задачи для самостоятельной работы. Данко, ч. 1, гл. 9, § 4, пп. 1, 2, 6.

1. Вычислить неопределенные интегралы.

1). $\int \cos^3 x dx$. 2). $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$. 3). $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. 4). $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$.

2. Найти неопределенные интегралы, используя универсальную подстановку.

1). $\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$. 2). $\int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}$. 3). $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$.

3. Найти неопределенные интегралы, используя подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

1). $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. 2). $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$. 3). $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x}$.