

Расчетно-графическая работа №6 «Дифференциальные уравнения первого порядка»

Задача 1. Решите уравнения с разделяющимися переменными.

- | | |
|--|---|
| 1. а) $8(y-1) + (x+1)y' = 0$, | б) $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$. |
| 2. а) $(9 + 7\cos^3 x) - y'\cos^2 x = 0$, | б) $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$. |
| 3. а) $(a^2 + y^2) + y'2x\sqrt{ax - x^2} = 0, y(a) = 0$, | б) $xdy - y^3dx = 0$. |
| 4. а) $x^2(y^3 + 5) + y'y^2(x^3 + 5) = 0, y(0) = 1$, | б) $(x^2 - 1)dy + y^2dx = 0$. |
| 5. а) $e^x \sin^3 y + y'(1 + e^{2x})\cos y = 0$, | б) $dy\operatorname{tg}x = ydx, y(\pi/2) = 1$. |
| 6. а) $(1 - x^2)y' - xy = xy^2, y(0) = 1/2$, | б) $\cos^2 xdy = (y^2 + 4)\sin xdx$. |
| 7. а) $x + xy + y'(y + xy) = 0$, | б) $2\sqrt{x}dy = ydx, y(4) = 1$. |
| 8. а) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg}x, y(\pi/4) = 1/2$, | б) $(x^2 + 1)dy + yx^3dx = 0$. |
| 9. а) $x^2y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$, | б) $\operatorname{ctg}^2 ydy + \operatorname{tg}^2 xdx = 0$. |
| 10. а) $(x+1)y' + x(y^2 - y - 2) = 0$, | б) $dy = \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^3 dx$. |
| 11. а) $yy' + x^4 = 0, y(1) = 1$, | б) $\sqrt{1-x^2}dy = (1+y^2)dx$. |
| 12. а) $y^2y' + x^2 = 1$, | б) $dy = e^{x+y}dx$. |
| 13. а) $x^2y' - 2y^2 + y = 0$, | б) $dy + \frac{x \sin xdx}{y \cos y} = 0$. |
| 14. а) $(1 + y^2)x + (1 + x^2)y' = 0$, | б) $2x^2ydy + y^2dx = 2dx$. |
| 15. а) $y' = 2\sqrt{y} \ln x, y(e) = 1$, | б) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$. |
| 16. а) $y' + y\operatorname{tg}x = 0, y(\pi) = 2$, | б) $\cos \sqrt{x}dx - \sqrt{x}dy = 0$. |
| 17. а) $(x^2y - y) + y'(xy^2 + x) = 0$, | б) $\frac{y}{y'} = \ln y, y(2) = 1$. |
| 18. а) $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$, | б) $y' = x\sqrt{y}$. |
| 19. а) $\ln \cos ydx + x\operatorname{tg}ydy = 0$, | б) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0$. |
| 20. а) $xy' + y = y^2, y(1) = 1/2$, | б) $xdy - (1 - \sqrt{x})^3 dx = 0$. |
| 21. а) $(x+2)dx - (x^2 + 4x - 7)dy = 0$, | б) $yy' = \frac{1-2x}{y}$. |
| 22. а) $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$, | б) $e^{-y}(1+y') = 1$. |
| 23. а) $x^2(y^4 + 5) + y^3(x^6 - 4)y' = 0$, | б) $y \ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$ |
| 24. а) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x}) + y'(\sqrt{xy} + \sqrt{y}) = 0$, | б) $dy = 2^{x-y}dx, y(-3) = -5$. |
| 25. а) $x(y^6 + 1) + y'y^2(x^4 + 1) = 0$, | б) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$. |
| 26. а) $(1 + x^2)y' + x(1 + 2y) = 0$, | б) $xdy + ydx = y \ln ydx$. |
| 27. а) $y'xy(1 + x^2) = 1 + y^2$, | б) $y'x + \frac{y^2 + 1}{y-1} = 0$. |
| 28. а) $(1 + x^2)y' - 2xy = 6x$, | б) $ye^x dy + xe^y dx = 0$. |
| 29. а) $\cos x \cos ydx - \sin x \sin ydy = 0$, | б) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$. |
| 30. а) $yy' = (2y^2 + 1)\operatorname{ctg}4x, y(\pi/8) = 0$, | б) $2y'\sqrt{3x+1} - xy = 0, y(1) = 1$. |

Задача 2. Решите однородные уравнения.

1. а) $yy' = 2y - x$, б) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$, в) $(y^2 - x^2)y' + 2xy = 0$.
2. а) $x^2y' = y^2 + xy$, б) $xy' \cos(y/x) = y \cos(y/x) - x$, в) $(x - y)y' = y$.
3. а) $(xy)^2 y' + yx^3 = 0$, б) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$, в) $\frac{dy}{dx} \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{y}{x}} - 2$.
4. а) $(x - y)dx + xdy = 0$, б) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$, $y(-1) = 1$, в) $\frac{x}{y} + \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.
5. а) $y' = \frac{x - y}{x + y}$, б) $x^2 dy + xy dx = y^2 dx$, в) $xy' + y \ln x = y \ln y$.
6. а) $y' = \frac{x + 3y}{2x}$, б) $xy^2 dy + y^3 dx = x^2 y dy$, в) $xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$.
7. а) $xy' = \frac{3y^3 + 2x^2 y}{2y^2 + x^2}$, б) $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y dy}{x} = 0$, в) $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
8. а) $x dy - y dx = y dy$, $y(-1) = 1$, б) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$, $y(1) = 0$, в) $y = (x - \sqrt{xy})y'$.
9. а) $y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}$, б) $(\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0$, $y(1) = 1$, в) $x dy + (x + y) dx = 0$.
10. а) $xy' = x + y/2$, б) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 2$, в) $xy^2 y' = x^3 + y^3$.
11. а) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2$, б) $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$, в) $x^2 + y^2 = 2x^2 y'$.
12. а) $y^2 + x^2 y' = xy y'$, б) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, $y(1) = \pi/2$, в) $\frac{1}{2} y^2 = xy \frac{dy}{dx} + 2x^2$.
13. а) $xy' = \frac{3y^2 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$, б) $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, в) $x \operatorname{tg} \frac{y}{x} = y - xy'$.
14. а) $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$, б) $x^2 dy = (y^2 - xy + x^2) dx$, в) $xy dy + (x^2 + y^2) dx = 0$.
15. а) $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y})$, б) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, в) $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0$.
16. а) $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$, б) $x dy - \left(y - x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right) dx = 0$, в) $2x^2 y' - 4xy = y^2$.
17. а) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$, б) $\frac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{dy}{y^2 - 4xy}$, в) $x^2 y' + \frac{1}{4} y^2 = xy$.
18. а) $xy' = \frac{3y^3 + 4x^2 y}{2x^2 + 2y^2}$, б) $2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{y}{x}\right) + 3$, в) $(2xy + y^2) dx + (2xy + x^2) dy = 0$.
19. а) $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$, б) $xy' = y + 2\sqrt{x^2 + y^2}$, в) $y(1 + \ln y - \ln x) - xy' = 0$.
20. а) $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$, б) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$, в) $x \sin \frac{y}{x} = xy' - y$.
21. а) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$, б) $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy$, в) $y' - \frac{y}{x} - 1 = e^{\frac{y}{x}}$.

22. а) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$, б) $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$, в) $xdy = y \ln \frac{x}{y} dx$.
23. а) $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$, б) $ydx - (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$, в) $dy = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx$.
24. а) $y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x} \right)^2} + \frac{y}{x}$, б) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$, в) $y - x = x \cos \frac{y}{x} + xy'$.
25. а) $xy' = y(\ln y - \ln x)$, б) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$, в) $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$.
26. а) $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$, б) $yx' - x = -2x \ln \frac{x}{y}, x(1) = e$, в) $xyy' = x^2y' + y^2$.
27. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, y(2) = \pi$, б) $xy' + xe^{y/x} - y = 0$, в) $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$.
28. а) $x^3y' = y(y^2 + x^2)$, б) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, y(2) = 1$, в) $yx^{-1} = y' \ln \frac{x}{y}$.
29. а) $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$, б) $xdy = (3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2})dx$, в) $y(x^2 + y^2)dx = x^3dy$.
30. а) $y - xy' = x + yy'$, б) $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$, в) $y' = y^2x^{-2} - yx^{-1}$.

Задача 3. Решите линейные уравнения первого порядка.

1. а) $y' - \frac{y}{x} = xe^x$, б) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0$, в) $x \frac{dy}{dx} = x^4 - 2y$.
2. а) $y' - \frac{3y}{x} = x$, б) $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = e^2 / 2$, в) $y' = 3x + 2xy$.
3. а) $y' = 2y + e^x - x$, б) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 0$, в) $\frac{dy}{dx} = yx^{-1} + x$.
4. а) $xy' - 2y = 2x^4$, б) $\sqrt{1 + y^2} dx = \left(\frac{\sqrt{1 + y^2}}{e^{\sqrt{1 + y^2}}} - xy \right) dy$, в) $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.
5. а) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$, б) $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0, y(1) = e$, в) $y' + y \cos x = \sin 2x$.
6. а) $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, б) $y' \operatorname{arctg} x - \frac{y}{1 + x^2} = \operatorname{arctg}^3 x$, в) $x(x - 1) \frac{dy}{dx} = y + (x - 1)^2$.
7. а) $y' - 2xy = xe^{-x^2}$, б) $y' \operatorname{arcsin} x - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, в) $xdy + (y - x \sin x)dx = 0$.
8. а) $y' - \frac{2y}{x + 1} = (1 + x)^3$, б) $(104y^3 - x)y' = 4y, y(8) = 1$, в) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$.
9. а) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$, б) $dx + (xy - y^3)dy = 0, y(-1) = 0$, в) $xy' - x^2 = 3y$.
10. а) $xy' + y = \ln x + 1$, б) $(3y \cos 2y - 2x)y' = y$, в) $(1 - x^2)y' + xy = 1$.
11. а) $(2x + 1)y' + y = x$, б) $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, y(0) = 0$, в) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.
12. а) $xy' - 3y = 3 - 4x$, б) $(2 \ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy$, в) $(x + 2y^3)y' = y$.
13. а) $(xy' - 1) \ln x = 2y$, б) $y^3(y - 1) + 3xy^2(y - 1)y' = (y + 2)y'$, в) $3y = x(x - y')$.
14. а) $y' + y \operatorname{tg} 2x = \sin 4x$, б) $y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy$, в) $xy' = 3 - y$.
15. а) $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$, б) $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$, в) $dx + (x + y^2)dy = 0$.
16. а) $xy' + x^2 + xy - y = 0$, б) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$, в) $y' - 4y = e^{2x}$.
17. а) $y' + y \cos x = \sin 2x$, б) $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$, в) $y' + y = x + 2$.

18. a) $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$, б) $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y$, в) $y' - \frac{xy}{x^2 + 1} = x$.
19. a) $xdy + (x^2 - y)dx = 0$, б) $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy$, в) $y' + 2 \sin x = y$.
20. a) $(y^4 e^y + 2x)y' = y$, б) $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = y/2$, в) $y' = y \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.
21. a) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$, б) $xdy - (y + x^3 \sin x)dx = 0$, в) $x' + 3x = e^{2y}$.
22. a) $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$, б) $2(x + y^4)y' = y, y(-2) = -1$, в) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$.
23. a) $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$, б) $y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$, в) $y' + y \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x$.
24. a) $xy' - 4y = 2x^2 - 3x$, б) $y' \ln x - \frac{y}{x} = 1 - \ln x$, в) $dy + ydx = \cos x dx$.
25. a) $xy' - 2y = x^3 \cos x$, б) $y' \cos x + y \sin x = -\cos x - x \sin x$, в) $2yy' + x = 2y^3$.
26. a) $e^{x^2}(y + y') = 1$, б) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$, в) $y' = x^2 + 2x - 2y$.
27. a) $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)dy$, б) $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$, в) $dy - 2ydx = -x^2 dx$.
28. a) $ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0$, б) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, y(0) = 0$, в) $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$.
29. a) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2 \ln x}{x}, y(1) = 1$, б) $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$, в) $y' \cos y + \sin y = x + 1$.
30. a) $(2y + x)dx = xdy + 4 \ln x dx$, б) $y = x(y' - x \cos x)$, в) $(1 - x^2)dy + xydx = dx$.