

Раздел. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 3. Проверка статистических гипотез



План лекции

- 1. Статистическая гипотеза**
- 2. Статистический критерий**
- 3. Эмпирические и
выравнивающие (теоретические)
частоты**
- 4. Критерий согласия Пирсона**

&1. Статистическая гипотеза

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Нулевой *(основной)*
называют выдвинутую
гипотезу .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3

*Конкурирующей
(альтернативной)*

называют гипотезу ,
которая противоречит
нулевой.

ПРИМЕР

если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $a \neq 10$. Коротко это записывают так: $H_0: a=10$; $H_1: a \neq 10$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Различают гипотезы:

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

&2. Статистический критерий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4

Статистическим критерием называют случайную величину K , которая служит для проверки нулевой гипотезы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5

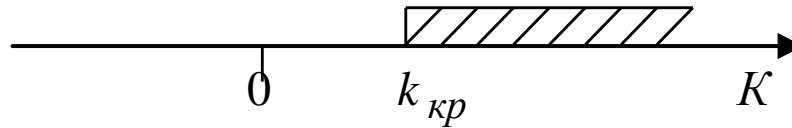
Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

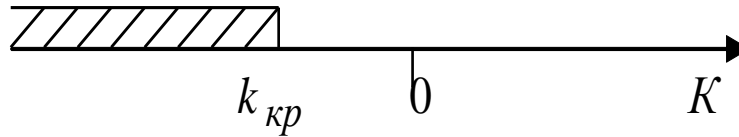
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$.



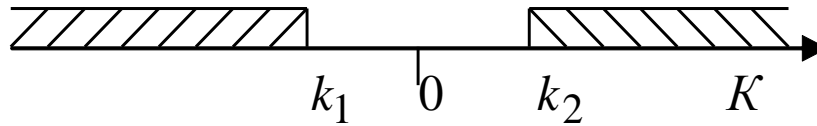
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} < 0$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1, K > k_2$, где $k_2 > k_1$.



Критерий согласия Пирсона

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Отыскание любой из критических областей (правосторонней, левосторонней и двусторонней) сводится к нахождению критических точек $k_{кр}$.

С этой целью задаются достаточно малым **уровнем значимости** - α (обычно 0,05; 0,01). Затем ищут критическую точку исходя из условий:

- $P(K > k_{кр}) = \alpha$ (для правосторонней критической области);
- $P(K < k_{кр}) = \alpha$ (для левосторонней критической области);
- $P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha$ (для двусторонней критической области).

Для каждого из критериев имеются соответствующие таблицы, по которым находят критические точки $k_{кр}$, удовлетворяющие данным требованиям.

&3. Эмпирические и выравнивающие (теоретические) частоты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10

Пусть произведено n испытаний, в которых величина X приняла n_1 раз значение x_1 , n_2 раз значение x_2 , ..., n_k раз значение x_k , причем $\sum n_i = n$.

Эмпирическими частотами называют фактические наблюдаемые частоты n_i .

Выравнивающими (теоретическими) в отличие от фактических наблюдаемых эмпирических частот называют частоты n'_i , найденные теоретически (вычислением).

Алгоритм вычисления теоретических частот

1. Вычислить \bar{x}_B и σ_B , причем в качестве вариантов принять среднее арифметическое концов интервалов $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

2. Пронормировать случайную величину X , т.е. перейти к величине $Z = \frac{(x_i - \bar{x}_B)}{\sigma_B}$,

вычислив концы интервалов $(z_i; z_{i+1})$:

$$z_i = \frac{(x_i - \bar{x}_B)}{\sigma_B}, \quad z_{i+1} = \frac{(x_{i+1} - \bar{x}_B)}{\sigma_B},$$

причем наименьшее значение Z , т.е. z_1 , полагают равным $-\infty$, а наибольшее, т.е. z_k , полагают равным ∞ .

3. Вычислить теоретические вероятности P_i попадания X в интервалы $(x_i; x_{i+1})$ по равенству ($\Phi(z)$ – функция Лапласа)

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

и, наконец, найти искомые теоретические частоты $n'_i = n P_i$.

Все вычисления целесообразно внести в таблицу.

i	x_i	x_{i+1}	n_i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = n P_i$
-----	-------	-----------	-------	-------	-----------	-------------	-----------------	-----------------------------------	----------------

&4. Критерий согласия Пирсона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11

Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Имеется несколько критериев согласия: χ^2 («хи-квадрат») Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др.

Критерий Пирсона служит для сравнения эмпирических и теоретических частот и отвечает на вопрос: случайно ли расхождение этих частот или оно значимо? Но критерий Пирсона, как и любой другой критерий, не доказывает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

Наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^s \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}$$

алгоритм проверки нулевой гипотезы.

1. По предполагаемому теоретическому распределению находим выравнивающие частоты n'_i .

2. Вычисляем наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$

3. Находим число степеней свободы по формуле $k = s - 3$.

4. По данному значению уровня значимости α и числу степеней свободы k находим критическое значение критерия $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$.

5. Сравниваем $\chi^2_{набл}$ и $\chi^2_{кр}$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - нулевую гипотезу отвергают.

ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 1. Объем выборки должен быть достаточно велик, во всяком случае, не менее 50. Каждая группа должна содержать не менее 5 – 8 вариантов; малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя частоты.

Замечание 2. Для контроля вычислений применяют формулу

$$\chi^2_{набл} = \left[\frac{\sum n_i^2}{n} \right] - n .$$

Задача 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$.

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

$$\sum_{i=1}^k x_i n_i$$

Решение. 1. Вычислим $\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n} = 12,63$ и выборочное среднее квадратическое

отклонение $\sigma_B = \sqrt{x_B^2 - (\bar{x}_B)^2} = 4,695$.

2. Вычислим теоретические частоты учитывая, что $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_B = 4,695$, по формуле

$$n'_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695} \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) = 85,2 \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right).$$

Составим расчетную таблицу (значения функции $\varphi(x)$ приведены в приложении 1).

i	x_i	$u_i = \frac{(x_i - \bar{x}_B)}{\sigma_B}$	$\varphi(u_i)$	$n' = \frac{n \cdot h}{\sigma_B} \cdot \varphi(u_i)$
1	5	-1,62	0,1074	9,1
2	7	-1,20	0,1942	16,5
3	9	-0,77	0,2966	25,3
4	11	-0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты. Составим расчетную таблицу, из

которой найдем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$:

i	n_i	n'_i	$ n_i - n'_i $	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	2,0	4,0	0,1
5	26	33,9	7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,0	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,0	5,1
Σ	200				$\chi^2_{набл}=22,2$

По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 6), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ находим критическую точку правосторонней критической области $\chi_{кр}^2 (0,05; 6) = 12,6$.

Так как $\chi_{набл}^2 = 22,2 > \chi_{кр}^2 = 12,6$, гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Задача 2. Распределение 50 промышленных предприятий по средней численности работников характеризуются следующими данными:

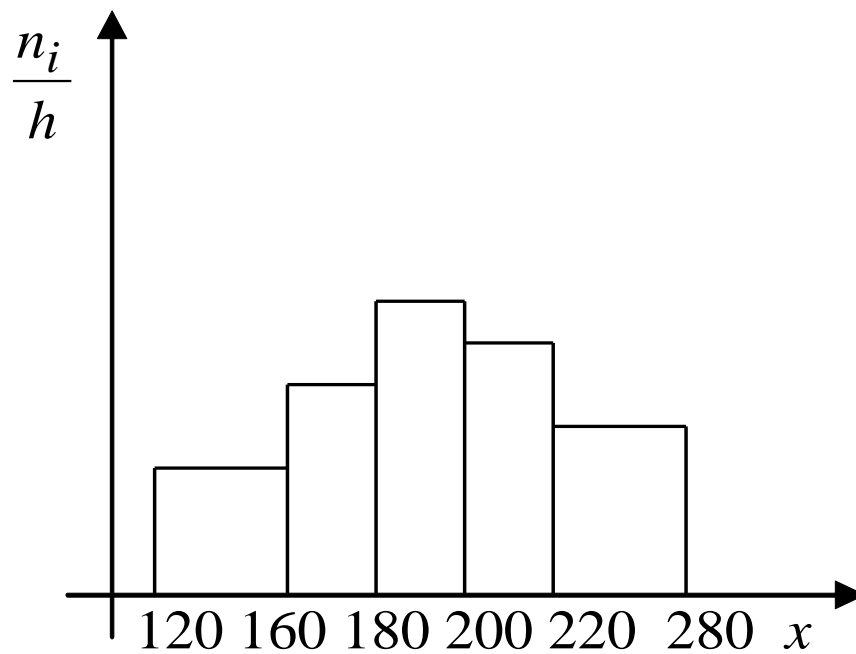
Численность работников	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	240-260	260-280
Число предприятий	1	4	10	14	12	6	2	1

Проверить на уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу о нормальном распределении при помощи критерия Пирсона.

Решение. 1. Ввиду малочисленности частот объединяем первые два и последние три интервала. Получается таблица

$(x_i; x_{i+1})$	120-160	160-180	180-200	200-220	220-280
n_i	5	10	14	12	9

Строим гистограмму:



По виду гистограммы можно предположить, что данная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения. Выдвинем и проверим гипотезу – H_0 : исследуемая случайная величина имеет нормальный закон распределения.

2. Для вычисления теоретических частот находим \bar{x}_B , σ_B , n .

$$\bar{x}_B = 195,2; \sigma_B = 28,5; n = 50.$$

3. Найдем теоретические частоты $n'_i = n P_i$, где $P_i = P(x_i < X < x_{i+1})$ – вероятность того, что случайная величина попадет в интервал $(x_i; x_{i+1})$.

Так как предполагаемый закон распределения нормальный, то

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (приложение 3). Вычисления приведем в таблице:

i	x_i	x_{i+1}	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n' = n \cdot P_i$
1	$-\infty$	160	$-\infty$	-1,24	-0,5	-0,3925	0,1075	5,375
2	160	180	-1,24	0,53	-0,3925	-0,2019	0,1906	9,53
3	180	200	-0,53	0,17	-0,2019	0,0675	0,2694	13,47
4	200	220	0,17	0,87	0,0675	0,3079	0,2404	12,02
5	220	$+\infty$	0,87	$+\infty$	0,3079	0,5	0,1921	9,605
Σ							1	50

4. Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона. Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу

i	n_i	n'_i	$ n_i - n'_i $	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$
1	5	5,375	0,375	0,1406	0,0262
2	10	9,53	0,47	0,2209	0,0223
3	14	13,47	0,53	0,2809	0,0209
4	12	12,02	0,02	0,0004	0,0
5	9	9,605	0,605	0,366	0,0381
Σ	50	50			$\chi^2_{набл} = 0,1075$

По таблице критических точек распределения χ^2 (приложение 6), по уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 5 - 3 = 2$ (s – число интервалов) находим критическую точку правосторонней критической области $\chi_{кр}^2(0,01; 2) = 9,2$.

Сравним $\chi_{набл}^2$ и $\chi_{кр}^2$. Так как $\chi_{набл}^2 = 0,1075 < \chi_{кр}^2 = 9,2$, нет оснований отклонить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	332	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2807	2874	2850	2827	2800	2780	2756	2732	2700	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1738
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1529	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0731	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продолжение приложения 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0450	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0056	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Продолжение приложения 1

[illegible]

Приложение 2
Критерий Пирсона

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Таблица значений функций Функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

X	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192
0,12	0,0478	0,55	0,2088	0,98	0,3365	1,41	0,4207
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3883	1,65	0,4505
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564

Рефлексия деятельности

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Что такое статистический критерий?
3. Что такое эмпирические и теоретические частоты?
4. Перечислите алгоритм проверки нулевой гипотезы
5. Критерий согласия Пирсона применяется ...

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!