Раздел. Линейная алгебра

Тема 1. **Матрицы**

Содержание лекции:

- Основные понятия
- Виды матриц
- Транспонированная матрица
- Действия над матрицами

§1. Основные понятия

Определение 1

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} \ a_{m1} \ \dots \ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначение элементов матрицы

Для любого элемента a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j – номер столбца. Сокращенно прямоугольную матрицу типа $m \times n$ можно записать так: $A = (a_{ij})$, где

$$i = 1, 2, \ldots, m; \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами*.

Определение 2

Две матрицы называются ***равными*** *(A=B)*, если они имеют одинаковое число строк *m* и одинаковое число столбцов *n* и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$

&2. Виды матриц

- Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется ***прямоугольной***. Например,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 & -1 \\ -2 & 11 & 6 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Виды матриц

- Если число строк равно числу столбцов (m=n) , то матрица называется ***квадратной***.

Например, A=$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *или* B=$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 11 & 4 & 2 \\ 23 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей *n-го* порядка.

Элементы a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}, на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют *главную диагональ*, а диагональ, содержащую элементы a_{1n}, a_{2n-1}, ... a_{n1}, - побочной.

Виды матриц

- Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Например, $B=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Виды матриц

- Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой *E*.

$$\text{Например, } E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ или } E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Виды матриц

- Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной (побочной) диагонали, равны нулю.

$$\textit{Например, } A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 51 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & -8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 51 \\ 5 & -1 & 15 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 25 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виды матриц

- Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой *O*. Имеет вид

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Виды матриц

- Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или *матрица-столбец*, или *матрица-строка* соответственно). Например,

$$A=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ B = (4 \quad 3 \quad -2 \quad -7).$$

&3. Транспонированная матрица

- Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Например, если $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *то* $A^T=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Если $A=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, *то* $A^T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $\left(A^T\right)^T=A$.

§4. Действия над матрицами

Сложение (вычитание)

Суммой (разностью) двух матриц А и В условимся называть такую матрицу, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц А и В.

Складывать (вычитать) можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m \times n$, или квадратные порядка n.

Сложение (вычитание)

Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

*Аналогично определяется **разность матриц**.*

Пример

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножение на число

- ***Умножение матрицы*** на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Например,

$$если\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},\ то\ 3A=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 0 \\ -15 & 18 \end{pmatrix}$$

Свойства

- $A+B=B+A$;
- $A+(B+C)=(A+B)+C$;
- $A+0=A$;
- $A-A=O$;
- $1 \cdot A=A$;
- $\alpha \cdot (A+B) = \alpha A + \alpha B$;
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta) \cdot A$,

где A,B, C-матрицы, α и β – числа.

Произведение матриц

- Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда ***число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.***

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка.

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведением этих матриц называется матрица

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Примеры на умножение

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 & 3-1 \\ -1+6 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

2) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & -1+2 \\ 9-1 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$

3) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 4 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 5 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 8 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 6 + (-1)\cdot 7 & 1\cdot 4 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 5 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Примеры на умножение

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 8 \\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

- $AB \neq BA$;
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
- $(A+B) \cdot C = AC + BC$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.

Рефлексия деятельности

- Что такое матрица?
- Какие матрицы называются равными?
- Перечислите виды матриц…
- Транспонированной матрицей называется…
- Правило сложения двух матриц…
- Правило вычитания двух матриц…
- Правило умножения числа на матрицу…
- Умножение двух матриц….

Рефлексия деятельности

1. *Найти линейные комбинации матриц:*

а) 5A+2B, где A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -6 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

2. Найти произведения матриц AB и BA:

A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!