Раздел. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Вычисление определителей.

Определитель **второго порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель **третьего порядка** задается равенством

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Свойства определителей. 1. Определитель равен нулю, если он содержит: две одинаковые или пропорциональные строки; строку (столбец) из нулей. **2.** Определитель не изменится, если к любой его строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число. **3.** Разложение определителя по любой строке (столбцу):

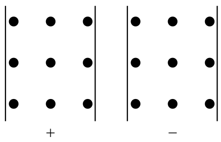
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \ldots = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Способы вычисления определителя третьего порядка.

а). Правило **Саррюса (дополнения)**:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

б). Правило **треугольников:**



в). Разложение определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. Действия над матрицами. Обратная матрица.

Матрицей A порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из действительных чисел и содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Сумма (разность) матриц *одного порядка* $C = A \pm B \iff c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Произведение матрицы на число $B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Произведением AB матриц A и B называется матрица $C = AB$, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}):$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы порядка $m \times k$ на матрицу порядка $k \times n$ получится матрица порядка $m \times n$.

Некоммутативность (неперестановочность) умножения матриц: $AB \neq BA$.

Если A - невырожденная *квадратная* матрица (определитель матрицы $|A| \neq 0$), то существует единственная матрица A^{-1}, называемая **обратной** к матрице A, такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - единичная матрица.

Чтобы **найти** A^{-1} необходимо: - вычислить определитель $\Delta = |A|$ матрицы A; - найти алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента a_{ij} матрицы A; - составить из чисел A_{ij} матрицу A^*; - транспонируя матрицу A^*, составить матрицу $\left(A^*\right)^T$; - умножить матрицу $\left(A^*\right)^T$ на число $\dfrac{1}{\Delta}$: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\left(A^*\right)^T$.

3. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный метод и правило Крамера.

Система линейных уравнений третьего порядка имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

1. **Правило Крамера:** если определитель матрицы системы не равен 0, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta -$ определитель матрицы системы; $\Delta_k -$ определитель, получаемый из определителя Δ заменой $k -$ го столбца столбцом свободных членов, $k = 1,2,3$.

2. Матричный способ: система линейных уравнений в матричной форме имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения определяется формулой $X = A^{-1}B$.

4. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для краткости вместо системы рассматриваем **расширенную матрицу** ее коэффициентов, которую приводим к треугольному виду:

$$\overline{A} = \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right\rangle \Uparrow$$

с помощью следующих, *не меняющих решения*, преобразований: **1.** В $\overline{A}$ можно менять местами строки. **2.** Можно в $\overline{A}$ менять местами столбцы *слева от прямой черты.* **3.** К одной строке $\overline{A}$ можно прибавить другую, умноженную на некоторое число.

Треугольную матрицу записываем в виде уравнений снизу вверх, последовательно находя неизвестные