Раздел. Линейная алгебра

Тема 5. **Система линейных уравнений**

Содержание лекции:

- Формулы Крамера
- Матричный способ решения
- Метод Гаусса

§1. Формулы Крамера

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1),$$ где

***x, y, z*–неизвестные искомые**

$\boldsymbol{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}}$

–коэффициенты при неизветсных

Формулы Крамера

Тогда решение системы (1) вычисляем по формуле Крамера

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta}, \quad \boldsymbol{z} = \frac{\Delta \boldsymbol{z}}{\Delta} \qquad (2),$$

Где Δ – главный определитель системы;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ –определители, которые получаются из главного определителя заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Замечания:

1. Если $\Delta \neq 0$, то система (4) совместна (т.е. имеет единственное решение).
2. Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей не равен нулю ($\Delta x \neq 0$ или $\Delta y \neq 0$ или $\Delta z \neq 0$), то система (4) несовместна (т.е. не имеет решения).
3. Если $\Delta = 0$ и $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, то система (4) совместна (имеет множество решений).

Пример_1

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$$

Подставляем формуле Крамера

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6+8+3-(4-6-6)}{6-4+5-(-2-6-10)}$$

$$= \frac{25}{25} = 1.$$

Подставляем в формуле Крамера

$$Y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9-6-10-(3+12-15)}{25}$$

$$=\frac{-25}{25}=-1.$$

Подставляем формуле Крамера

$$Z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{12+6+15-(-6+9-20)}{25}$$

$$=\frac{50}{25}=2.$$

Проверка

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 = 3, \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 3, \\ 1 + (-1) - 2 = -2. \end{cases}$$

Ответ: (1; -1; 2)

Пример_2

Решить С.Л.У.

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 3x+2y+2z=1, \\ 4x+3y+3z=4. \end{cases}$$

Решение:

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{0}{0} = 0.$$

$$Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3+16+12-(4+8+18)}{0} = \frac{1}{0} = \emptyset.$$

Ответ: система не имеет решения (несовместна)

§2. Матричный способ решения

Систему (1) удобно записывать в компактной матричной форме

$$\boldsymbol{A \cdot X = B} \qquad (3),$$

где А - матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей*:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ -вектор-столбец из неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец из свободных членов.

Тогда решение системы (1) можно найти по формуле:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$$ (4), где

$\boldsymbol{A}^{-1}$-обратная матрица.

Пример_3

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ -2x + y + z = 0, \\ 2x - y + 4z = 15. \end{cases}$$

Решение:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$

2. Найдем обратную матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$.

$detA = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$=12-2-(-3+8)=5$\neq 0$

Запишем все алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$=5; $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$=10;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$=0;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$=4; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$=12;

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$=1;

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$= -1; $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$= -3;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$=1;

Запишем новую матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

и транспонируем ее:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25 - 15 \\ 50 - 45 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 1 = 5, \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0, \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 15. \end{cases}$$

Ответ: (2, 1, 3)

Пример_4

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = -1, \\ x + y + 5z = -3, \\ 3x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Решение

1. Найдем обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1}\text{- не существует}$$

Ответ: Система несовместна (не имеет решения)

§3. Метод Гаусса

При решении систем линейных уравнений (1) используется также *метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)*.

Он состоит в следующем: **систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок.**

Теорема Кронекера-Капелли

- Если $r(A) = r(\tilde{A})$, то система совместна (имеет единственное решение).
- Если $r(A) < r(\tilde{A})$, то система несовместна (не имеет решения).
- Если $r(A) \geq r(\tilde{A})$, то система совместна (имеет множество решений).

Пример_5

Определить совместна ли с.л.у.?

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Умножим $1-$ ю строку сначала на $-3,$ а затем на -4 и сложим результаты.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

2-ю строку умножим на (-1) и прибавим к 3-й строке

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$Следовательно\ \ r(A) = 2;\ \ r(\tilde{A})$=3.

$$r(A) < r(\tilde{A})$$

Ответ: система несовместна (не имеет решения)

Замечание

В случае $r(A) \geq r(\tilde{A})$, когда система имеет множество решений. Необходимо определить ***свободные*** и ***главные*** коэффициенты.

Пусть *n – количество неизвестных в системе (1)*. Тогда *r* – количество *главных* коэффициентов, остальные *n*-*r* – неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений. Таким образом, получаем общее решение. Придавая свободным неизвестным *произвольные значения*, получим соответствующие значения главных неизвестных. Так можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Пример_6

Используя метод Гаусса, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ x - 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Переставим третье уравнение на место первого:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Чтобы в 1-м столбце получить $a_{21} = a_{31} = 0$, умножим $1-$ю строку сначала на -2, а затем на -3 и сложим результаты.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right)$$

Умножим 2-ю на -8, 3-ю строку на 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -24 & 8 & -24 \\ 0 & 24 & -21 & -15 \end{array}\right)$$

2-ю строку прибавим к 3-й строке

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -24 & 8 & -24 \\ 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right).$$

Следовательно $r(A) = r(\tilde{A})$=3

Запишем новую эквивалентную систему

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3, \\ -24y + 8z = -24, \\ -13z = -39. \end{cases}$$

Выполняя обратных ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные:

$$-13z = -39;\ \text{z} = 3;$$

-24y+24=-24; y=2;

X-4+6=3; x=1.

Проверка:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 4, \\ 2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 3 = 9, \\ 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1, 2, 3)

Пример_7

Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right)$$

Решение

Последовательно умножим 1-ю строку на (-3), (-2) и (-1) прибавим результаты из 2-й, 3-й и 4-й строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

Решение

2-ю строку умножим на (-1) и прибавим к 3-й и 4-й:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r(A) \geq r(\tilde{A})$=2. Следовательно *n =4, r=2. Тогда количество главных – 2, свободных: n-r=4-2=2.*

Найдем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

x_1, x_2 *-главные,* x_3, x_4 –свободные.

Тогда общим решением систему является:

$$x_2 = 2 + 2/5x_3 + 3/5x_4,$$
$$x_1 = -3 + 2x_2 - x_4.$$

Найдем частное решение:

Например, положим, что $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$.

Тогда найдем *одно из частных решений* данной системы $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Рефлексия деятельности

№1

Метод исключения неизвестных при решении систем линейных уравнений иначе называется:

1) метод Гомори;
2) метод Гаусса;
3) матричный способ;
4) формулы Крамера.

№2.

Если определитель из коэффициентов при неизвестных в системе линейных уравнений равен нулю, то решить ее можно:

1) методом Гаусса;
2) формулами Крамера;
3) методом обратной матрицы;
4) методом анализа.

№3

Дана с.л.у.

$$\begin{cases} 3x + \lambda y = 5, \\ -y - 3z = -5, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$$

Определить при каком λ нельзя решить с.л.у. формулами Крамера?

№4

Если (x_0, y_0) - решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$, тогда разность

$x_0 - y_0$ равна…

__Варианты ответов__: 1) 7,5 2) 0,5 3) -7,5 4) -0,5

№5

В системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными поменяли местами два уравнения изменится ли общее решение?

варианты ответов: а) нет б) да

№4

Можно ли с помощью формул Крамера найти решение системы, содержащий 2 уравнения с 3 неизвестными?

варианты ответов: а) нет б) да

№6

Решить с.л.у.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6, \\ 2x + z = 4, \\ 3z = 6. \end{cases}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!