

Раздел. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема. Дифференцирование функций одной переменной (Производная функции)

**Составитель: Филиппова М.П., доцент кафедры
высшей математики ИМИ СВФУ**

План лекции

- &1. Определение производной**
- &2. Геометрический и физический смысл производной**
- &3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью**
- &4. Правила дифференцирования**
- &5. Таблица производных основных элементарных функций**
- &6. Дифференциал функции**
- &7. Производная сложных функций.**
- &8. Производные и дифференциалы высших порядков.**
- &9. Особые случаи дифференцирования.**
- &10. Теоремы о среднем.**
- &11. Правило Лопиталя.**
- &12. Исследование функций с помощью производной.**
- &13. Схема исследования графика функции.**

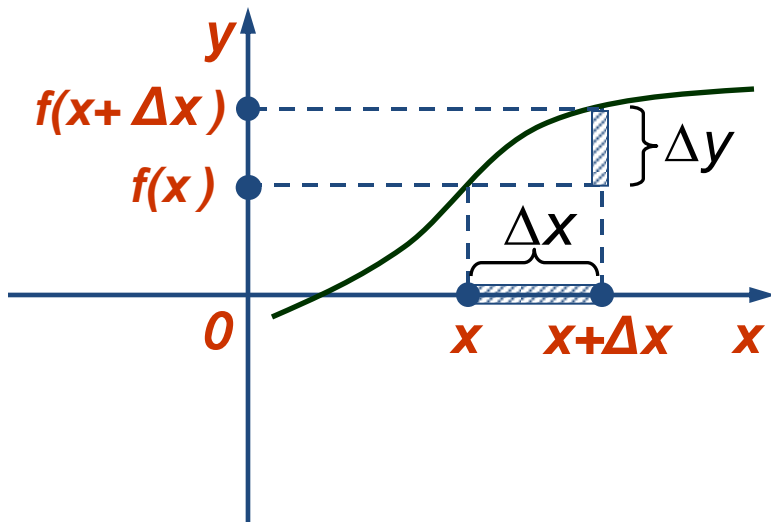
&1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Аргументу x придадим некоторое приращение Δx :
 $x + \Delta x \in (a; b)$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

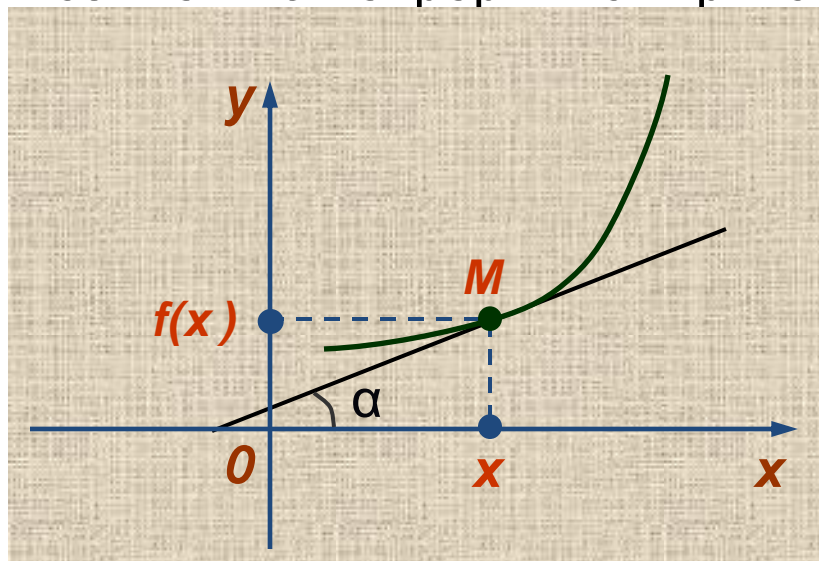
Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется **дифференцируемой** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'|_{x_0}$$

&2. Геометрический и физический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :

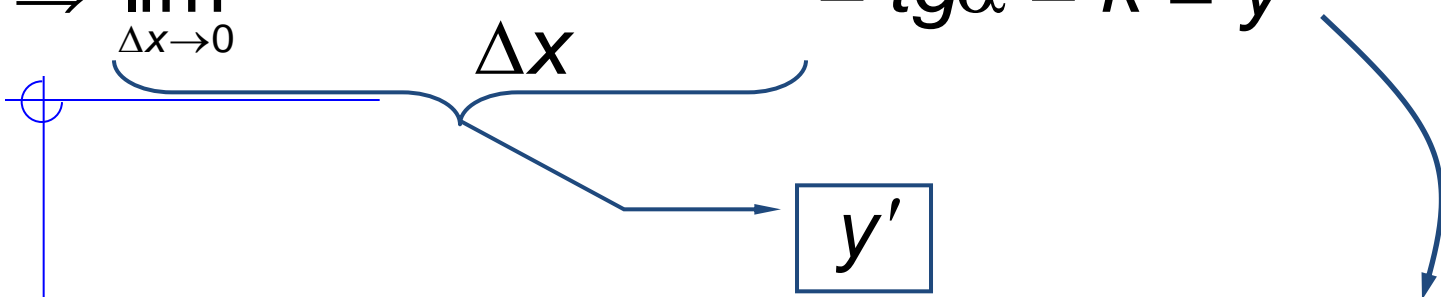


Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$


Геометрический смысл производной. Производная $f'(x)$ равна **угловому коэффициенту** касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания ***M*** имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент касательной есть **$k = f'(x_0)$** . (2)

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$f'(x_0)$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение
касательной

(3)

(4)

Уравнение
нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой – либо физический процесс, то $f'(x)$ есть **мгновенная скорость** протекания этого процесса – **физический смысл производной.**

$$v(t) = f'(x) \quad (5)$$

&3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

$$\left[\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \right] \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

Функция $y = f(x)$ – непрерывна.

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

&4. Правила дифференцирования

Пусть $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$

&5. Таблица производных

Производные основных элементарных функций.

$$1) C' = 0;$$

$$2) (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Производные основных элементарных функций (доказательство)

1 Степенная функция: $y = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$

Придадим аргументу x приращение Δx , тогда функция получит приращение:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

*Формула **бинома Ньютона**:*

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n$$

k – факториал

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

Производные основных элементарных функций (доказательство)

По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$= (\cancel{x^n} + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n) - \cancel{x^n}$$

Тогда:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1} \right) =$$

$$= nx^{n-1}$$

\Rightarrow

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Производные основных элементарных функций (доказательство)

2 Логарифмическая функция:

$$y = \ln x$$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$$

при $\Delta x \rightarrow 0$

Аналогично выводятся правила дифференцирования других основных элементарных функций.

Пример

Вычислить производную функции $y = \frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x}$

$$y' = \left(\frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x} \right)'$$

$$= \frac{(1 + \sin x)' \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot (x^3 \cdot \ln x)'}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{(1' + (\sin x)') \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot ((x^3)' \cdot \ln x + x^3 (\ln x)')}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot x^3 \cdot \ln x - (1 + \sin x) \cdot (3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x})}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

&6. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x) \Delta x$, т.е. $f'(x) \Delta x$ -главная часть приращения Δy .

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

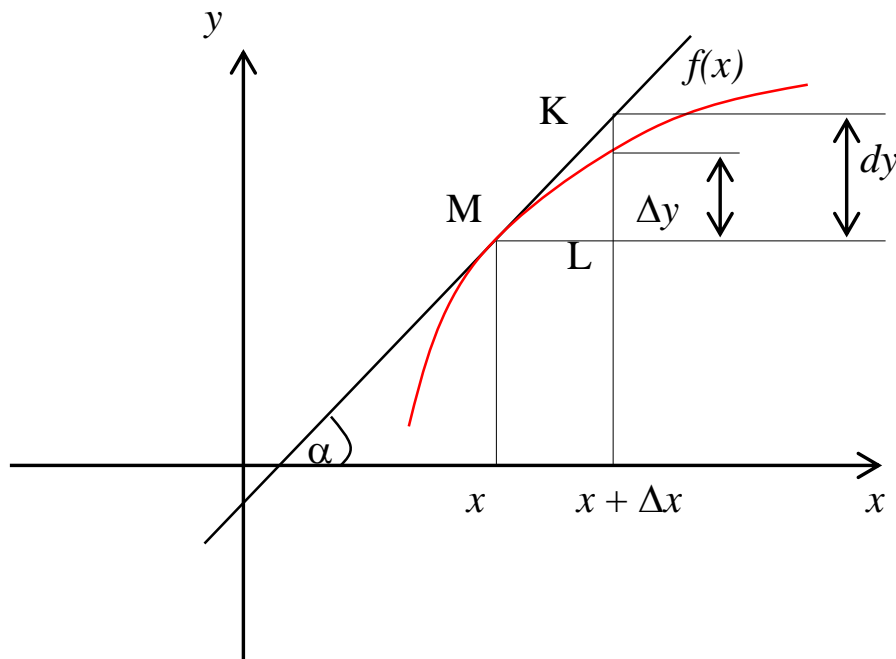
Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$dy = f'(x)dx. \quad (6)$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL : $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

$$1) \quad d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$$

$$2) \quad d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + u dv$$

$$3) \quad d(Cu) = Cdu$$

$$4) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

Пример



Найти дифференциал функции $y = \sin x - x \cos x$.

Решение

Найдем производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x - x \cos x)' = \cos x - \left(x' \cos x + x (\cos x)' \right) = \cos x - (\cos x + x (-\sin x)) = \\ &= \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x \sin x = x \sin x. \end{aligned}$$

Дифференциал имеет следующий вид:

$$dy = y' dx = x \sin x dx.$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \quad (7)$$

☺ Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Пример

Найти приближенное значение приращения функции

$$y = x^3 - 2x + 1 \text{ при } x = 2 \text{ и } \Delta x = 0,001.$$

Решение

$$\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x.$$

$$dy|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0,001 = 10 \cdot 0,001 = 0,01.$$

Итак, $\Delta y \approx 0,01$.

Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy :

$$\begin{aligned} \Delta y &= ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \\ &= \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2); \end{aligned}$$

$$\Delta y|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,001}} = 0,001(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0,001 + 0,001^2 - 2) = 0,010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна

$$|\Delta y - dy| = |0,010006 - 0,01| = 0,000006.$$



Пример

Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1,05$.

Решение

имеем:

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Так как $x + \Delta x = 1,05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0,05$ получаем:

$$\operatorname{arctg} 1,05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0,05}{1 + 1} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,810.$$

Можно показать, что абсолютная погрешность формулы (24.4) не превышает величины $M \cdot (\Delta x)^2$, где M — наибольшее значение $|f''(x)|$ на сегменте $[x; x + \Delta x]$ (см. с. 196).

&7. Производная сложных функций.

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f .

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$ (8)

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta u \rightarrow 0$, т.к. $u = g(x)$ – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Теорема доказана.

Пример

Найти производную функции $y = \cos(\ln^{12} 2x)$.

Решение

○ Решение: Коротко: $y' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$.

Решение с пояснениями: данную функцию можно представить следующим образом: $y = \cos u$, $u = t^{12}$, $t = \ln z$, $z = 2x$. Производную сложной функции найдем по правилу $y'_x = y'_u \cdot u'_t \cdot t'_z \cdot z'_x$ (здесь промежуточных аргументов три):

$$y'_x = -\sin u \cdot 12 \cdot t^{11} \cdot \frac{1}{z} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin t^{12} \cdot 12 \cdot (\ln z)^{11} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln z)^{12} \cdot 12 \cdot \ln^{11} z \cdot \frac{1}{x},$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

Окончательно

$$y'_x = -12 \cdot \sin(\ln^{12} 2x) \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

&8. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $f(x)$ - дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции $f'(x)$, получим **вторую производную** функции $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right). \quad (9)$$

Пример

Найти производную 13-го порядка функции $Y = \sin x$

Решение

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right),$$

$$y^{\text{IV}} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right),$$

.....

$$y^{(13)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 13\right).$$



Пример

Найти d^2y , если $y = e^{3x}$.

Решение

Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$,

то имеем

$$d^2y = 9e^{3x} dx^2.$$

&9. Особые случаи дифференцирования.

Неявно заданная функция

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y , то функция задана в явном виде (явная функция).

⇒ Под **неявным заданием** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x; y) = 0$, не разрешенного относительно y .

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - x + y = 0$).

☉ Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y : **достаточно продифференцировать это уравнение по x , рассматривая при этом y как функцию x , и полученное затем уравнение разрешить относительно y' .**

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y .

Правило 1 Дифференцирование неявной функции $F(x, y)=0$

1. Дифференцируем обе части выражения;
2. y - рассматриваем как сложную функцию;
3. Из полученного выражения выражаем производную функции?

Пример

Найти производную функции y , заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение

○ Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения

$$3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

следует, что $y^2 y' - xy' = y - x^2$, т. е. $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$.

Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (21.1)$$

где t — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x , считая, что функции (21.1) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \quad (21.2)$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (21.1), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства (21.2) получаем

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \quad \text{т. е.} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (10)$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x .

Пример

Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x .

○ Решение: Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \frac{2t}{3t^2}$, т. е.

$$y'_x = \frac{2}{3t}.$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию *сначала прологарифмировать*. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

☼ Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая **степенно-показательная функция** $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x . Найдем производную этой функции:

$$\begin{aligned}\ln y = v \cdot \ln u, \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u', \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad y' = y \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right),\end{aligned}$$

т. е.

$$y' = u^v \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right),$$

или

$$\boxed{(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.} \quad (22.1)$$

Правило 2

степенно-показательная функция $y = u^v$, где $u = u(x)$

и $v = v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от x .

1. Обе части выражения логарифмируем; применяем свойства степени в логарифме.
2. Обе части выражения дифференцируем; u рассматриваем как сложную функцию;
3. Из полученного выражения выражаем y' ? Вместо u подставляем условие задачи.

Пример

Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение

Пользуясь формулой (22.1), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2 + 1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2.$$



&10. Теоремы о среднем.

Теорема Ролля.

(Роль (1652-1719)- французский математик)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε , $a < \varepsilon < b$, в которой производная функции $f(x)$ равная нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении условий теоремы на интервале (a, b) существует точка ε такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна оси Ox . Таких точек на интервале может быть и несколько, но теорема утверждает существование по крайней мере одной такой точки.

Доказательство.

По свойству функций, непрерывных на отрезке функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения. Обозначим эти значения M и m соответственно. Возможны два различных случая $M = m$ и $M \neq m$.

Пусть $M = m$. Тогда функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сохраняет постоянное значение и в любой точке интервала ее производная равна нулю. В этом случае за ε можно принять любую точку интервала.

Пусть $M \neq m$. Так значения на концах отрезка равны, то хотя бы одно из значений M или m функция принимает внутри отрезка $[a, b]$. Обозначим ε , $a < \varepsilon < b$ точку, в которой $f(\varepsilon) = M$. Так как M - наибольшее значение функции, то для любого Δx (будем считать, что точка $\varepsilon + \Delta x$ находится внутри рассматриваемого интервала) верно неравенство:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \leq 0$$

При этом
$$\frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leq 0, & \text{если } \Delta x > 0 \\ \geq 0, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Но так как по условию производная в точке ε существует, то существует и предел
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}.$$

Т.к. $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leq 0$ и $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geq 0$, то можно сделать вывод:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad \text{т.е.} \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема Ролля имеет несколько следствий:

- 1) Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $f'(\varepsilon) = 0$. Т.е. между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.
- 2) Если на рассматриваемом интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет производную $(n-1)$ -го порядка и n раз обращается в нуль, то существует по крайней мере одна точка интервала, в котором производная $(n-1)$ -го порядка равна нулю.

Теорема Лагранжа.

(Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик)

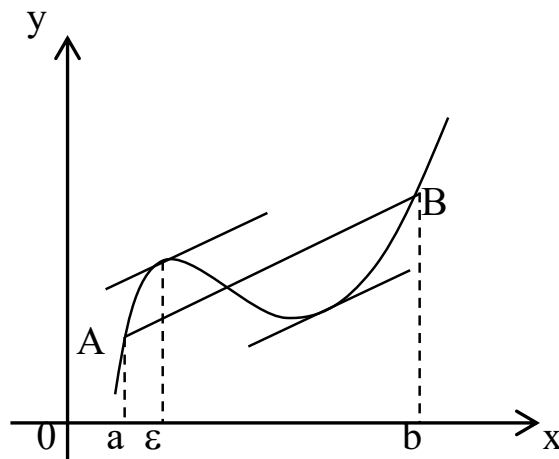
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε

$a < \varepsilon < b$, такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Это означает, что если на некотором промежутке выполняются условия теоремы, то отношение приращения функции к приращению аргумента на этом отрезке равно значению производной в некоторой промежуточной точке.

Рассмотренная выше теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей АВ.



Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на интервале (a, b) существует точка ϵ такая, что в соответствующей точке кривой $y = f(x)$ касательная параллельна секущей, соединяющей точки A и B . Таких точек может быть и несколько, но одна существует точно.

Доказательство.

Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - y_{\text{сек } AB}$$

Уравнение секущей АВ можно записать в виде:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет теореме Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . По теореме Ролля существует хотя бы одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая что $F'(\varepsilon) = 0$.

Т.к. $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то $F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, следовательно

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Теорема доказана.

Определение

Выражение $f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a)$ называется **формулой**

Лагранжа или **формулой конечных приращений**.

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши.

(Коши (1789-1857)- французский математик)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Т.е. отношение приращений функций на данном отрезке равно отношению производных в точке ε .

Для доказательства этой теоремы на первый взгляд очень удобно воспользоваться теоремой Лагранжа. Записать формулу конечных разностей для каждой функции, а затем разделить их друг на друга. Однако, это представление ошибочно, т.к. точка ε для каждой из функций в общем случае различна. Конечно, в некоторых частных случаях эта точка интервала может оказаться одинаковой для обеих функций, но это - очень редкое совпадение, а не правило, поэтому не может быть использовано для доказательства теоремы.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

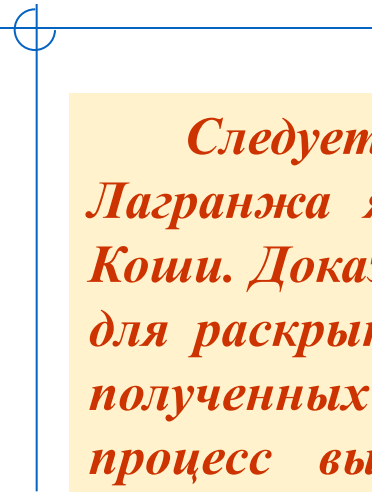
которая на интервале $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Легко видеть, что при $x = a$ и $x = b$ $F(a) = F(b) = 0$. Тогда по теореме Ролля существует такая точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $F'(\varepsilon) = 0$. Т.к.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \text{ то}$$

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

$$\text{А т.к. } g'(\varepsilon) \neq 0, \text{ то } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Теорема доказана.



Следует отметить, что рассмотренная выше теорема Лагранжа является частным случаем (при $g(x) = x$) теоремы Коши. Доказанная нами теорема Коши очень широко используется для раскрытия так называемых неопределенностей. Применение полученных результатов позволяет существенно упростить процесс вычисления пределов функций, что будет подробно рассмотрено ниже.

&11. Правило Лопиталя.

Теорема (правило Лопиталя). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a , непрерывны в точке a , $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (11)$$

Доказательство. Применив формулу Коши, получим:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

где ε - точка, находящаяся между a и x . Учитывая, что $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Пусть при $x \rightarrow a$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ стремится к некоторому пределу. Т.к. точка ε лежит между точками a и x , то при $x \rightarrow a$ получим $\varepsilon \rightarrow a$, а следовательно и отношение $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ стремится к тому же пределу. Таким образом, можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана.

Пример

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

Решение

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; \quad g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

Пример

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$$

Решение

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0+1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}.$$

Пример

Пример 25.2. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x}$.

○ Решение: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1} = 1.$ ●

Пример

Пример 25.3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2}$.

○ Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos 6x}{1} = 9. \quad \bullet$$

Пример

Пример 25.4. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

○ Решение:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cdot \cos^2 5x}{\cos^2 3x \cdot 5} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 10x}{1 + \cos 6x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-10 \sin 10x}{-6 \sin 6x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10 \cos 10x}{6 \cos 6x} = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

2-й способ:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{2} = t \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi + 3t)}{\operatorname{tg}(\frac{5}{2}\pi + 5t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 3t}{\operatorname{ctg} 5t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5t}{\operatorname{tg} 3t} = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Замечание 1

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Замечание 2

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$$

Решение

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x\right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4 + x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

Пример

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

Решение

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \quad g'(x) = 1 - \cos x;$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; \quad g''(x) = \sin x;$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталя еще раз.

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}; \quad g'''(x) = \cos x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2;$$

Замечание 3

Неопределенности вида 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \rightarrow a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

Пример

Найти предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$$

Решение

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.

Тогда
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0; \quad .$$

Следовательно
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln y = \ln \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1$$

Пример

Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$$

Решение

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x};$$

правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = 2; \quad g'(x) = 4e^{2x};$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}$; - получили неопределенность. Применяем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

&12. Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b) , причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство.

1) Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тогда:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x) > 0$ для любых точек x_1 и x_2 , принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1 < x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

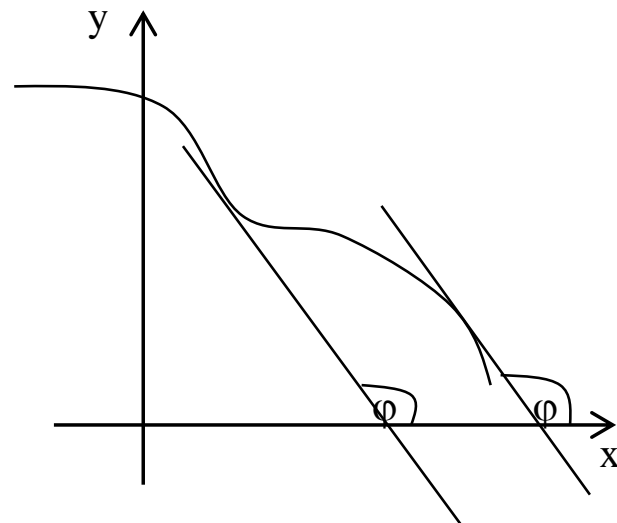
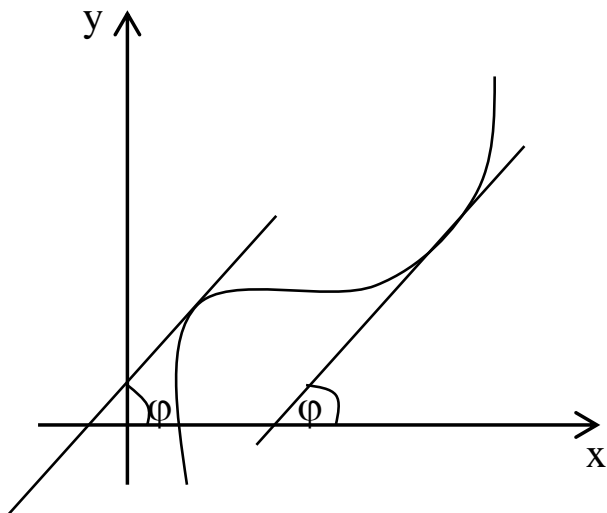
По условию $f'(\varepsilon) > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b) , то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) .

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Пример 25.8. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на возрастание и убывание.

○ Решение: Функция определена на $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$. Ее производная равна:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1);$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty);$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (-1; 1).$$

Ответ: данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$; убывает на интервале $(-1; 1)$. ●

Точки экстремума.

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1 . Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке — это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

необходимое условие существования экстремума

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ максимум. Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x < 0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \rightarrow 0$, но $\Delta x > 0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция $f(x)$ имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Следствие.

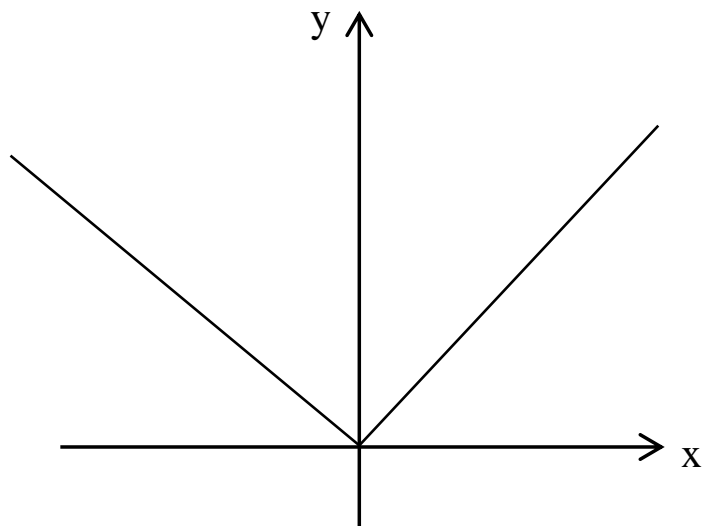
Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Замечание

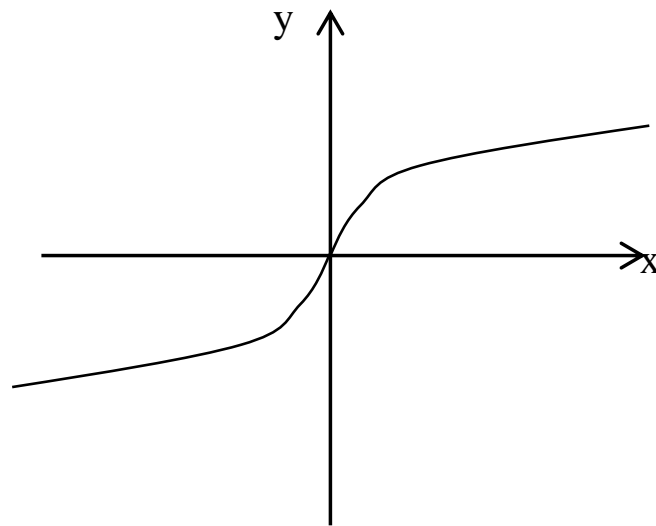
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



В точке $x = 0$ функция имеет минимум, но не имеет производной.

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке $x = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Достаточные условия существования экстремума

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , который содержит критическую точку x_1 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+” - то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1 \end{cases}$$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon) > 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon) < 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1 , т.е. x_1 — точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

Пример

Пример 25.9. Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

○ Решение: Очевидно, $D(y) = \mathbb{R}$. Находим $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, т. е. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна нулю при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 8)$, $(8; \infty)$. Отметим на рисунке 151 знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.

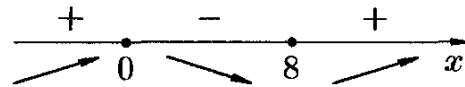


Рис. 151

Следовательно, $x_1 = 0$ — точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$, и $x_2 = 8$ — точка минимума, $y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$. ●

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1 .

Теорема. Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1) < 0$ и минимум, если $f''(x_1) > 0$.

Доказательство.

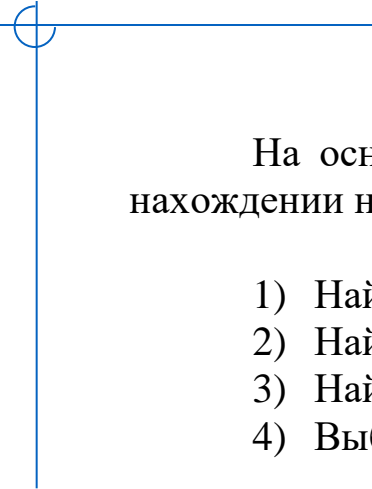
Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1) < 0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1 .

Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1 , но $f'(x_1) = 0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x < x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-”, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции



На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

- 1) Найти критические точки функции.
- 2) Найти значения функции в критических точках.
- 3) Найти значения функции на концах отрезка.
- 4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Пример

Пример 25.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

○ Решение: Находим критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1);$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = 0 \in [-2; 1]$ и при $x_2 = -1 \in [-2; 1]$. Находим $f(0) = 1$, $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$, $f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17$, $f(1) = 8$. Итак, $f_{\text{нб}} = 17$ в точке $x = -2$, $f_{\text{нм}} = 0$ в точке $x = -1$.

Замечание

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин.

Практические задачи: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами, задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли и другие задачи, связанные с поиском оптимального решения, приводят к развитию и усовершенствованию методов отыскания наибольших и наименьших значений. Решением таких задач занимается особая ветвь математики — линейное программирование.

Рассмотрим более простую задачу.

Пример

Пример 25.11. Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы его размеры?

○ Решение: Обозначим через x и y высоту и диаметр цилиндра. Тогда, как видно из рисунка 153, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, а потому объем цилиндра

$$V = V(x) = \pi \left(\frac{4R^2 - x^2}{4} \right) x = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4},$$

где $x \in [0; 2R]$.

Находим наибольшее значение функции $V = V(x)$ на промежутке $[0; 2R]$. Так как $V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2$, то $V'(x) = 0$ при $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, кроме того, $V''(x) = -\frac{3}{2}\pi x < 0$. Поэтому $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ — точка максимума. Так как функция имеет одну критическую точку, то цилиндр будет иметь наибольший объем (равный V_{\max}) при $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$; диаметр основания цилиндра равен

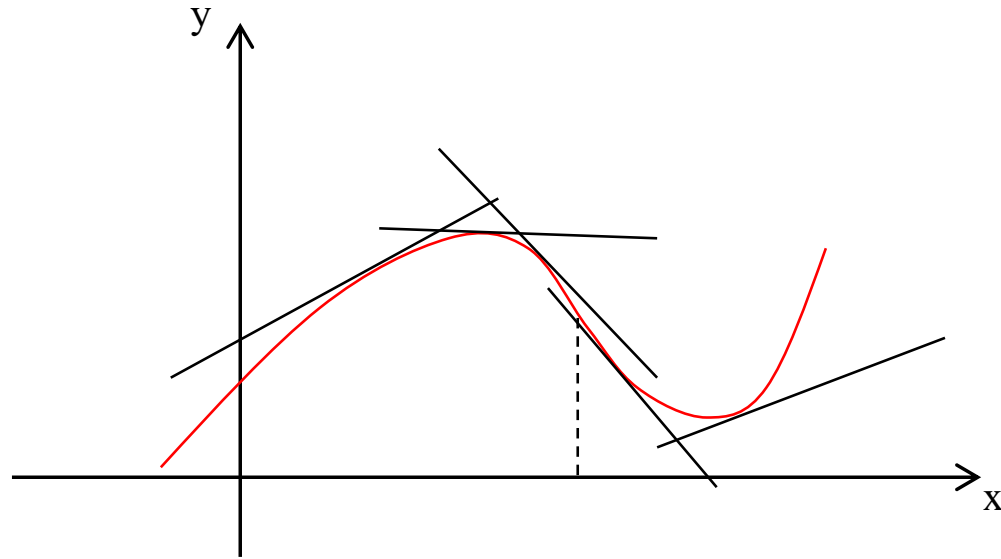
$$\sqrt{4R^2 - (2R\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Таким образом, искомый цилиндр имеет высоту, равную $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, и диаметр, равный $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

Выпуклость и вогнутость кривой.

Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b) , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: $y = f(x)$;

Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \bar{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b) , то кривая $y = f(x)$ вогнута на интервале (a, b) .

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ – точка перегиба.

1) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба.

Теорема доказана.

Пример

Пример 25.12. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

○ Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1$, $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Отмечаем, что $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty; 0)$ — выпуклый вверх, в интервале $(0; \infty)$ — выпуклый вниз. Точка $(0; 5)$ есть точка перегиба. ●



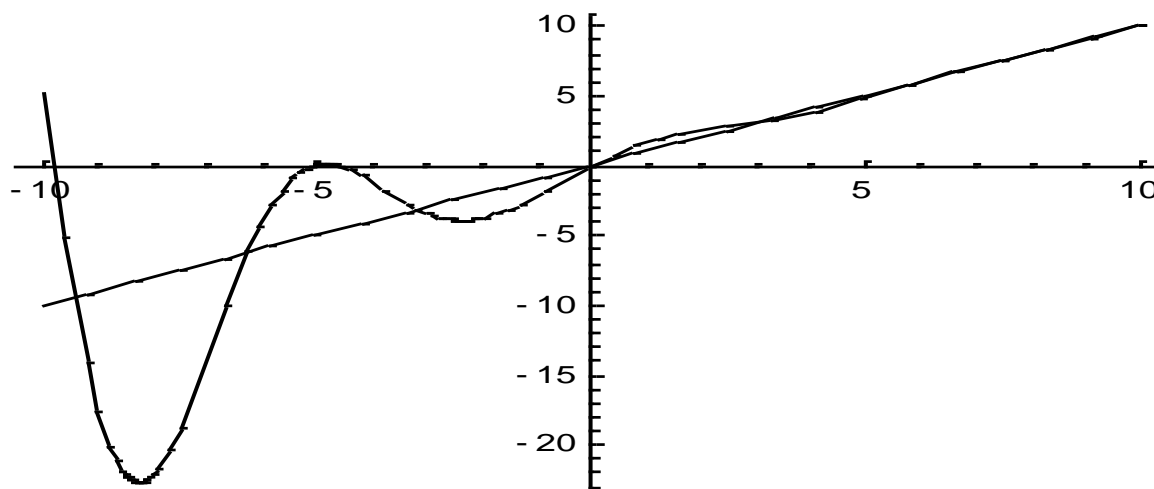
Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.



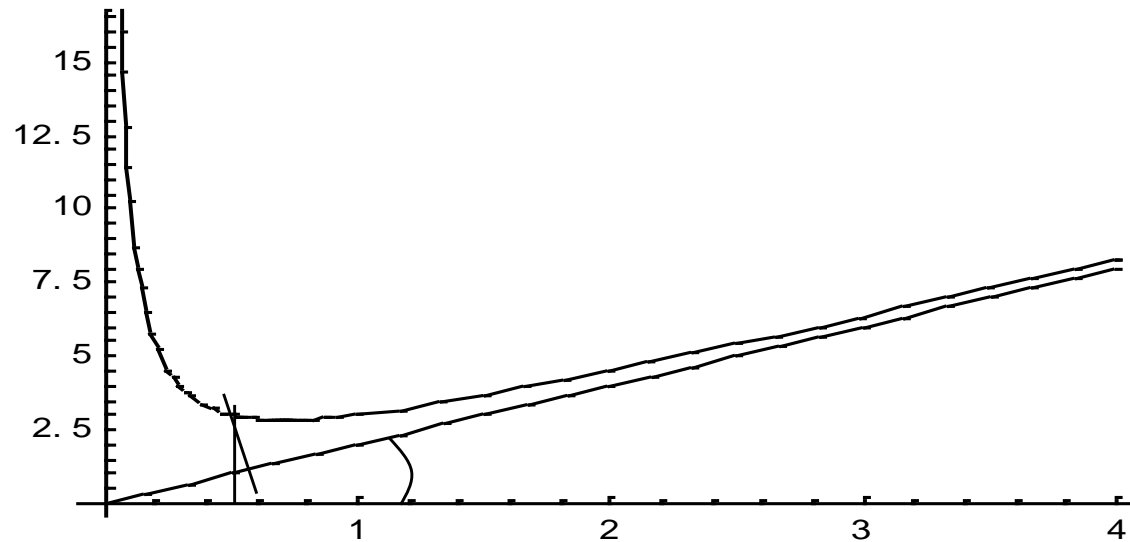
Вертикальные асимптоты.

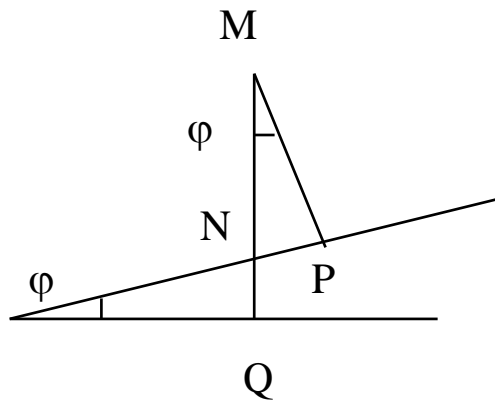
Из определения асимптоты следует, что если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ – асимптота кривой $y = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = \frac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M , P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ . Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N .

Тогда $MQ = y$ – ордината точки кривой, $NQ = \bar{y}$ – ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \frac{|MP|}{\cos \varphi}$.

Угол φ – постоянный и не равный 90^0 , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| \cos \varphi = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| = 0$$

$$|NM| = ||MQ| - |QN|| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b .

В полученном выражении выносим за скобки x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

$$\text{Т.к. } x \rightarrow \infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0, \text{ т.к. } b = \text{const}, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k = k.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0, \text{ следовательно,}$$

$$\boxed{k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}}. \quad (12)$$

$$\text{Т.к. } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] - \lim_{x \rightarrow \infty} b = 0, \text{ следовательно,}$$

$$\boxed{b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]} \quad (13)$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

Пример

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow 0-0$: $y \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 0+0$, следовательно, $x = 0$ -вертикальная асимптота.

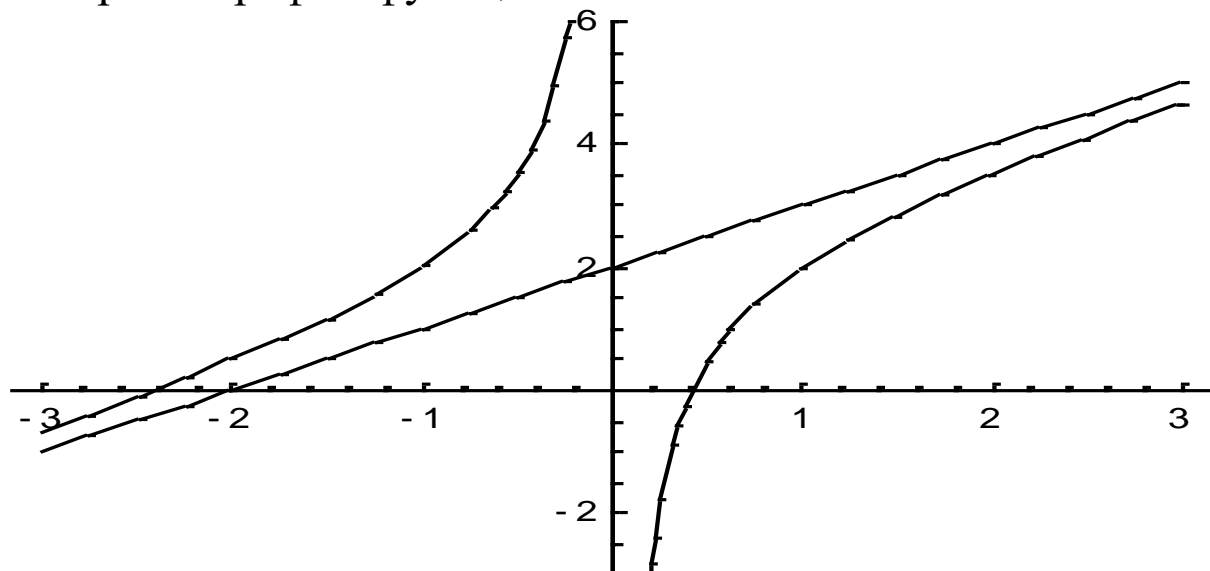
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



Пример

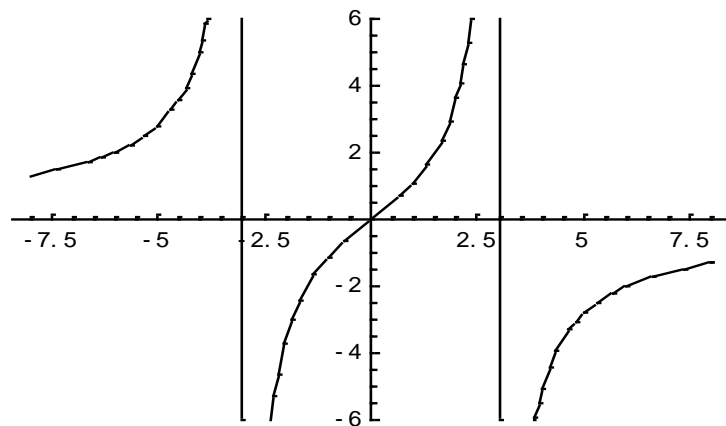
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

$y = 0$ – горизонтальная асимптота.



Пример

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

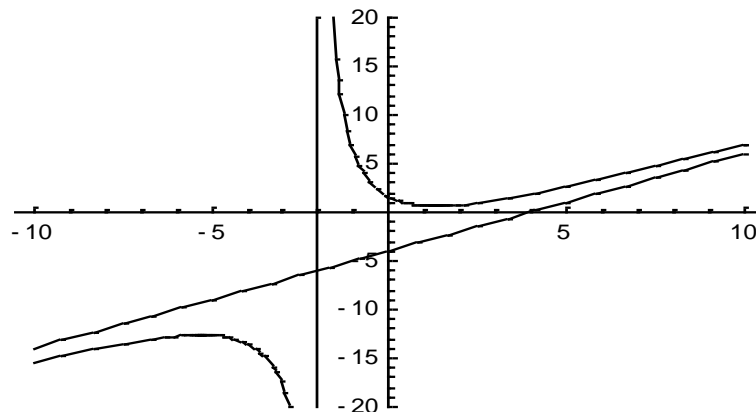
Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой.



&13. Схема исследования графика функции.

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

- 1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

- 2) Точки разрыва. (Если они имеются).

- 3) Интервалы возрастания и убывания.

- 4) Точки максимума и минимума.

- 5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.

- 6) Области выпуклости и вогнутости.

- 7) Точки перегиба. (Если они имеются).

- 8) Асимптоты. (Если они имеются).

- 9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает
 $-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает
 $-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает
 $0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает
 $1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает
 $\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

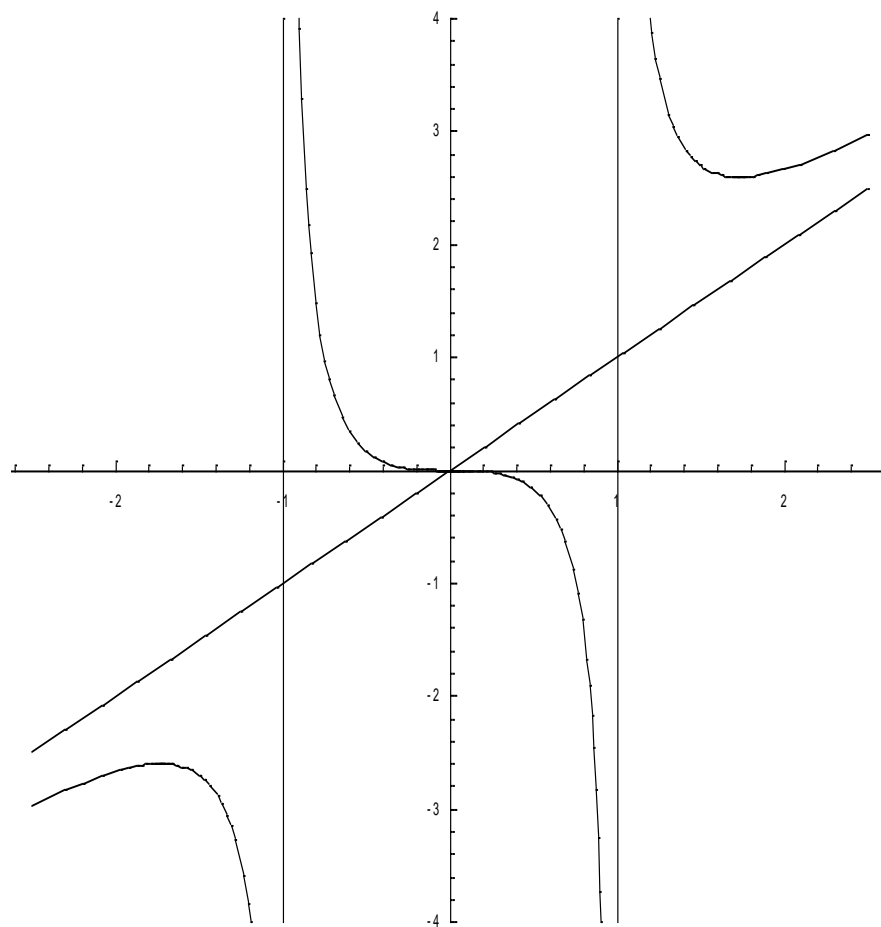
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты — $y = x$.

Построим *график* функции:



Заключение 1

Правила дифференцирования

Пусть $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$

Заключение 2

Производные основных элементарных функций.

$$1) C' = 0;$$

$$2) (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Заключение 3

1	$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	<i>Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента.</i>
2	$g'(x), x'(t), \frac{dy}{dx}, \frac{dt}{dx}$ и др.	Обозначения производной функции.
3	$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ f'''(x) &= (f''(x))' \\ f^{IV}(x) &= (f'''(x))' \\ f^V(x) &= (f^{IV}(x))' \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)}(x))' \end{aligned}$	Понятие и обозначение n-й производной функции.

Заключение 4

4	$v = s'(t)$ $a = s''(t)$	Физический смысл производной. <i>v-мгновенная скорость (скорость изменения), a – ускорение.</i>
---	-----------------------------	---

5	$k = f'(x_0)$	Геометрический смысл производной. <i>k-угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.</i>
---	---------------	---

6	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$	Уравнение касательной к функции в точке $x = x_0$.
---	------------------------------	--

7	$dy = f'(x)dx$	Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.
---	----------------	---

Заключение 5

8	Определение производной функции в точке x_0	<u>Правило 1</u> 1. $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x);$ 2. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$ 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$ 4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$ 5. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
9	Уравнение касательной к функции в точке x_0	<u>Правило 2</u> 1. Найти $y' = f'(x)$ -? 2. Найти $k = f'(x_0)$ -? 3. Найти $y_0 = f(x_0)$ -? 4. Подставить в формуле $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Заключение 6

10	<p>Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$</p>	<p><u>Правило 3</u></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Найти $y' = f'(x)$-? 2. $f'(x) = 0$. Найти точки возможного экстремума. Пусть x_1, x_2 - точки возможного экстремума. 3. Определить принадлежат ли точки возможного экстремума в указанном отрезке. Пусть x_2 не лежит на отрезке $[a, b]$. 4. Найти $f(a), f(b), f(x_1)$ - ? 5. Определить $f_{\text{наим}}, f_{\text{наиб}}$-?
11	<p>Дифференцирование функции, заданной параметрически</p> <p>$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$</p>	<p>$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ первая производная функции;</p> <p>$y''_{xx} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$ вторая производная функции</p>

Заключение 7

12	Особый случай дифференцирования	<p><u>Правило 4</u></p> <ol style="list-style-type: none">1. Обе части выражения логарифмируем; применяем свойства степени в логарифме.2. Обе части выражения дифференцируем; y рассматриваем как сложную функцию;3. Из полученного выражения выражаем y'-? Вместо y подставляем условие задачи.
13	Дифференцирование неявной функции $F(x, y)=0$	<p><u>Правило 5</u></p> <ol style="list-style-type: none">1. Дифференцируем обе части выражения;2. y рассматриваем как сложную функцию;3. Из полученного выражения выражаем y'-?

Заключение 8

14	Задачи на наибольшее и наименьшее значения	<p><u>Правило 6</u></p> <ol style="list-style-type: none">1. Из условия задачи составляем функцию $y = f(x)$;2. Полученную функцию дифференцируем $y' = f'(x)$;3. $f'(x) = 0$. Найти точки возможного экстремума. Пусть x_1 - точка возможного экстремума.4. Найти $y'' = f''(x)$-?5. Найти $f''(x_1)$-?6. Если $f''(x_1) > 0$, то x_1 — точка минимума; если $f''(x_1) < 0$, то x_1 — точка максимума.
----	---	--

Заключение 9

15	Схема исследования и построения графика функции $y = f(x)$	<u>Правило 7</u> <ol style="list-style-type: none">1. Найти область определения функции;2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;3. Найти асимптоты;4. Найти точки возможного экстремума;5. Определить интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции;6. Найти точки перегиба функции;7. Построить график функции
----	--	--

Заключение 10

16	Асимптоты функции	<ol style="list-style-type: none">1. Вертикальные асимптоты. Пусть $x \neq a$, $x \neq b$2. Наклонные асимптоты: $y=kx+b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$3. Горизонтальная асимптота, при $k=0$.
17	Экстремум функции	<p><u>Правило 8</u></p> <ol style="list-style-type: none">1. Найти $y' = f'(x)$-?2. Найти точки возможного экстремума $f'(x) = 0$. Пусть x_1, x_2 - точки возможного экстремума.3. Составить ось Ox. Указать x_1, x_2 и точки вертикальных асимптот.4. Определить знак производной функции на промежутках.5. Если знак меняется с «-» на «+», то x_1 - точка минимума. Если знак меняется с «+» на «-», то x_2 — точка максимума.

Заключение 11

18	Точка перегиба функции	<p><u>Правило 9</u></p> <ol style="list-style-type: none">1. Найти $y'' = f''(x)$-?2. Найти $f''(x) = 0$. Пусть x_1, x_2 – критические точки.3. На промежутках проверяем знак второй производной.4. Если знак меняется с «-» на «+», или с «+» на «-», то x_1 - точка перегиба. В знаке «+» - вогнута вниз, «-» - вогнута вверх.
----	------------------------	--



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!