

# **Раздел. Математический анализ**

## **Глава II. Интегральное исчисление функций одной переменной**

---

### **Тема 1. Неопределенный интеграл**

# Содержание лекции:

---

1. Первообразная и неопределенный интеграл
  2. Основные свойства неопределенного интеграла
  3. Таблица неопределенных интегралов
  4. Метод непосредственного интегрирования
-

# &1. Первообразная и неопределенный интеграл

---

**Определение 1.** Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если во всех точках этого отрезка выполняется условие  $F'(x) = f(x)$  (1)

---

# Примеры 1, 2.

---

1) Найти первообразную для функции  $f(x) = x^2$ . Ответ  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ , т.к.

$$F'(x) = \left( \frac{x^3}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

2) Найти первообразную для функции  $f(x) = \cos x$ . Ответ  $F(x) = \sin x$ , т.к.

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

---

# Примеры 3.

---

Если  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  - первообразная для функции  $f(x) = x^2$ , то функция

$F(x) = \frac{x^3}{3} + 5$  также является первообразной для функции  $f(x) = x^2$ , т.к.  $\left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = x^2$ ,

$F(x) = \frac{x^3}{3} + \sqrt{2}$ , т.к.  $\left(\frac{x^3}{3} + \sqrt{2}\right)' = x^2$ , ,  $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ , т.к.  $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$ , где  $C$ - const.

Следовательно каждая функция  $f(x)$  имеет бесчисленное множество первообразных  $F(x)$ , которые отличаются друг от друга на произвольную постоянную  $C$ .

---

# ТЕОРЕМА

---

Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  две первообразные для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , то разность между ними равна  $F_1(x) - F_2(x) = C$ .

---

# Доказательство

---

Дано  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  - первообразные. В силу определения 1, о первообразной, мы имеем, что  $F_1'(x) = f(x)$  и  $F_2'(x) = f(x)$ . Тогда продифференцировав обе части равенства  $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$ , получим  $F_1'(x) - F_2'(x) = \varphi'(x)$  или  $f(x) - f(x) = \varphi'(x)$ . То есть  $\varphi'(x) = 0$  и  $\varphi(x) = C$ . Таким образом  $F_1(x) - F_2(x) = C$ , что и требовалось доказать.

---

# Определение 2.

---

Если функция  $F(x)$  есть некоторая первообразная для функции  $f(x)$ , то множество функций  $F(x) = f(x) + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная, называется **неопределенным интегралом** от функции  $f(x)$  и обозначается символом

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad (2)$$

При этом функция  $f(x)$  называется *подынтегральной функцией*,  $f(x)dx$  – *подынтегральным выражением*, а переменная  $x$  – *переменной интегрирования*,  $\int$  – *знак интеграла*,  $dx$  – *дифференциал*, который показывает по какой переменной ведется интегрирование.

---



# Замечания.

---

1) Восстановление функции по ее производной, или, что то же, отыскание неопределенного интеграла, называется *интегрированием*.

2) Интегрирование — операция, обратная дифференцированию.

---

# Примеры 4, 5.

---

$$4) \int ax dx = a \int x dx = a \frac{x^2}{2} + C;$$

$$5) \int x^2 t dt = x^2 \int t dt = x^2 \frac{t^2}{2} + C.$$

---

## &2. Основные свойства неопределенного интеграла

---

$$1. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2. d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$4. \int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

$$5. \int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

---

# Доказательства

---

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции  $(\int f(x)dx)' = f(x)$ .

Доказательство:  $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$ .

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению  $d\int f(x)dx = f(x)dx$ .

Доказательство:  $d(F(x) + C) = (F(x) + C)' dx = (F'(x) + 0)dx = F'(x)dx = f(x)dx$ .

**Замечание.** Дифференциал и интеграл стоящие рядом уничтожают друг друга.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольному постоянному  $\int dF(x) = F(x) + C$  или  $\int F'(x)dx = F(x) + C$ .

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) нескольких функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов от этих функций.

$$\int (f(x) \pm \varphi(x) \pm \dots \pm \psi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx \pm \dots \pm \int \psi(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла  $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ ;

---

# &3. Таблица основных неопределенных интегралов

---

$$1. \int 0 dx = C$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1).$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$9. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$11. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$2. \int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$4. \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$8. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$10. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

---

Все табличные интегралы получаются из определения 1 и 2 (см. &1) и табличных производных.

# Примеры 6

---

Вычислить интеграл  $\int \left( 5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx$

---

# Решение

---

$$\int \left( 5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx =$$
$$= 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

$$= 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln |x| - 4 \operatorname{arctg} x + C.$$

---

## &4. Непосредственное интегрирование

---

**Правило 1.** Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то

1)  $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$ , где  $a, c - const$ ;

2)  $\int f(x \pm b)dx = F(x \pm b) + C$ ,  $a \neq 0$ , где  $b, c - const$ ;

3)  $\int f(ax \pm b)dx = \frac{1}{a}F(ax \pm b) + C$ ,  $a \neq 0$

---



## Примеры 7, 8, 9

---

$$7. \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x + C . \text{ формула (1)}$$

$$8. \int \sin(x + 10) dx = -\cos(x + 10) + C . \text{ формула (2)}$$

$$9. \int \frac{dx}{2x + 3} = \frac{1}{2} \ln|2x + 3| + C \text{ формула (3)}$$

---

## Правило 2.

---

**Подынтегральное  
выражение преобразовать  
так, чтобы получился  
табличный интеграл.**

---

## Пример 10

---

Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ .

# Решение

---

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

---

# Правило 3.

---

Если числитель подынтегрального выражения есть производная знаменателя, то такой интеграл равен натуральному логарифму по абсолютной величине знаменателя

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

# Пример 11

---

Вычислить интеграл  $\int \operatorname{ctg} x dx$ .

---

# Решение

---

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{(\sin x)'}{\cos x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

## **Правило 4.**

---

**Если подынтегральная функция представлена в виде неправильной дроби, т.е. показатель независимой переменной, стоящей в числителе выше или равен показателю независимой переменной стоящей в знаменателе, то прежде чем вычислить такой интеграл надо числитель поделить на знаменатель (выразить целую часть).**

---



## Пример 12

---

Вычислить интеграл  $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ .

# Решение

---

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

---

# **Правило 5. (подведение под знак дифференциала)**

---

Прежде чем использовать тот или иной табличный интеграл, приводим данный интеграл к виду:  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$ , где  $u = \varphi(x)$ . Такого рода преобразование называется подведением под знак дифференциала.

---

**Это правило значительно расширяет таблицу простейших интегралов. Например,**

---

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2); \quad x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1}); \quad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right); \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x); \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x};$$

$$\sin x dx = -d(\cos x); \quad \cos x dx = d(\sin x); \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x);$$

$$\sin 2x dx = d(\sin^2 x) = -d(\cos^2 x); \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x); \quad e^x dx = d(e^x); \quad dx = \frac{1}{a} d(ax+b).$$

---

## Пример 13

---

Вычислить интеграл  $\int \cos 3x \, dx$ .

---

# Решение

---

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

---

## Пример 14

---

Вычислить интеграл  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

---

# Решение

---

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{1/2 d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-1/2 d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2(1-x^2)^{1/2} + C = -(1-x^2)^{1/2} + C.\end{aligned}$$

---



# Вопросы для самоконтроля

---

1. Запишите тему и план лекции. [Слайд 1, 2]
2. Первообразной функцией называется... Привести примеры 1,2. [Слайд 3, 4]
3. Неопределенным интегралом называется...[Слайд 8]
4. Интегрированием называется...[Слайд 9]
5. Запишите примеры 4, 5 [Слайд 10]
6. Запишите свойства неопределенного интеграла. [Слайд 11]
7. Запишите таблицу неопределенного интеграла. [Слайд 13]
8. Привести пример 6. [Слайд 14, 15]
9. Запишите правило 1. Привести примеры 7, 8, 9 [Слайд 17]
10. Запишите правило 2. Привести примеры 10 [Слайд 19, 20]
11. Запишите правило 3. Привести примеры 11 [Слайд 22, 23]
12. Запишите правило 4. Привести примеры 12 [Слайд 25, 26]
13. Запишите правило 5. Привести примеры 13,14 [Слайд 29, 30, 31, 32]

# Рекомендуемая литература

---

Основная литература					
№	Автор(ы)	Наименование	Изд-во, год издания	Назначение (учебник, учебное пособие, справочник и т.д.)	Кол-во в библиотеке
1	Баврин И.И.	Высшая математика	М.: Академия 2002	Учебник Гриф МО РФ	ПИ 30 ЯГУ 1
2	Демидович Б.П., Кудрявцев Л.Д.	Краткий курс высшей математики	М.: АСТ, 2005.	Учебник/уч. пос. для вузов	ПИ 1 ЯГУ 18
3	Натансон И.П.	Краткий курс высшей математики	СПб.: Лань, 2001	Учебник	
4	Шипачев В.С.	Высшая математика	М.: Высшая школа, 2006	Учебник Гриф МО РФ	ПИ 17 ЯГУ 60

---

# Рекомендуемая литература

---

Дополнительная литература					
5	Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Е.Я	Высшая математика в упражнениях и задачах. В двух частях	М.: Оникс 21 век, 2005.	Учебное пособие	ПИ 19 ЯГУ 5
6	Брычков Ю.А. и др.	Таблицы неопределенных интегралов	М.: Физматли т2003.	Справочник	
7	Мастихин А.В.	Сборник основных формул по математическом у анализу	М.: АСТ, 2007.	Справочник	

---

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**

---