Тема 2.
ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Составила: М.П. Филиппова
доцент кафедры высшей математики ИМИ СВФУ

План лекции

§1. Непосредственное интегрирование (*подведение под знак дифференциала*).

§2. Метод интегрирования подстановкой (*заменой переменной*)

§3. Метод интегрирования по частям.

§1. Непосредственное интегрирование

(*подведение под знак дифференциала*).

Прежде чем использовать тот или иной табличный интеграл, приводим данный интеграл к виду:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{dx} = \int f(u)\mathrm{du}, \quad \text{где} \quad u = \varphi(x)} \quad \mathbf{(1)}$$

Такого рода преобразование называется ***<u>подведением под знак дифференциала.</u>***

Замечание:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b), \quad 2xdx = d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x) \quad \text{и} \quad \text{т.д.}$$

Вообще, $f'(u)\,du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры 1-12

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$

2) $\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx -$

$- \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$

5) $\int \sin^2 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 12x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,dx =$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,d(12x)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$

$$6)\ \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)(x+2)}\,dx =$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x-1)(x+2)}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x-1)(x+2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = -\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C;$$

$$7)\ \int \operatorname{tg} u\,du = \int \frac{\sin u\,du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$$

$$8)\ \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2} + \sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \frac{\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du +$$

$$+\int \frac{\sin^2\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\,du = \int \operatorname{ctg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) + \int \operatorname{tg}\frac{u}{2}\,d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| -$$

$$-\ln\left|\cos\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$$

$$9)\ \int x(x+2)^9\,dx = \int (x+2-2)(x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,dx -$$
$$-2\int (x+2)^9\,dx = \int (x+2)^{10}\,d(x+2) - 2\int (x+2)^9\,d(x+2) =$$
$$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2\frac{(x+2)^{10}}{10} + C$$

$$10)\ \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x \cdot \sin^2 x} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-5}\,d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg}^{-4} x}{-4} + C = \frac{1}{4\operatorname{ctg}^4 x} + C$$

$$11)\ \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+(x-1)^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(x-1)^2}} =$$

$$= \ln\left|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}\,\right| + C$$

$$12)\ \int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right) dx = 4\int x^3\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} -$$
$$-\int 3^{1-x}\,d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2}\operatorname{tg} 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$$

Как видно, вычисление интегралов иногда требует некоторой изобретательности, так сказать, «индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции».

Соответствующие навыки приобретаются в результате значительного числа упражнений.

§2. Метод интегрирования подстановкой (*заменой переменной*)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx=\varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.} \quad \textbf{(2)}$$

Замечание_2

Формула **(2)** также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами,

формулу **(2)** можно применять справа налево.

Пример_13

Найти $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx.$

- Решение: Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4\,dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^t\,dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

Пример_14

Найти $\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx$.

- Решение: Пусть $\sqrt{x-3}=t$, тогда $x=t^2+3$, $dx=2t\,dt$. Поэтому

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^2+3)\cdot t\cdot 2t\,dt=$$

$$=2\int(t^4+3t^2)\,dt=2\int t^4\,dt+6\int t^2\,dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+C=$$

$$=\frac{2}{5}(x-3)^{5/2}+2(x-3)^{3/2}+C. \quad \bullet$$

Пример_15

Найти $\int x \cdot (x+2)^{100}\, dx$.

- Решение: Пусть $x+2=t$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$. Имеем:

$$\int x \cdot (x+2)^{100}\, dx = \int (t-2) \cdot t^{100}\, dt = \int t^{101}\, dt - 2\int t^{100}\, dt =$$

$$= \frac{t^{102}}{102} - 2 \cdot \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C. \quad \bullet$$

Пример_16

Найти $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

Решение: Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})^2 - (t+\frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Здесь используется формула 16 таблицы основных интегралов. ●

Пример_17

Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

- **Решение:**

Сделаем замену *t = sinx*, *dt = cosxdt*.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

§3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.} \qquad (3)$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Замечание_3

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример_18

Найти $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$.

❍ Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int (2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad ●$$

Пример_19

Найти $\int \ln x\, dx$.

Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array} \right]$. Поэтому

$$\int \ln x\, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

Пример_20

Найти $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = \operatorname{arctg} x & \Longrightarrow & du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример_21

Найти $\int x^2 e^x\,dx$.

- Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lll} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int e^x \cdot x\,dx.$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x\,dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x\,dx \Longrightarrow du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x \cdot x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Поэтому

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2(x \cdot e^x - e^x + C).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите тему и план лекции
2. Запишите формулу (1), которая называется…
3. Запишите замечание
4. Привести примеры 1, 2, 4, 7, 12
5. Запишите формулу (2), которая называется…
6. Запишите замечание_2
7. Привести примеры 13, 14, 15, 16, 17
8. Запишите формулу (3), которая называется…
9. Запишите замечание_3
10. Привести примеры 18, 19, 20, 21

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!