Глава 2.
Определенный интеграл

Тема 1. Основные понятия. Формула Ньютона-Лейбница

Составитель: Филиппова М.П., доцент кафедры высшей математики ИМИ СВФУ

Содержание лекции

&1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.

&2. Геометрический смысл определенного интеграла.

&3. Свойства определенного интеграла.

&4. Теорема о среднем.

&5. Формула Ньютона-Лейбница.

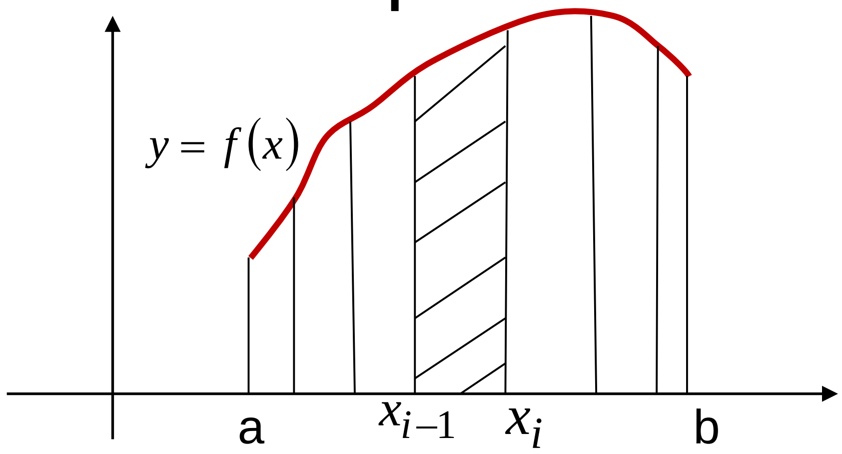
&6. Замена переменной в определенном интеграле.

&7. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

&1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ох.Такую фигуру называют криволинейной трапецией



Решение

Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$.
При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Заменим каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1,2,\ldots,n$ и высотой $h = f\left(\overline{x_i}\right)$, где $\overline{x_i}$ -произвольно выбранная внутри отрезка $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ точка.

Решение

Площадь прямоугольника будет равна $\Delta S_i = f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, а площадь всей криволинейной фигуры приблизительно будет равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i \ .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Определение.

Выражение $\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется

интегральной суммой функции $f\left(x\right)$

на отрезке $\left[a,b\right]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Определение.

Если существует конечный $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

&2. Геометрический смысл определенного интеграла.

Замечание.

С геометрической точки зрения при $f(x) \geq 0$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции

Теорема о существовании определенного интеграла

Теорема.

Если функция $f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$

существует и конечен, т.е.

существует и конечен $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$.

&3. Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

5. $\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$;

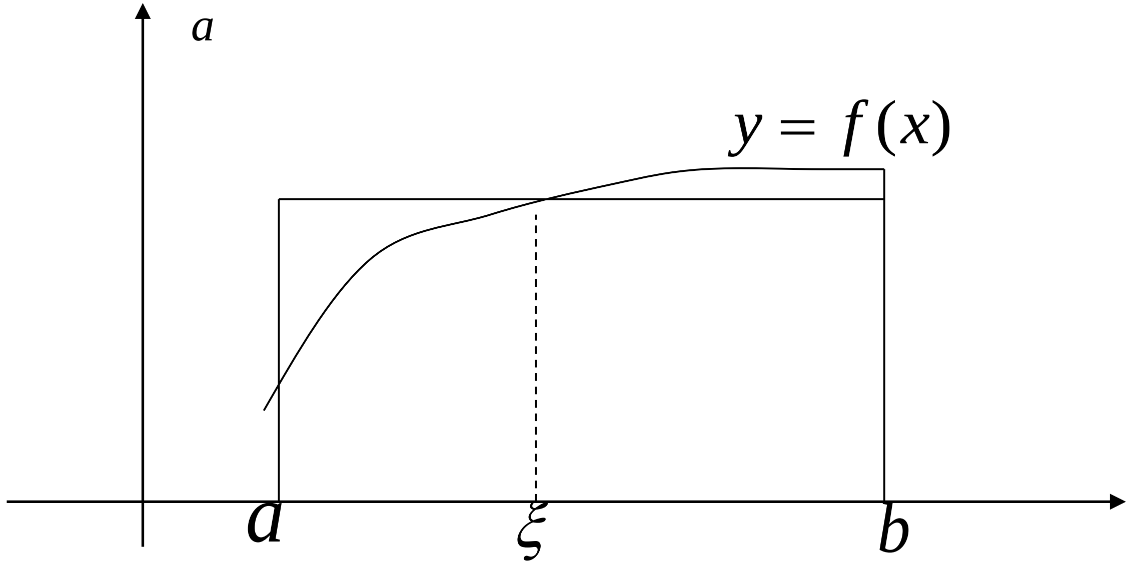
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

&4. Теорема о среднем.

Теорема о среднем

Если функция непрерывна на $[a,b]$,то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$



&5. Формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема.

Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

Пример 1

Вычислить $\int\limits_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$.

$$\int\limits_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx=\int\limits_0^3 e^{-\frac{1}{3}\cdot x}dx=-3e^{-\frac{1}{3}\cdot x}\Bigg|_0^3=-3\left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 3}-e^{-\frac{1}{3}\cdot 0}\right)=$$

$$=-3\left(e^{-1}-1\right)=-3\left(\frac{1}{e}-1\right)=-3\frac{1-e}{e}$$

&6. Замена переменной в определенном интеграле.

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Пример 2

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1, dx = 2tdt \\ x = 0, t = 1 \\ x = 3, t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt =$$

$$= \int_1^2 2\left(t^2 - 1\right)dt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = 2\left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right) = 2\left(\frac{7}{3} - 1\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

&7. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле).

Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\ .$$

Пример 3

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} =$$

$$= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Рефлексия деятельности

1. Тема лекции называется...
2. Содержание лекции состоит…
3. Определенным интегралом называется… *(см. определение 2, слайд 8)*
4. Под геометрическим смыслом определенного интеграла понимают... *(см. слайд 10)*
5. К свойствам определенного интеграла относятся…*(см. слайд 13)*
6. Формулой Ньютона-Лейбница называют…*(см. слайд 17). Привести пример 1.*
7. Теорема замены переменной в определенном интеграле заключается... *(см. слайд 20). Привести пример 2.*
8. Теорема интегрирования по частям в определенном интеграле заключается... *(см. слайд 23). Привести пример 3.*

Задачи для самоконтроля

Вычислить:

1) $\int_{3}^{4}(x-3)^2\,dx$:

2) $\int_{5}^{6}\frac{dx}{x-4}$:

3) $\int_{-1}^{2}\frac{x+1}{x-1}dx$:

литература

1. Шипачев В.С. Математика.
2. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс.
4. http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2013/05/14/prezentatsiya-k-uroku-na-temu-opredelennyy-integral

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!