

Тема 2: Геометрические приложения определенного интеграла

**Составитель: Филиппова М.П., доцент кафедры
высшей математики ИМИ СВФУ**



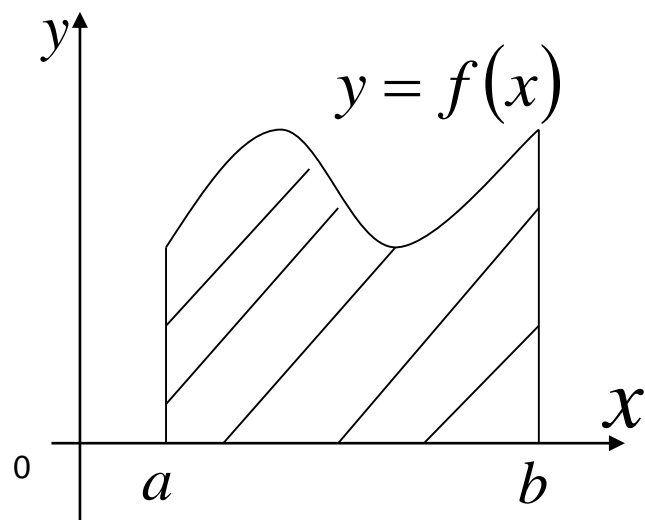
Содержание лекции:

- &1. Вычисление площадей плоских фигур. Прямоугольные координаты.**
- &2. Вычисление площадей плоских фигур. Кривая задана параметрически.**
- &3. Вычисление площадей плоских фигур. Полярные координаты.**
- &4. Вычисление длины дуги плоской кривой. Прямоугольные координаты.**
- &5. Вычисление длины дуги плоской кривой. Кривая задана параметрически.**
- &6. Вычисление длины дуги плоской кривой. Полярные координаты.**
- &7. Вычисление объема тела вращения.**



&1. Вычисление площадей

Прямоугольные координаты



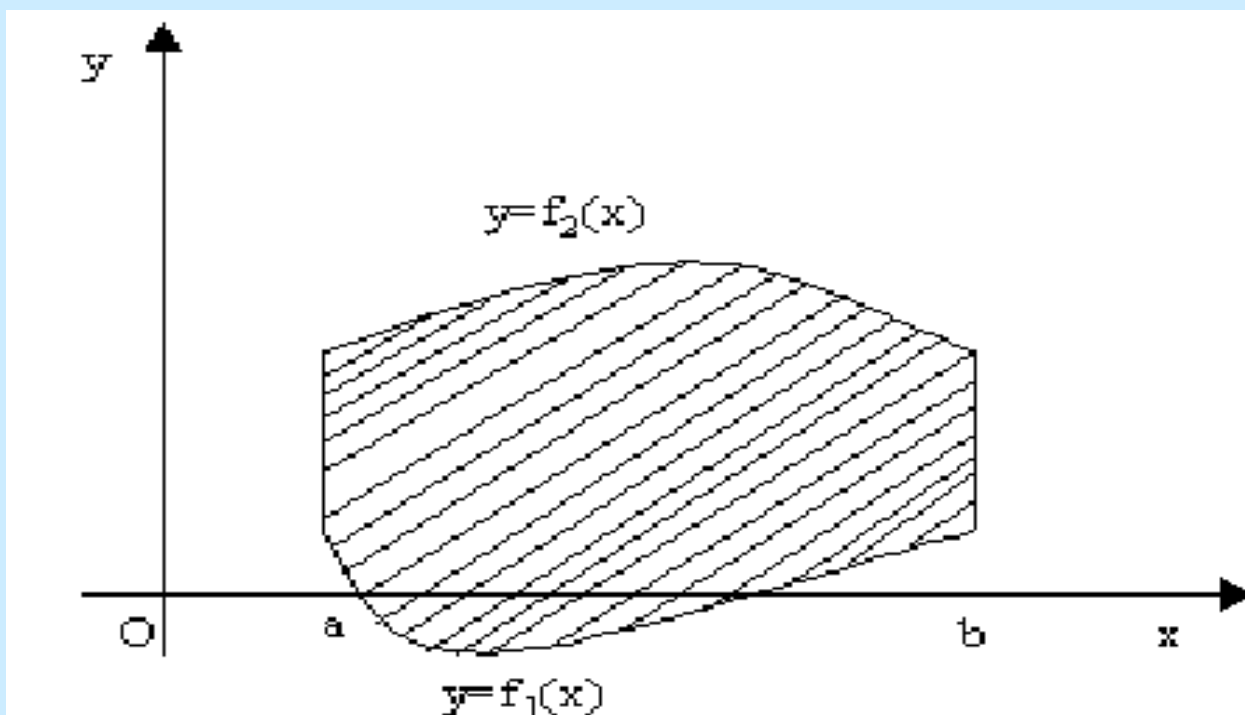
а) Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по

формуле $S = \int_a^b f(x)dx$. (1)



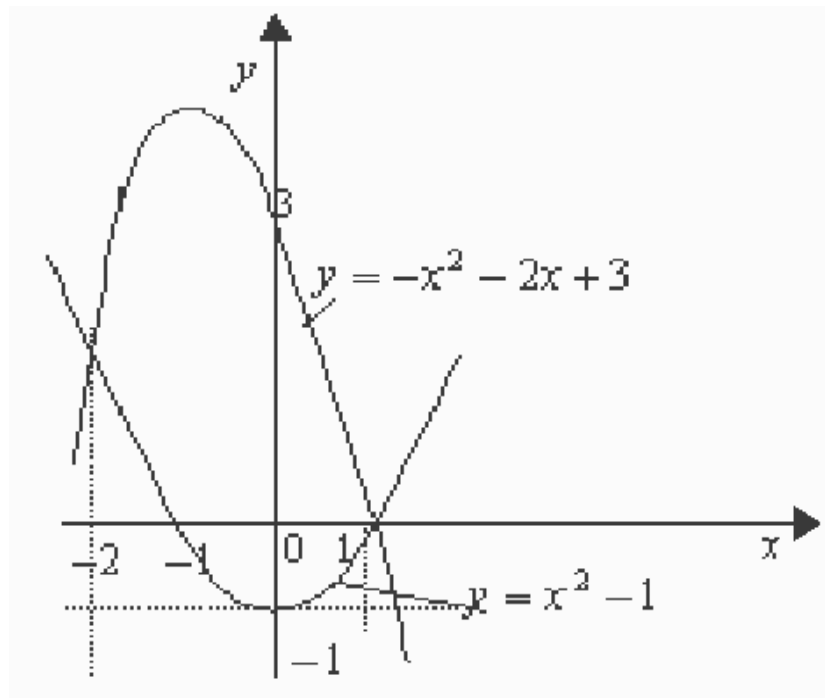
б) Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ и двумя прямыми

$x = a$ и $x = b$ определяется по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ (2)



Пример 1

Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$ и
 $y = x^2 - 1$



Решение

Получим

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx = \\ &= -2 \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = -2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= -2 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 4 \right) \right] = -2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) = \\ &= -2 \left(3 - 8 + \frac{1}{2} \right) = -2 \left(-\frac{9}{2} \right) = 9 \end{aligned}$$



&2. Вычисление площадей

В случае **параметрического задания кривой**, площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, вычисляют по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt, \quad (3)$$

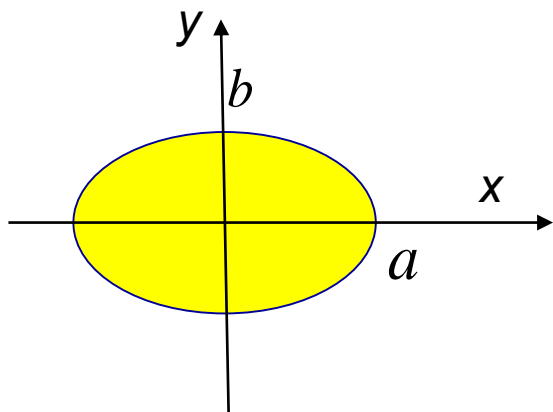
где пределы интегрирования определяют из уравнений $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$.



Пример 2

Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параметрические уравнения эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.



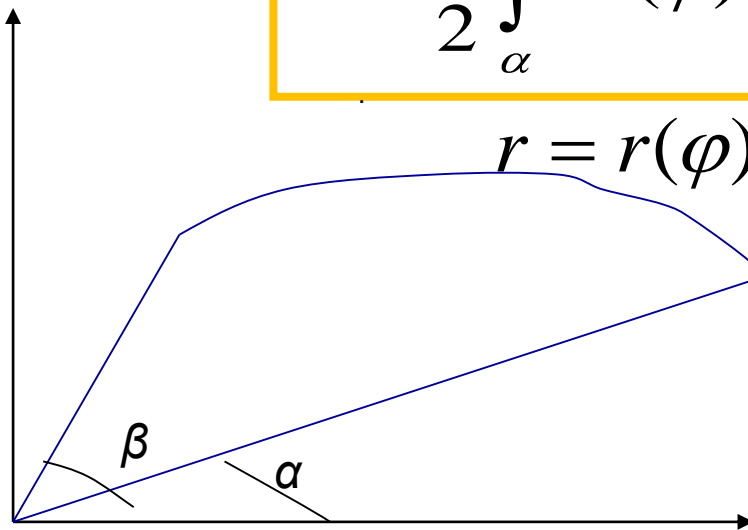
$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} 4ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

&3. Вычисление площадей

Площадь полярного сектора

вычисляют по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \quad (4)$$



Пример 3

Площадь фигуры, ограниченной
лемнискатой Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$
и лежащей вне круга радиуса $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos 2\varphi d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{a^2}{2} d\varphi &= \left(\frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4} a^2 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} = \\ &= \frac{1}{4} a^2 \left(\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{a^2}{8} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \\ S &= \frac{a^2}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

& 4. Длина дуги в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ (5), где a, b —абсциссы начала и конца дуги ($a < b$).

Если кривая задана уравнением

$x = g(y)$, то $l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$ (5'), где c, d —ординаты начала и конца дуги ($c < d$).



Пример 4

Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$ от точки $O(0,0)$ до $B(4,8)$.

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$



&5. Вычисление длины дуги

Если **кривая задана параметрическими** уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то длина ее дуги

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (6),$$

где t_1, t_2 — значения параметра, соответствующие концам дуги .

&6. Длина дуги в полярных координатах

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \quad (7)$$

где α, β –значения полярного угла, соответствующие концам дуги .

&7. Вычисление объема тела вращения.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (8)$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат $c \leq y \leq d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy \quad . \quad (8')$$

Пример 5

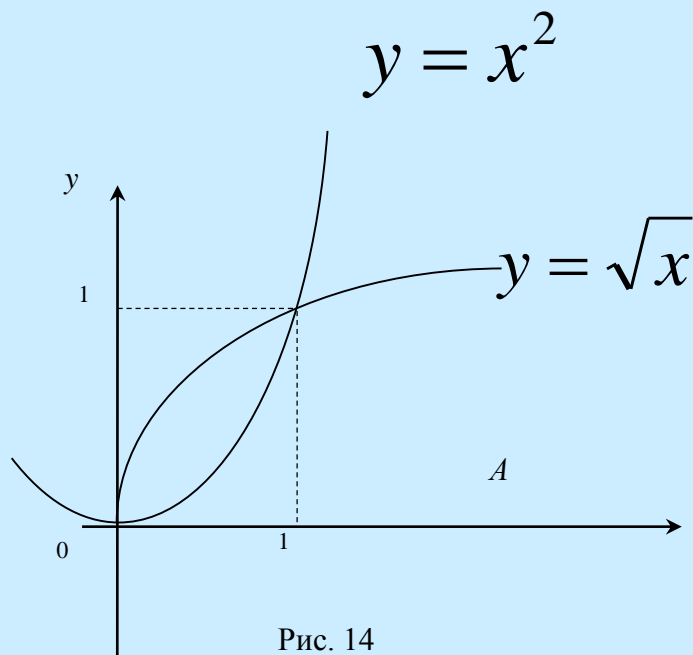


Рис. 14

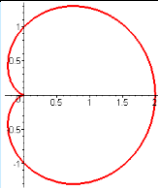
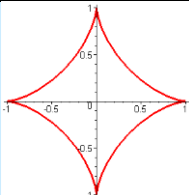
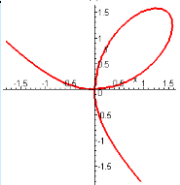
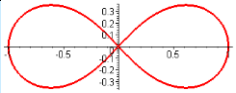
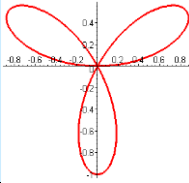
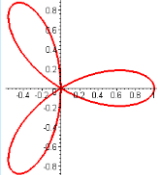
Искомый объем
можно найти как
разность объемов,
полученных
вращением вокруг
оси Ox
криволинейных
трапеций,
ограниченных
линиями $y = \sqrt{x}$ и
 $y = x^2$

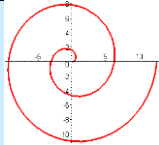
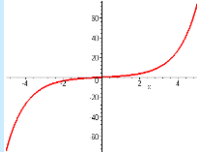
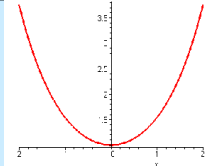
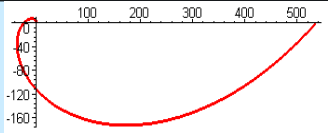
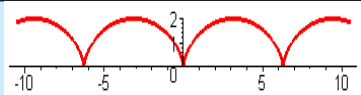
Решение

Тогда

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx =$$
$$= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

Графики плоских алгебраических кривых

Кардиоида	$\rho = (1 + \cos \varphi)$	
Астроида	$x = \cos^3 t$ $y = \sin^3 t$	
Декартов лист	$x^3 + y^3 = 3xy$	
Лемниската Бернулли	$\rho = (\cos 2\varphi)^{1/2}$	
Трехлепестковая роза	$\rho = \sin 3\varphi$	
	$\rho = \cos 3\varphi$	

Спираль Архимеда	$\rho = \varphi$	
Гиперболический синус	$y = sh x$	
Гиперболический косинус	$y = ch x$	
Логарифмическая спираль	$\rho = e^\varphi$	
Циклоида	$x = t - \sin t$ $y = 1 - \cos t$	



Рефлексия деятельности

1. Тема лекции называется...
2. Содержание лекции состоит...
3. Площадь плоской кривой, ограниченной линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ вычисляется по формуле (1)....
4. Площадь плоской кривой, ограниченной линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ вычисляется по формуле (2)...Привести пример 1.
5. Площадь плоской кривой, заданной параметрически вычисляется по формуле (3)...Привести пример 2.
6. Площадь плоской кривой, заданной в полярных координатах вычисляется по формуле (4)...Привести пример 3.
7. Длина дуги в декартовых координатах вычисляется по формуле (5), (5')... Привести пример 4.
8. Длина дуги, заданной параметрически вычисляется по формуле (6)...
9. Длина дуги, заданной в полярных координатах вычисляется по формуле (7)...
10. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле (8)....
11. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат $c \leq y \leq d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле... Привести пример 5.
12. Основными графиками плоских алгебраических кривых являются.... Сделать рис.

Задачи для самоконтроля

Задание 1

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - x$ и осью абсцисс.

Задание 2

Площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$ и прямой $x + y = 1$ вычисляется с помощью интеграла...

Ответы: 1) $\int_0^1 (1 - x^2 - x) dx$ 2) $\int_0^1 (x^2 - 1 + x) dx$ 3) $\int_0^1 (x^2 - x) dx$ 4) $\int_0^1 (x - x^2) dx$.