



# *УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ*

***Раздел. Аналитическая геометрия  
(на плоскости)***

***Тема. Линии первого порядка***

**Составитель: Филиппова М.П., доцент кафедры  
высшей математики ИМИ СВФУ**

# План лекции

1. Уравнение прямой на плоскости
2. Способы задания прямой на плоскости:
  - 2.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом
  - 2.2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении
  - 2.3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
  - 2.4. Уравнение прямой в отрезках
  - 2.5. Общее уравнение прямой
3. Угол между прямыми.
4. Расстояние от точки до прямой

# ***&1. Уравнение прямой на плоскости***

# &1. Уравнение прямой на плоскости

**Определение.** Уравнением линии на плоскости  $XOY$  называется уравнение, которому удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде

$$F(x, y) = 0$$

или

$$y = f(x)$$

## ***&2. Способы задания прямой на плоскости***

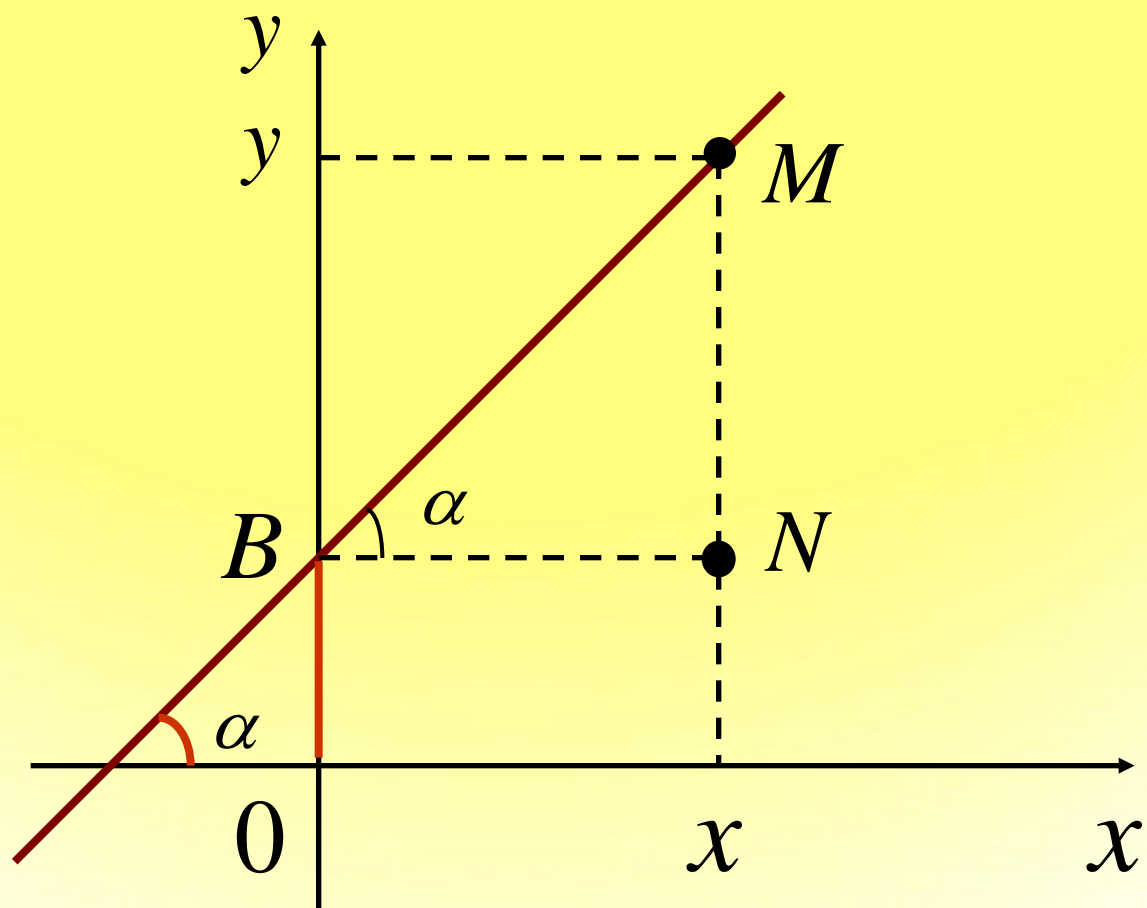
## *2.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

Пусть задана прямая, пересекающая ось  $y$  в точке

В  $(0, b)$  и образующая с осью  $x$  угол  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$


Выберем на прямой произвольную точку  $M(x, y)$ .

*См. рис. (слайд №8)*





Координаты точки N ( $x, y$ ). Из треугольника  $BMN$ :


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y - b}{x} = k$$


$k$  – угловой коэффициент прямой.

$$y = kx + b$$



*Уравнение прямой с  
угловым коэффициентом*


## Рассмотрим частные случаи:

  $b = 0 \Rightarrow y = kx$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.

  $\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow y = b$

- уравнение прямой, параллельной оси  $x$ .

  $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$  - не существует

т.е. у вертикальной прямой нет углового коэффициента.

Уравнение прямой, параллельной оси  $y$ , в этом случае имеет вид

$$x = a$$

где  $a$  – отрезок, отсекаемый прямой на оси  $x$ .

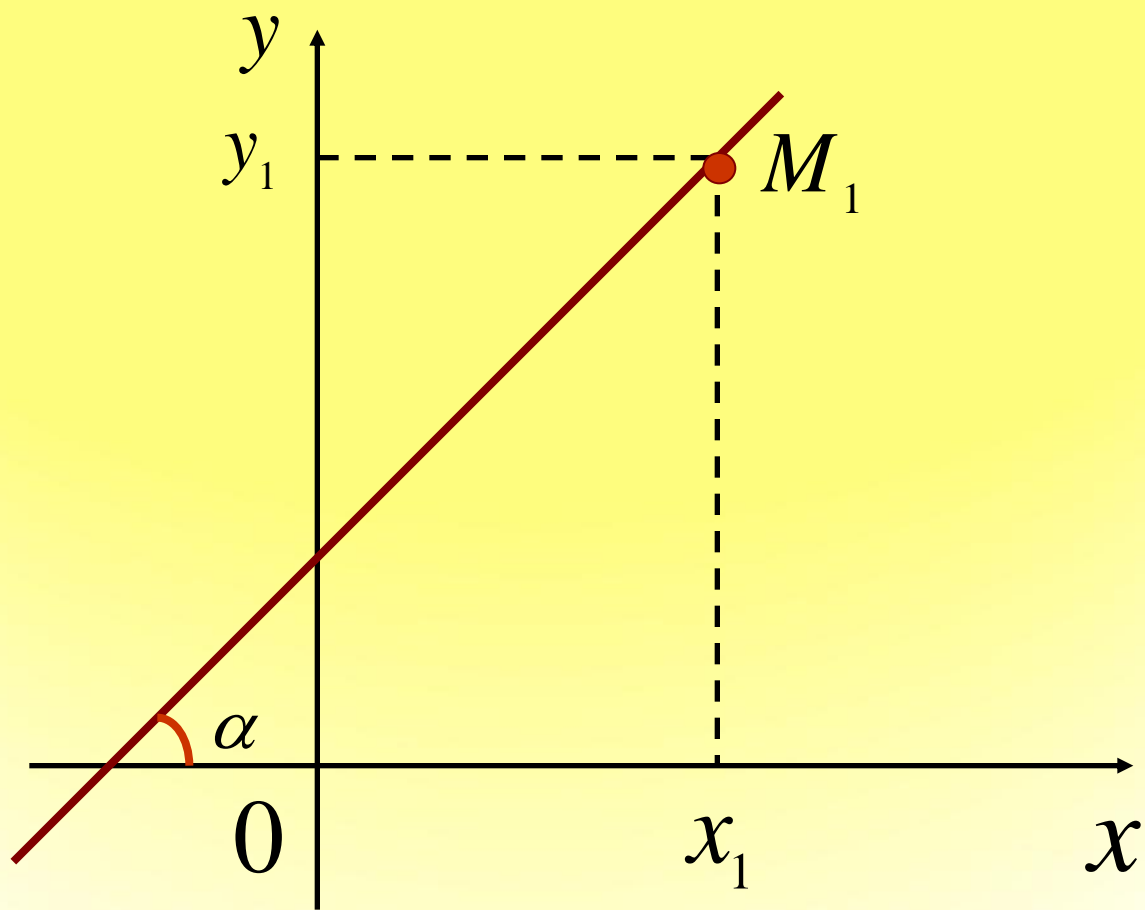
## *2.2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении*

Пусть задана прямая (слайд №13, см. рис.),  
проходящая через заданную точку

$$M_1(x_1, y_1)$$

и образующая с осью  $x$  угол  $\alpha$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$



Т.к. точка  $M_1$  лежит на прямой, ее координаты должны удовлетворять уравнению (1):

$$y_1 = kx_1 + b$$

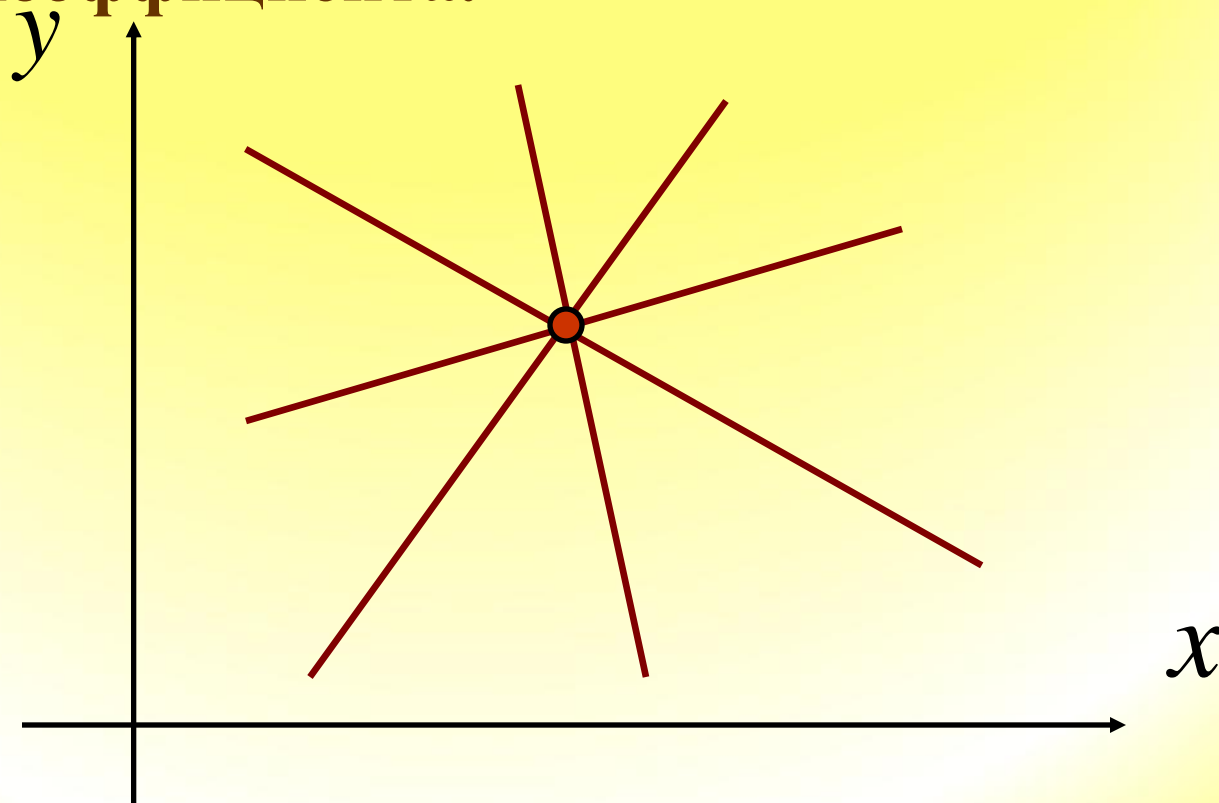
Вычитаем это уравнение из уравнения (1),  
получаем:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

2

*Уравнение прямой,  
проходящей через данную  
точку в данном направлении*

Замечание. Если в этом уравнении угловой коэффициент не определен, то оно задает пучок прямых, проходящих через данную точку, кроме прямой, параллельной оси  $y$ , не имеющей углового коэффициента.



## 2.3. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть задана прямая, проходящая через две точки:

$$M_1(x_1, y_1) \quad M_2(x_2, y_2)$$

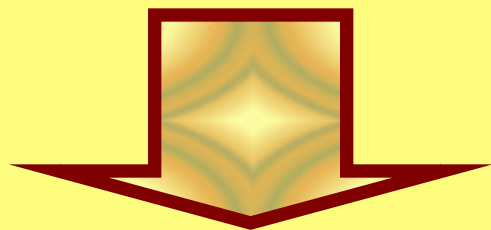
Запишем уравнение пучка прямых, проходящих  
через точку  $M_1$ :

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$



**Т.к. точка  $M_2$  лежит на данной прямой, подставим ее координаты в уравнение пучка прямых:**

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



**Подставляем  $k$  в уравнение пучка прямых. Тем самым мы выделяем из этого пучка прямую, проходящую через две данные точки:**

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

**ИЛИ**

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



*Уравнение прямой,  
проходящей через две точки*

## **ПРИМЕР.**

*Составить уравнение прямой,  
проходящей через точки  
 $A(-5, 4)$  и  $B(3, -2)$ .*

## **РЕШЕНИЕ.**

**Подставляем координаты точек в уравнение прямой, проходящей через две точки.**

$$\frac{y-4}{-2-4} = \frac{x+5}{3+5}$$

$$y-4 = -\frac{6}{8}(x+5)$$



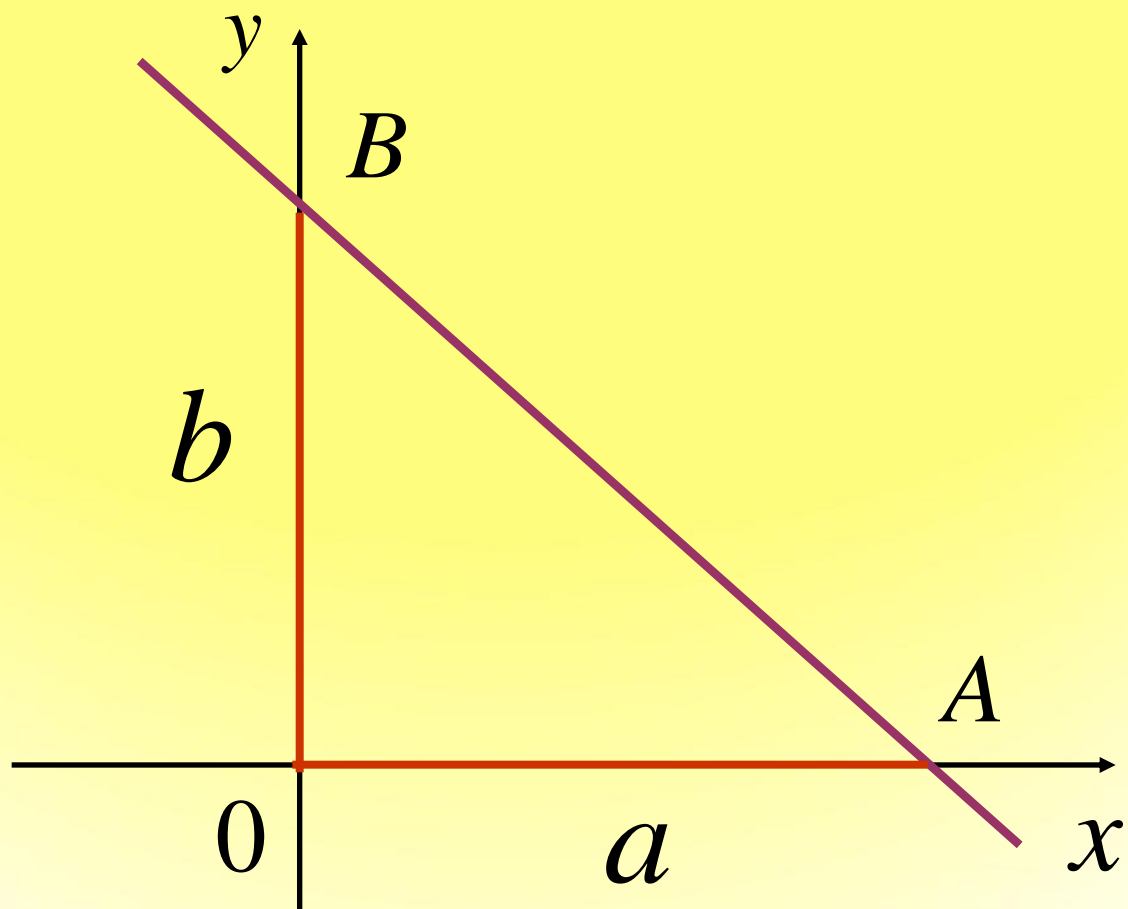
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

## 2.4. Уравнение прямой в отрезках

Пусть задана прямая (слайд №22, см. рис.), отсекающая на осях координат отрезки, равные  $a$  и  $b$ . Это значит, что она проходит через точки

$$A(a,0) \quad B(0,b)$$

Найдем уравнение этой прямой.



Подставим координаты точек А и В в уравнение прямой, проходящей через две точки (3):

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \textcircled{5}$$

*Уравнение прямой  
в отрезках*

## **ПРИМЕР.**

**Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2, -1)$ , если она отсекает от положительной полуоси  $y$  отрезок, вдвое больший, чем на положительной полуоси  $x$ .**



## **РЕШЕНИЕ.**

По условию задачи,  $b = 2a$

Подставляем в уравнение (4):  $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$

Точка  $A(2, -1)$  лежит на этой прямой, следовательно ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

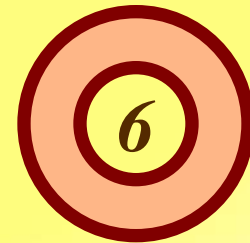
$$\frac{2}{a} + \frac{-1}{2a} = 1$$

$$\frac{-1 + 4}{2a} = 1 \qquad a = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1.5} + \frac{y}{3} = 1$$

## 2.5. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение:

$$Ax + By + C = 0$$



Рассмотрим частные случаи этого уравнения и покажем, что при любых значениях коэффициентов  $A$ ,  $B$  (не равных нулю одновременно) и  $C$ , это уравнение есть уравнение прямой на плоскости.



$$B \neq 0$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Обозначим:

$$-\frac{A}{B} = k \quad -\frac{C}{B} = b$$

Тогда получаем уравнение (1):

$$y = kx + b$$



$$B \neq 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид:  $y = -\frac{A}{B}x$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.



$$B \neq 0 \quad A = 0 \quad C \neq 0$$

Получаем уравнение:  $y = -\frac{C}{B}$

- уравнение прямой, параллельной оси  $x$ .



$$B \neq 0 \quad A = 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид:  $y = 0$   
- уравнение оси  $x$ .



$$B = 0 \quad A \neq 0 \quad C \neq 0$$

Получаем уравнение:  $x = -\frac{C}{A}$

- уравнение прямой, параллельной оси  $y$ .



$$B = 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид:  $x = 0$

- уравнение оси  $y$ .

Таким образом, при любых значениях коэффициентов  $A$ ,  $B$  (не равных нулю одновременно) и  $C$ , уравнение (5) есть уравнение прямой на плоскости.

Следовательно - это *Общее уравнение прямой*

## ***&3. Угол между прямыми***

**Определение.** Если заданы две прямые  $y = k_1x + b_1$ ,  $y = k_2x + b_2$ , то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$$





**Пример.** Определить угол между прямыми:  $y = -3x + 7$ ;  $y = 2x + 1$ .

**Решение:**

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \qquad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4.$$

## Замечания:

Две прямые параллельны, если  $k_1 = k_2$

Две прямые перпендикулярны, если  $k_1 = -1/k_2$

**Пример.** Показать, что прямые  $3x - 5y + 7 = 0$  и  $10x + 6y - 3 = 0$  перпендикулярны.

## **Решение:**

Находим по формуле  $k = -\frac{A}{B}$  :

$$k_1 = 3/5, \quad k_2 = -5/3.$$

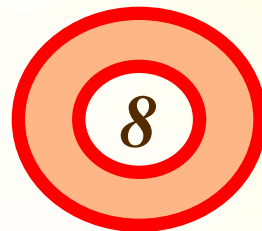
Тогда  $k_1 k_2 = -1$ ,

следовательно, прямые перпендикулярны.

## ***&4. Расстояние от точки до прямой.***

**Теорема.** Если задана точка  $M(x_0, y_0)$ , то расстояние до прямой  $Ax + By + C = 0$  определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



**Доказательство.** Пусть точка  $M_1(x_1, y_1)$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на заданную прямую. Тогда расстояние между точками  $M$  и  $M_1$ :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (1)$$

Координаты  $x_1$  и  $y_1$  могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку  $M_0$  перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2} (Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2} (Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример. Даны вершины треугольника  $A(0; 1)$ ,  $B(6; 5)$ ,  $C(12; -1)$ . Найти уравнение высоты, проведенной из вершины  $C$ .

Находим уравнение стороны  $AB$ :  $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$ ;  $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$ ;  $4x = 6y - 6$ ;

$$2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид:  $Ax + By + C = 0$  или  $y = kx + b$ .

$k = -\frac{3}{2}$ . Тогда  $y = -\frac{3}{2}x + b$ . Т.к. высота проходит через точку  $C$ , то ее координаты

удовлетворяют данному уравнению:  $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$ , откуда  $b = 17$ . Итого:  $y = -\frac{3}{2}x + 17$ .

Ответ:  $3x + 2y - 34 = 0$ .

# Основные формулы

## Раздел. Аналитическая геометрия на плоскости

### Тема 1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

1. Расстояние между двумя точками. Даны  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

2. Площадь треугольника.

Даны три точки, не лежащие на одной прямой  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

3. Деление отрезка в данном отношении

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \text{ где } \lambda = \frac{|M_1 M|}{|M M_2|}$$

Если  $\lambda = 1$ , тогда координаты середины отрезка вычисляются:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



## Тема 2. Линии первого порядка

### §1. Основные понятия

А). Уравнение прямой с угловым коэффициентом:  $y = kx + b$ .

Б). Уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M(x_0, y_0)$  с данным угловым коэффициентом  $k$  имеет вид:  $y - y_0 = k(x - x_0)$ .

В). Уравнение прямой, проходящей через две точки:  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ .

Г). Уравнение прямой в «отрезках»:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

Д). Общее уравнение прямой:  $Ax + By + C = 0$ .

Е). Угловой коэффициент прямой:  $k = \operatorname{tg} \alpha$  или  $k = -\frac{A}{B}$  или  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

## §2. Угол между двумя прямыми

Даны две прямые  $L_1 : y = k_1x + b_1$ ,  $L_2 : y = k_2x + b_2$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right|$ .

## §3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Если прямые параллельны, то  $k_1 = k_2$ .

Если прямые перпендикулярны, то  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ .

## §4. Расстояние от точки до прямой

Даны точка  $M(x_0, y_0)$  и прямая  $Ax + By + C = 0$ , тогда  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

# Задачи для самоконтроля

## Пример 1.

**Соотнести уравнения прямой на плоскости:**

1) в отрезках;

а)  $Ax + By + C = 0$  ;

2) через 2 точки;

б)  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$  ;

3) с угловым коэффициентом;

в)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ;

4) общее;

г)  $y = kx + b$  .

## **Пример 2.**

*Даны вершины треугольника  $A(0; 7)$ ,  $B(6; -1)$ ,  $C(2; 1)$ . Найти:*

- а) длину и уравнение стороны  $BC$ ;*
- б) длину и уравнение высоты, проведенной из вершины  $A$ ;*
- в) длину и уравнение медианы, проведенной из вершины  $C$ ;*
- г) угол  $B$ ;*
- д) площадь треугольника.*
- е) сделать чертеж.*