Тема.

Кривые второго порядка

Составитель: Филиппова М.П.,
доцент кафедры высшей математики ИМИ СВФУ

Содержание лекции

1. Основные понятия.
2. Окружность и её каноническое уравнение.
3. Эллипс и его каноническое уравнение.
4. Гипербола и ее каноническое уравнение.
5. Парабола и ее каноническое уравнение
6. Полярная система координат.
7. Связь между декартовой и полярной системами координат

&1. Основные понятия

Определение 3.1. *Линией на плоскости, т. е. в пространстве E2, назовём множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению*

$$F(x, y) = 0.$$

Мы изучаем два частных случая:

1. Линейное уравнение $F(x, y) = Ax + By + C$, где A, B, C – константы. Это уравнение прямой (см. п. 3.1);

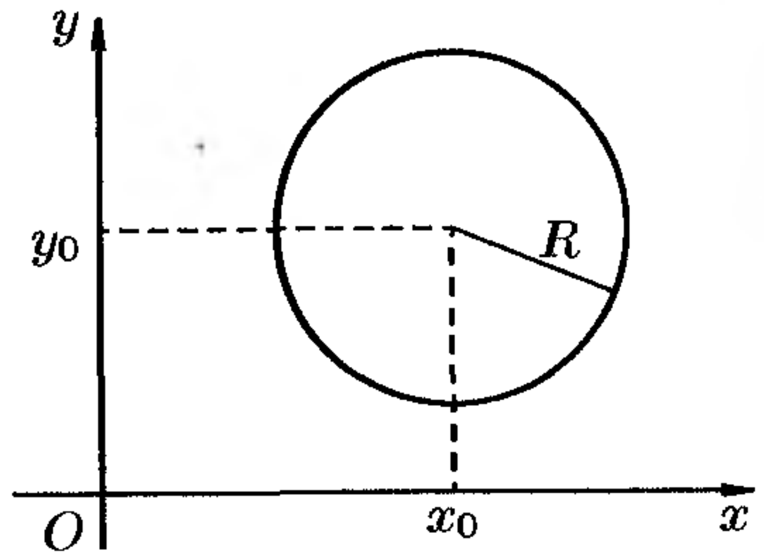
2. уравнение второго порядка

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}, \qquad (3.32)$$

которое является уравнением кривой второго порядка.

&2.Окружность

Определение 3.2. *Окружность – это множество точек (x, y), равноудалённых от одной, называемой центром.*



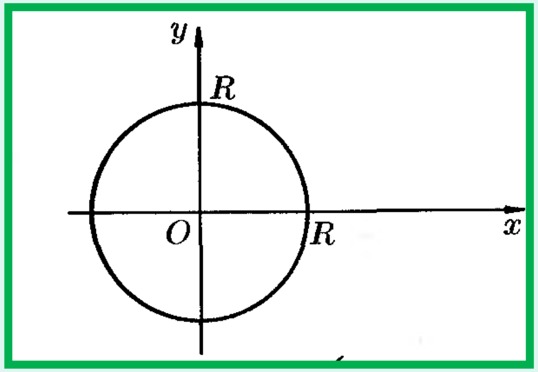
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Выведем каноническое уравнение окружности

По определению

$$R = \left|\overline{CM}\right| \Rightarrow R^2 = \left|\overline{CM}\right|^2$$

$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ – каноническое уравнение окружности радиуса R с центром в точке C(x_0, y_0) (рис. 3.37). В частности, если центром является начало координат, уравнение упрощается: $x^2 + y^2 = R^2$.



Общее уравнение окружности типа (3.32) не содержит произведения координат (в отличие от уравнений эллипса, гиперболы, параболы):

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + K = 0 \qquad A = B$$

Приведение к каноническому виду

Выделение полного квадрата

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2, \ (y+b)^2 = y^2 + 2by + b^2;$$

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + K = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}y + \frac{K}{A} = 0.$$

$$x^2 + \frac{C}{A}x + \left(\frac{C}{2A}\right)^2 + y^2 + \frac{D}{2A}y + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{C}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{K}{A} = 0,$$

$$\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = R^2.$$

$$R^2 = \left(\frac{C}{2A}\right)^2 + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{K}{A}.$$

Пример 1. Написать уравнение окружности радиуса $R = 8$ с центром в точке $C(2; -5)$.

Решение.

Подставив значения координат точки C и значение радиуса в формулу (1), получим

$(x - 2)^2 + (y - (-5))^2 = 8^2$ или $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 8^2$.

Ответ: $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 8^2$.

Пример 2. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ является уравнением окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение.

Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив полные квадраты относительно x и y:

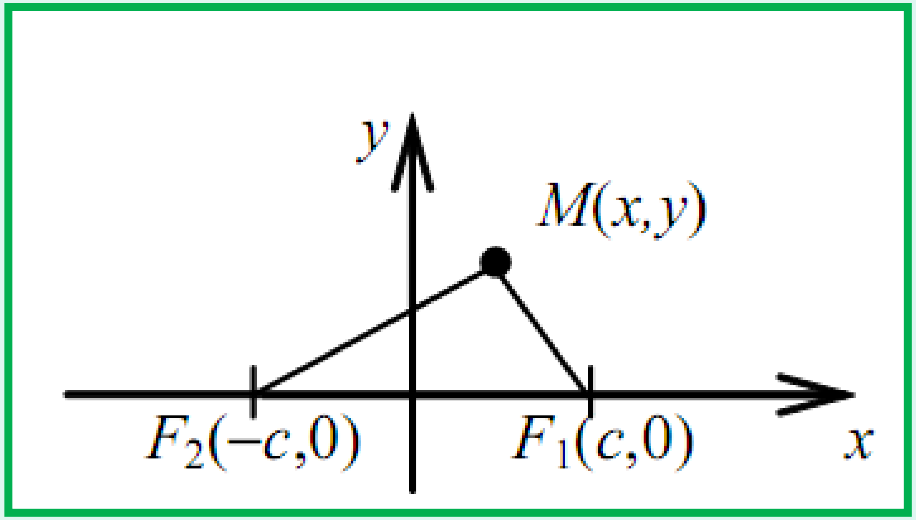
$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 5 = 0$, или

$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$. Это уравнение представляет собой уравнение окружности с центром $C(-4; 2)$ и радиусом, равным 5.

Ответ: $C(-4; 2)$, $R = 5$.

&3.Эллипс

Определение 3.3. *Эллипс – это множество точек (x, y), сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a.*



Выведем каноническое уравнение эллипса

$$\bar{r}_1 = \overline{F_1 M} = \{x - c,\ y\}$$

$$\bar{r}_2 = \overline{F_2 M} = \{x + c,\ y\}$$

$$r_1 = \left|\overline{F_1 M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ r_2 = \left|\overline{F_2 M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

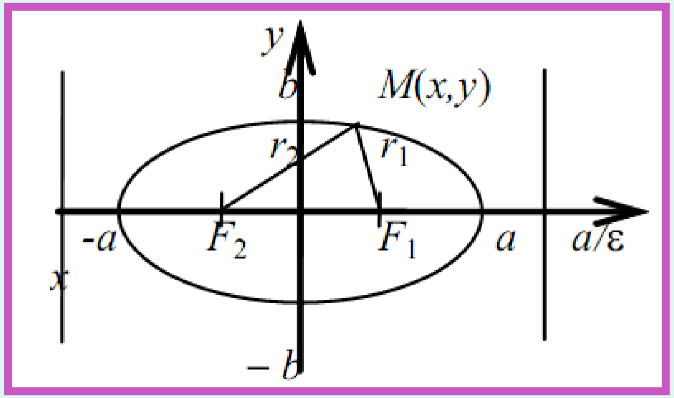
$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Ещё раз возводим в квадрат

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Поскольку $a > c$, обозначим $a^2 - c_2 = b^2$ и запишем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Приняты названия:

- 2a – большая ось эллипса, на ней расположены фокусы;
- 2b – малая ось эллипса, b < a;
- $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы эллипса;
- 2c – расстояние между фокусами, c < a, $c^2 = a^2 - b^2$;
- $\bar{r}_2 = \overline{F_2M}$, $\bar{r}_1 = \overline{F_1M}$ – фокальные радиусы-векторы (по определению $r_1 + r_2 = 2a$);
- $\frac{c}{a} = \varepsilon$ называется эксцентриситетом, $\frac{c}{a} < 1$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, указанные на рис. 3.40, называются директрисами эллипса и которые находятся на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра эллипса. Они обладают следующим свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Пример 3 Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось $a = 5$ и эксцентриситет $e = 0{,}6$.

Решение.

По условию $e = \dfrac{c}{a} = 0{,}6$. Следовательно, $c = a \cdot 0{,}6 = 5 \cdot 0{,}6 = 3$. Но тогда квадрат малой полуоси эллипса $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Таким образом, искомое каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

&4. Гипербола

Определение 3.4. *Гипербола – это множество точек, разность расстояний каждой из которых от двух данных точек – фокусов есть величина постоянная, равная 2а, т. е.*

$$2a = |r_2 - r_1|,$$

где $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$ – фокальные радиусы-векторы.

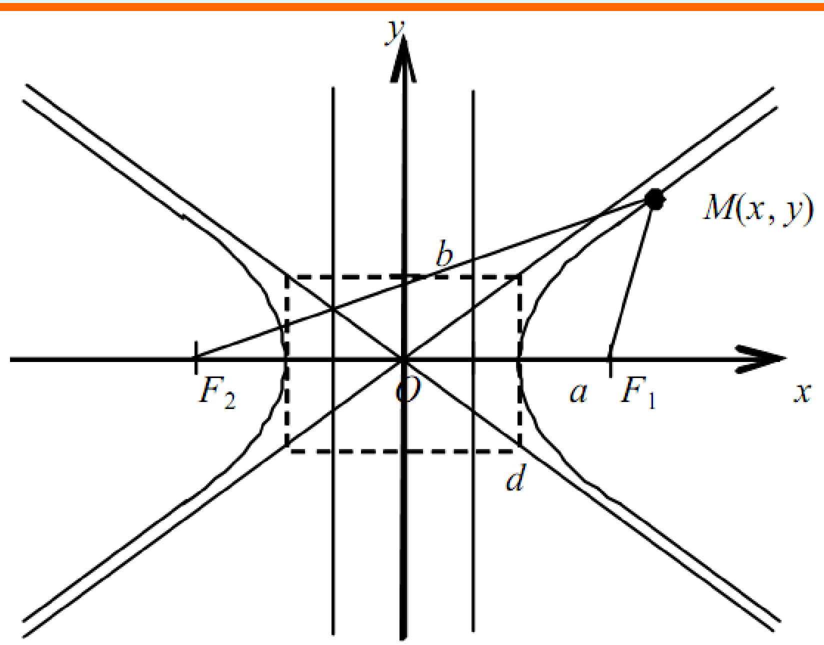


Рис. 3.43

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где

a – действительная полуось, b – мнимая полуось,

$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы,

$c^2=a^2+b^2$, $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ – эксцентриситет,

$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис

Пример 4. Доказать, что уравнение $21x^2 - 43y^2 = 903$ является уравнением гиперболы. Найти координаты фокусов.

Решение.

Разделив обе части уравнения на 903, получим:

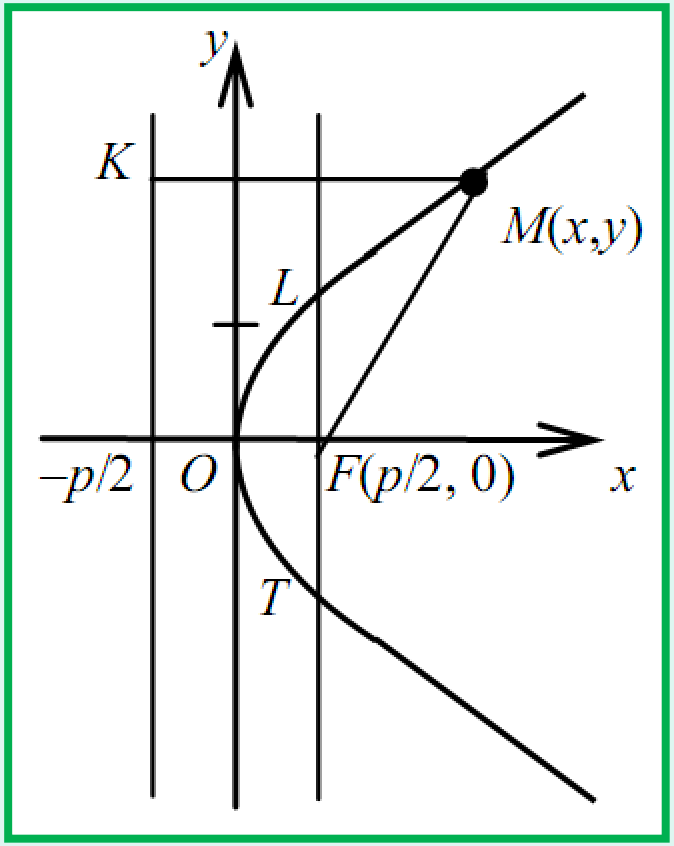
$$\frac{x^2}{43} - \frac{y^2}{21} = 1.$$

Это уравнение гиперболы, для которой $a^2 = 43$, $b^2 = 21$. Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ находим $c^2 = 64$ и $c = 8$ $(c > 0)$. Следовательно, фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

Ответ: $F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

&5. Парабола

Определение 3.5. *Парабола – это множество точек, равноудалённых от данной точки – фокуса и от прямой, называемой директрисой.*



Каноническое уравнение параболы

$$KM = MF.$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+(0-y)^2}.$$

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Сопряженная парабола

1. Парабола $x^2 = 2py$ (рис. 3.47) называется сопряжённой по отношению к предыдущей, изображённой на рис. 3.48. Её ось симметрии – ось Оу,

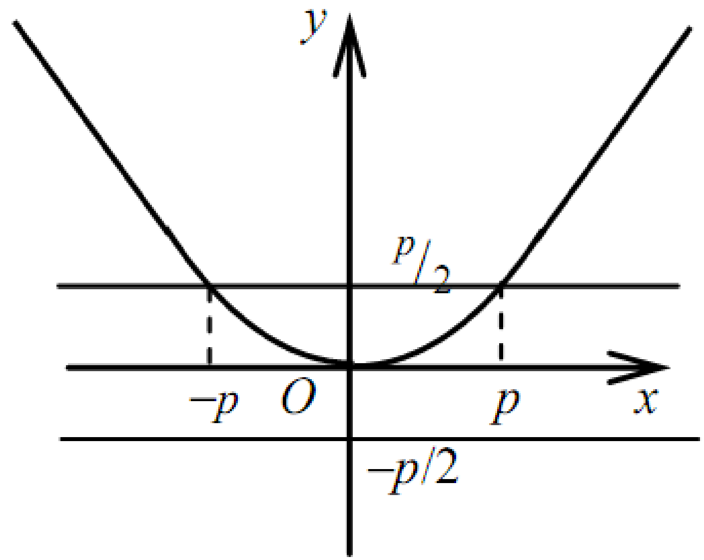


Рис. 3.47

$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ – фокус параболы, $y = -\frac{p}{2}$ – директриса параболы.

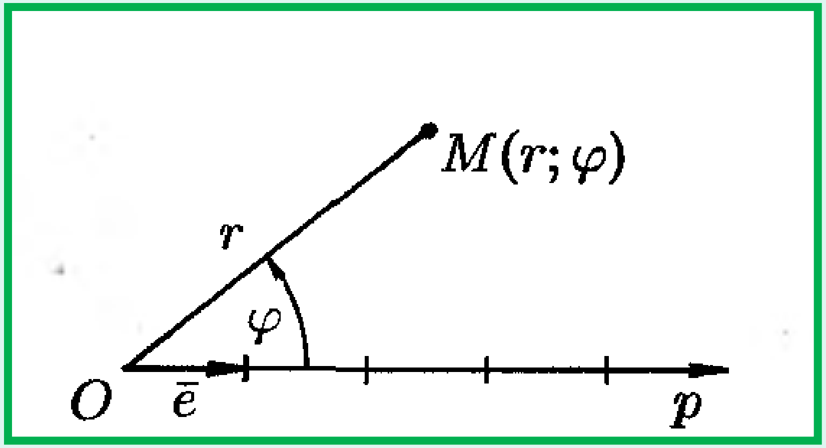
Пример 5. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Решение.

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что $2p = 6$, $p = 3$. Так как уравнение директрисы имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, а фокус – координаты $\frac{p}{2}$ и 0, то для рассматриваемого случая получим уравнение директрисы $x = -\frac{3}{2}$ и фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Ответ: $x = -\frac{3}{2}$, $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

&5. Полярная система координат



В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, являются точка О – <u>полюс</u> и ось *p*, называемая <u>полярной осью</u>.

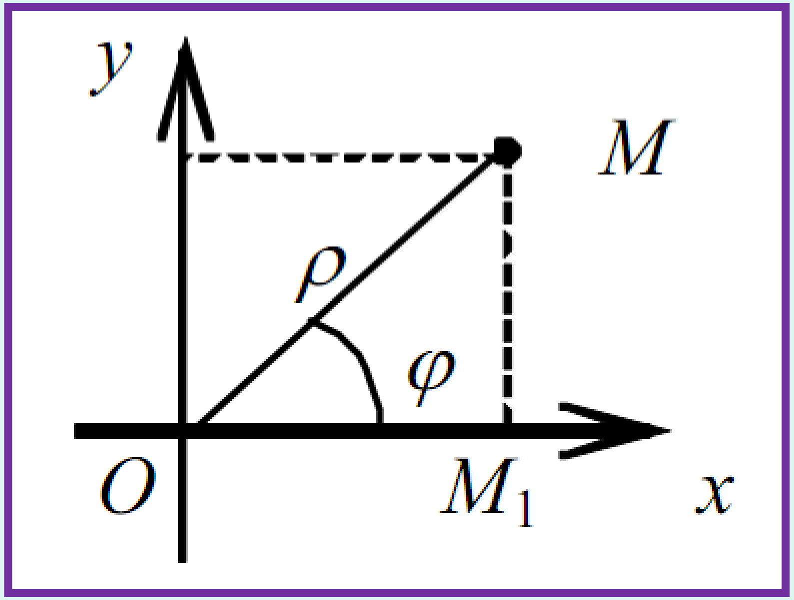
&6. Полярные координаты

- из произвольной точки О на плоскости проведём полупрямую р. Положение любой точки М на плоскости, не совпадающей с полюсом О, определим заданием двух чисел:
- ρ – расстояние от точки до полюса, выраженное в единицах
- масштаба,
- ϕ – угол, на который нужно повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпала с лучом ОМ.
- Числа ρ и ϕ называются полярными координатами точки М;
- ρ – полярный радиус (или радиус-вектор), ϕ – полярный угол.

&7. Связь между декартовой и полярной системами координат

$$x = \rho \cos\varphi$$

$$y = \rho \sin\varphi$$



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

***Пример* 6.** Дана точка $M(-1; -\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки M.

❍ Решение: Находим r и φ:

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но так как точка M лежит в 3-й четверти, то $n = -1$ и $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$. Итак, полярные координаты точки M есть $r = 2$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, т. е. $M\left(2; \frac{-2\pi}{3}\right)$. ●

Пример 7. Окружность задана уравнением в декартовых прямоугольных координатах $x^2 + y^2 = x$. Составить уравнение этой окружности в полярных координатах при условии, что полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox, а полюс – с началом координат.

Решение.

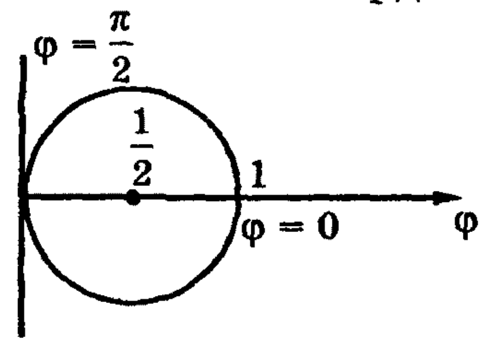
Связь полярной и декартовой прямоугольной системы координат определяется формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad -\pi < \varphi < +\pi.$$

Подставим x и y из этих формул в данное уравнение, получим $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho\cos\varphi$, или $\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \rho\cos\varphi$, или $\rho^2 = \rho\cos\varphi$ $(\rho > 0)$. Окончательно, уравнение данной окружности в полярной системе координат будет $\rho = \cos\varphi$.

Построим эту окружность.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



Функция $\cos\varphi$ – четная, поэтому кривая будет симметрична относительно полярной оси.

Получим окружность с центром $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $R = 1$.

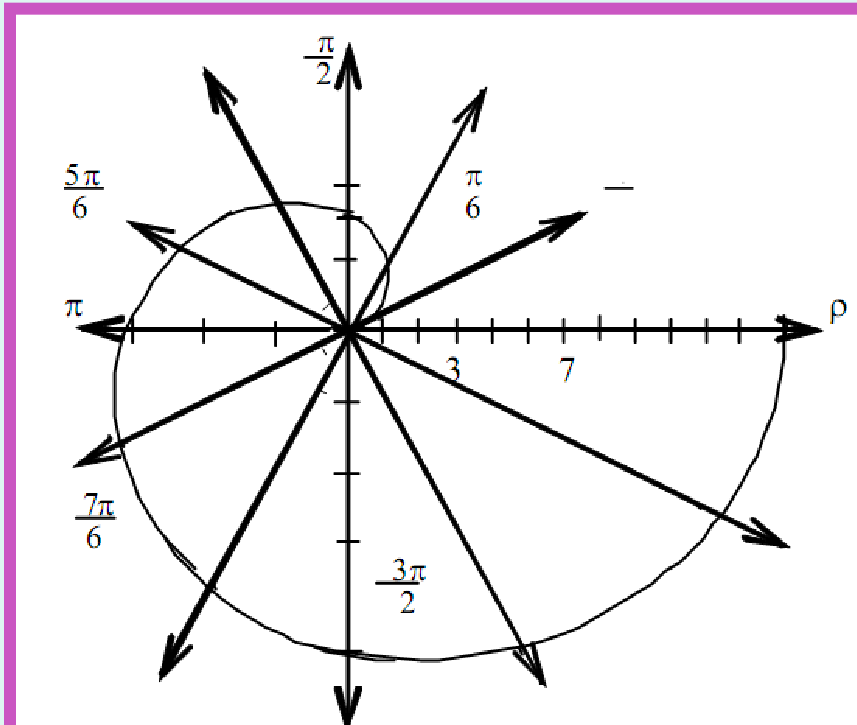
Ответ: $\rho = \cos\varphi$.

Пример 8

Построить в полярной системе координат линию $\rho = 3(1 - \sin\varphi)$, записать её уравнение в декартовых координатах.

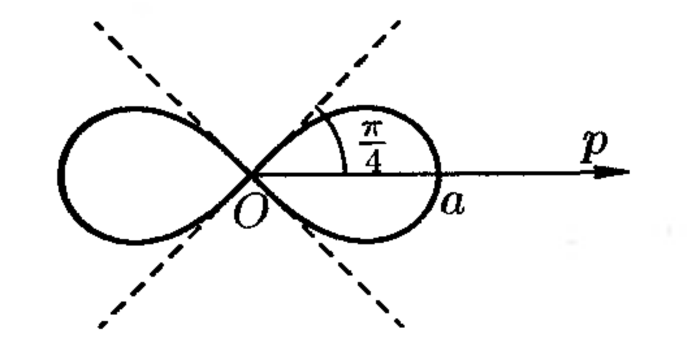
Строим таблицу

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	3	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	6	3



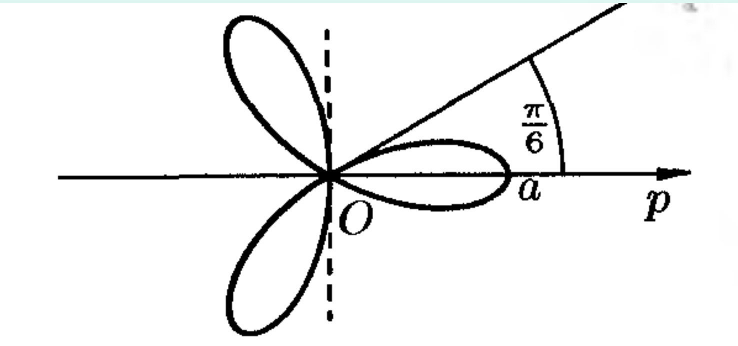
Кардиоида

Примеры некоторых кривых



Лемниската Бернулли

Уравнение в прямоугольных координатах: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, $a > 0$; в полярных координатах: $r = a \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}$.



Трехлепестковая роза

В полярных координатах ее уравнение имеет вид $r = a \cdot \cos 3\varphi$, где $a > 0$.

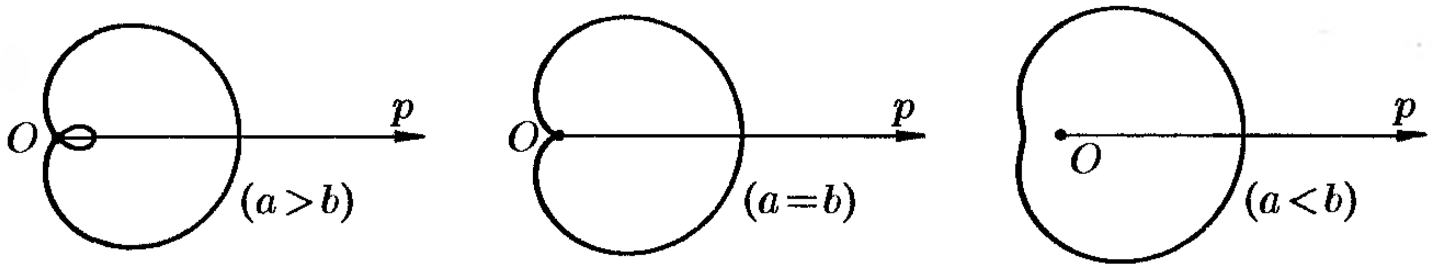


Рис. 35. ***Улитка Паскаля***

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = b + a\cos\varphi$.

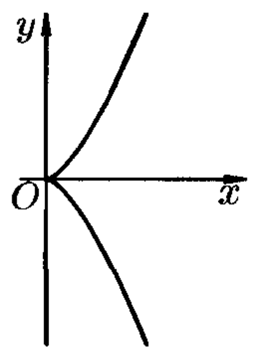


Рис. 36. ***Полукубическая парабола***

Уравнение кривой $y^2 = x^3$ или

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$

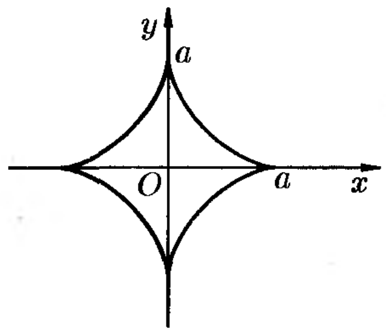


Рис. 37. ***Астроида***

Уравнение в прямоугольных координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t. \end{cases}$$

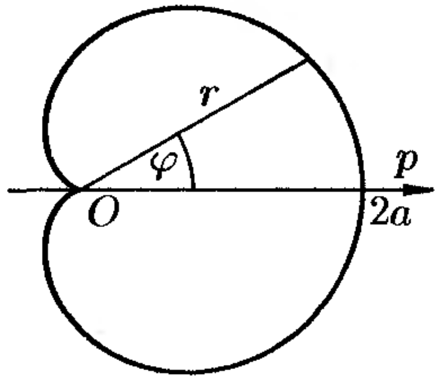


Рис. 38. ***Кардиоида***

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = a(1+\cos\varphi)$, где $a > 0$. Кардиоида — частный случай улитки Паскаля ($a = b$).

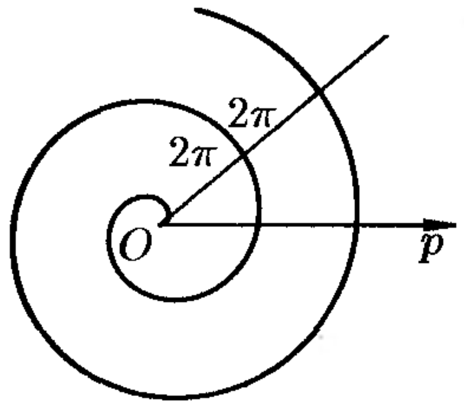


Рис. 39. ***Спираль Архимеда***

Уравнение кривой в полярных координатах $r = a\varphi$, где $a > 0$ — постоянное.

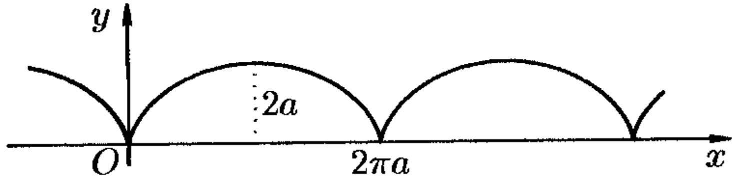
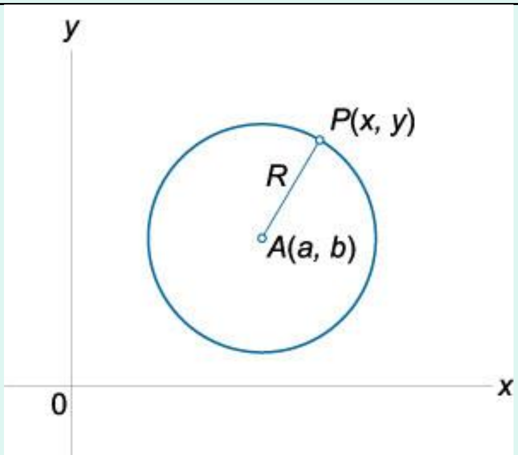
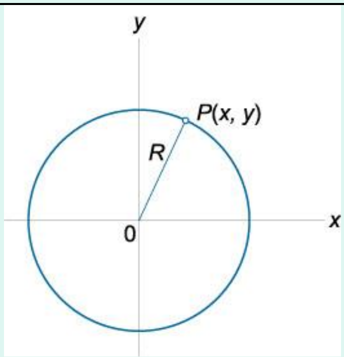
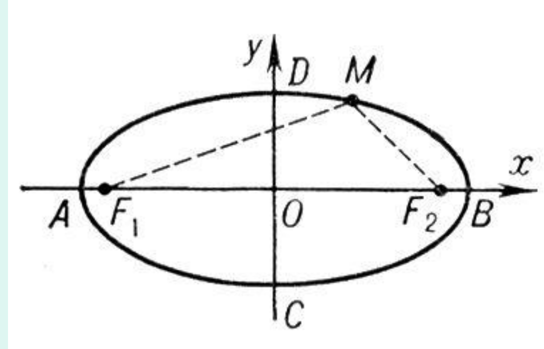
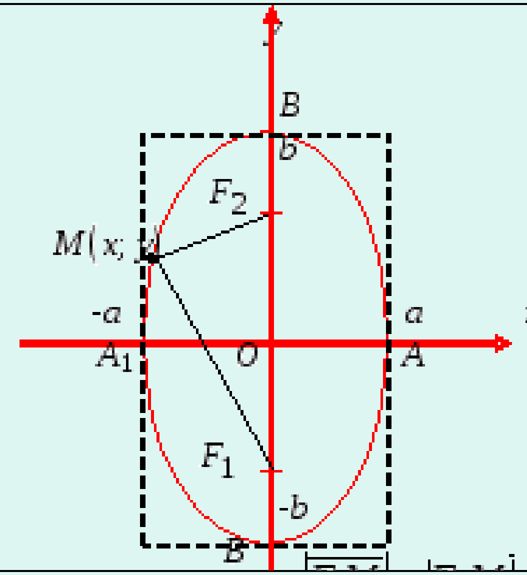


Рис. 40. ***Циклоида***

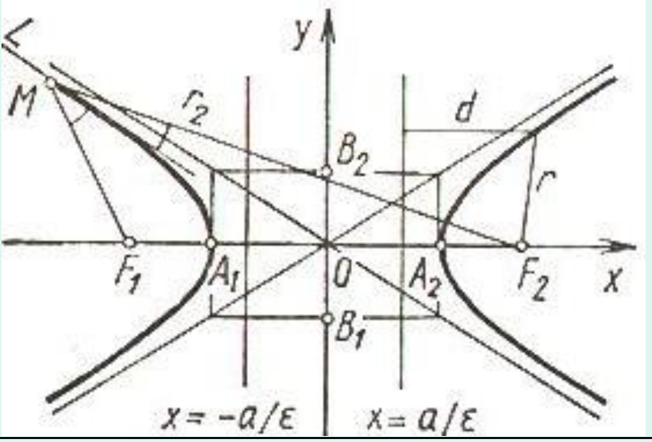
Параметрические уравнения циклоиды имеют вид $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ где $a > 0$. Циклоида — это кривая, которую описывает фиксированная точка окружности, катящаяся без скольжения по неподвижной прямой.

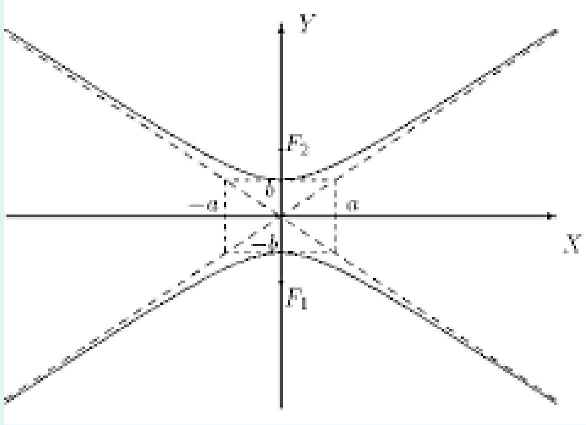
Основные формулы

Окружность		
Каноническое уравнение окружности	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	$x^2+y^2=R^2$

Эллипс		
1. Положение фокусов	$F_1, F_2 \epsilon Ox$	$F_1, F_2 \epsilon Oy$
2. Координаты фокусов	$F_1(-c;0), \qquad F_2(c;0)$	$F_2(0;c), \qquad F_1(0;-c)$
3. Соотношение между *a* и *b*	$a > b$	$a < b$
4. Большая ось	$\lvert AB \rvert = 2a$	$\lvert BB_1 \rvert = 2b$
5. Малая ось	$\lvert DC \rvert = 2b$	$\lvert A_1A \rvert = 2a$
6. Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$
7. Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$	$\varepsilon = \frac{c}{b} < 1$
8. Соотношение между *a*, *b* и *c*	$a^2 - b^2 = c^2$	$b^2 - a^2 = c^2$
9. Уравнение директрис	$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = \frac{a}{\varepsilon}$	$y = -\frac{b}{\varepsilon}, \qquad y = \frac{b}{\varepsilon}$
Каноническое уравнение эллипса	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

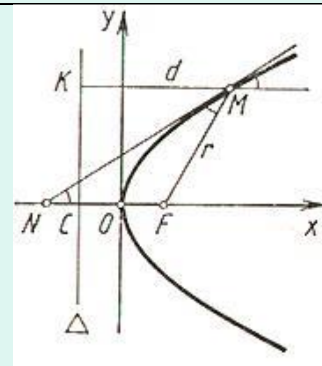
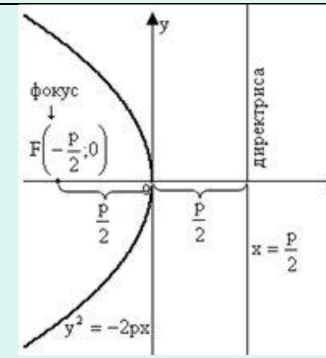
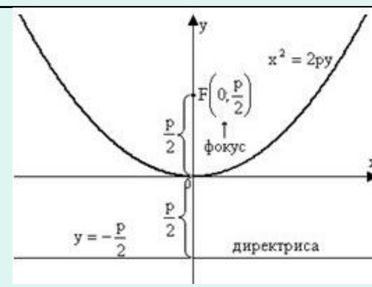
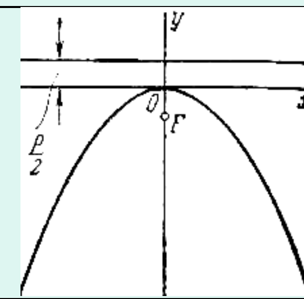
Гипербола





1. Положение фокусов	$F_1, F_2 \epsilon Ox$	$F_1, F_2 \epsilon Oy$
2. Координаты фокусов	$F_1(-c; 0), \quad F_2(c; 0)$	$F_2(0; c), \quad F_1(0; -c)$
3. Соотношение между *a* и *b*	$a > b$	$a < b$
4. Большая ось	$\lvert AB \rvert = 2a$	$\lvert BB_1 \rvert = 2b$
5. Малая ось	$\lvert DC \rvert = 2b$	$\lvert A_1A \rvert = 2a$
6. Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$
7. Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$	$\varepsilon = \frac{c}{b} > 1$
8. Соотношение между *a, b* и *c*	$a^2 + b^2 = c^2$	$b^2 + a^2 = c^2$
9. Уравнение асимптот	$y = \frac{a}{b}x, \quad y = -\frac{a}{b}x$	$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$
10. Уравнение директрис	$x = -\frac{a}{\varepsilon}, x = \frac{a}{\varepsilon}$	$y = -\frac{b}{\varepsilon}, y = \frac{b}{\varepsilon}$
Каноническое уравнение гиперболы	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$	$\boldsymbol{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$

Замечание. Каноническое уравнение равносторонней гиперболы (a=b): $\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$

<table>
<tr><td>Парабола</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1. Положение фокуса
2. Координаты фокусов
3. Уравнение директрис</td><td>$F \;\; \epsilon Ox$
$F \;\; (\frac{p}{2}; 0)$
$x = -\frac{p}{2}$</td><td>$F \;\; \epsilon Ox$
$F \;\; (\frac{p}{2}; 0)$
$x = \frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>Каноническое уравнение параболы</td><td>$\boldsymbol{y^2 = 2px}$</td><td>$\boldsymbol{y^2 = -2px}$</td></tr>
<tr><td>Парабола</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1. Положение фокуса
2. Координаты фокусов
3. Уравнение директрис</td><td>$F \;\; \epsilon Oy$
$F \;\; (0; \frac{p}{2})$
$y = -\frac{p}{2}$</td><td>$F \;\; \epsilon Oy$
$F \;\; (0; -\frac{p}{2})$
$y = \frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>Каноническое уравнение параболы</td><td>$\boldsymbol{x^2 = 2py}$</td><td>$\boldsymbol{x^2 = -2py}$</td></tr>
</table>

Полярные координаты:

1) $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$

2) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$

Вопросы и задачи для самоконтроля

Задача 1.

Эксцентриситетом эллипса называется ……

Задача 2.

Соотнести кривые второго порядка:

1) эллипс;	а) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;
2) гипербола;	б) $2x = y^2$;
3) окружность;	в) $4x^2 - 5y^2 = 20$;
4) парабола;	г) $x^2 + 4y^2 = 16$.

Задача 3.

Указать наименьшую полуось эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

Задача 4.

Найти эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

Задача 5.

Какие фокусы имеет эллипс $\frac{x^2}{70}+\frac{y^2}{34}=1$

Задача 6.

Указать центр и мнимую полуось гиперболы

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

Задача 7.

Для гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ укажите сопряженную гиперболу

Задача 8.

Чему равно расстояние между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$

Задача 9.

Чему равен эксцентриситет гиперболы $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

Задача 10.

Укажите значение параметра p для параболы $y^2 = 8x$

Задача 11.

Какое уравнение директрисы имеет парабола $y^2 = 16x$

Задача 12.

Полярные координаты точки $A(2\sqrt{3}; 2)$ имеют вид…

Задача 13.

Прямоугольные координаты точки $A\left(10; \frac{\pi}{2}\right)$ имеют вид…