

**Составитель: Филиппова М.П., доцент кафедры
высшей математики ИМИ СВФУ**

Раздел. Векторная алгебра

Содержание лекции:

Содержание лекции:

- 1. Основные понятия**
- 2. Линейные операции над векторами**
- 3. Нелинейные операции над векторами**



&1. Основные понятия



Термин **вектор**
(от лат. Vector - “несущий”) впервые
появился в 1845 г. у ирландского
математика Уильяма Гамильтона

Уильям Роуэн Гамильтон
1805 — 1865

выдающийся ирландский математик и
физик XIX века.

Скалярные величины

- **Скалярными величинами или скалярами (scalar quantity, scalar) называются величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений.**
- **Например, объем, длина, площадь, температура.**

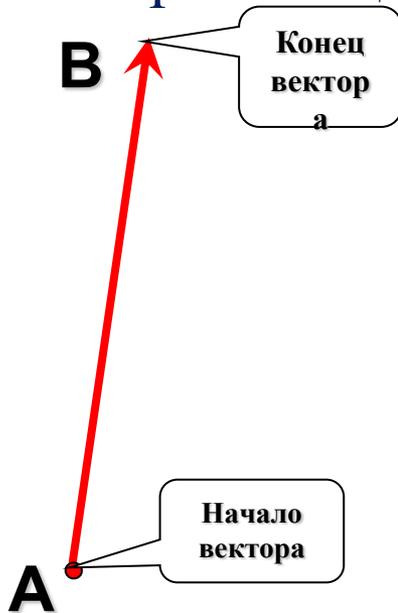
Векторные величины

- *Векторными величинами* (vector quantity) называются величины, для определения которых кроме числового значения необходимо знать еще их направление.
- Например, смещение физического объекта, скорость ветра, сила.

Определение вектора.

Вектором называется *направленный отрезок*, имеющий определенную длину. Одна из ограничивающих точек является началом, другая концом вектора.

Длина вектора называется модулем и равна длине отрезка, изображающего вектор.



Обозначения.

Вектор:

\overrightarrow{AB} \vec{a}

Длина вектора:

$|\overrightarrow{AB}|$ $|\vec{a}|$

Любая точка плоскости также является вектором.
В этом случае вектор называется нулевым



Вектор \vec{MM}

Вектор $\vec{0}$

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора.

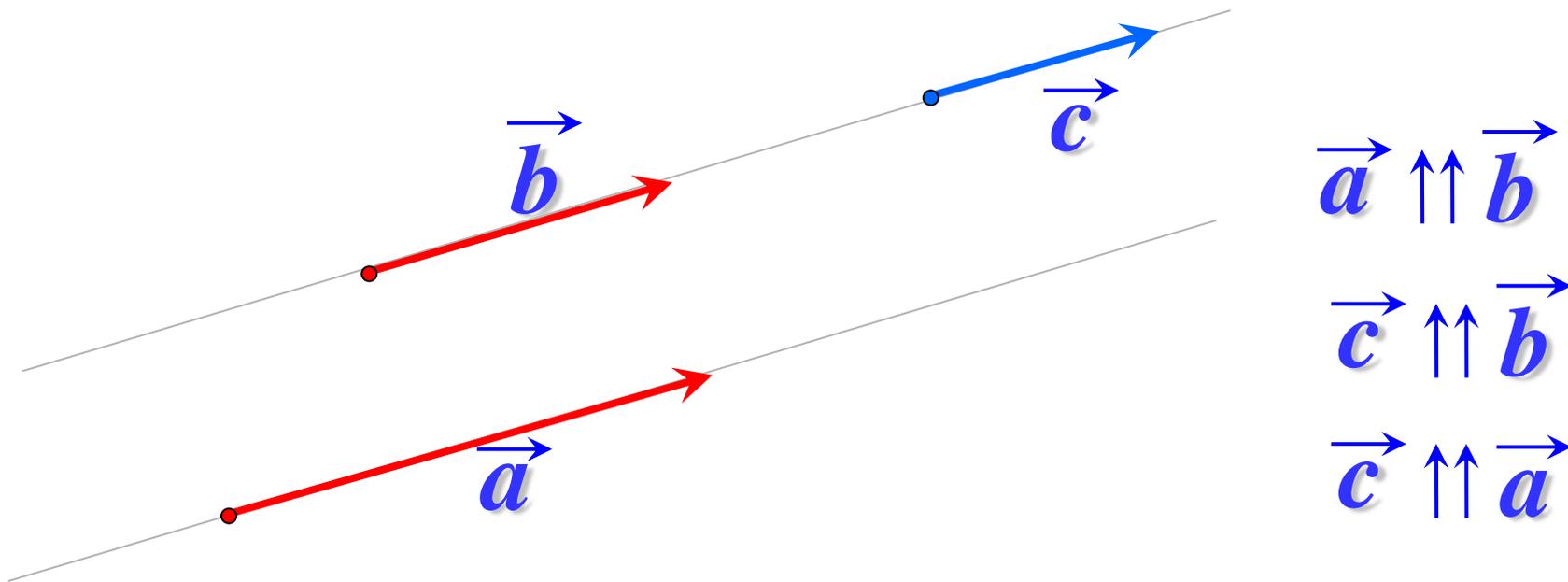
Длина нулевого считается равной нулю

$$|\vec{MM}| = 0$$



Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, сонаправленные векторы



Нулевой вектор считается коллинеарным, сонаправленным с любым вектором.

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

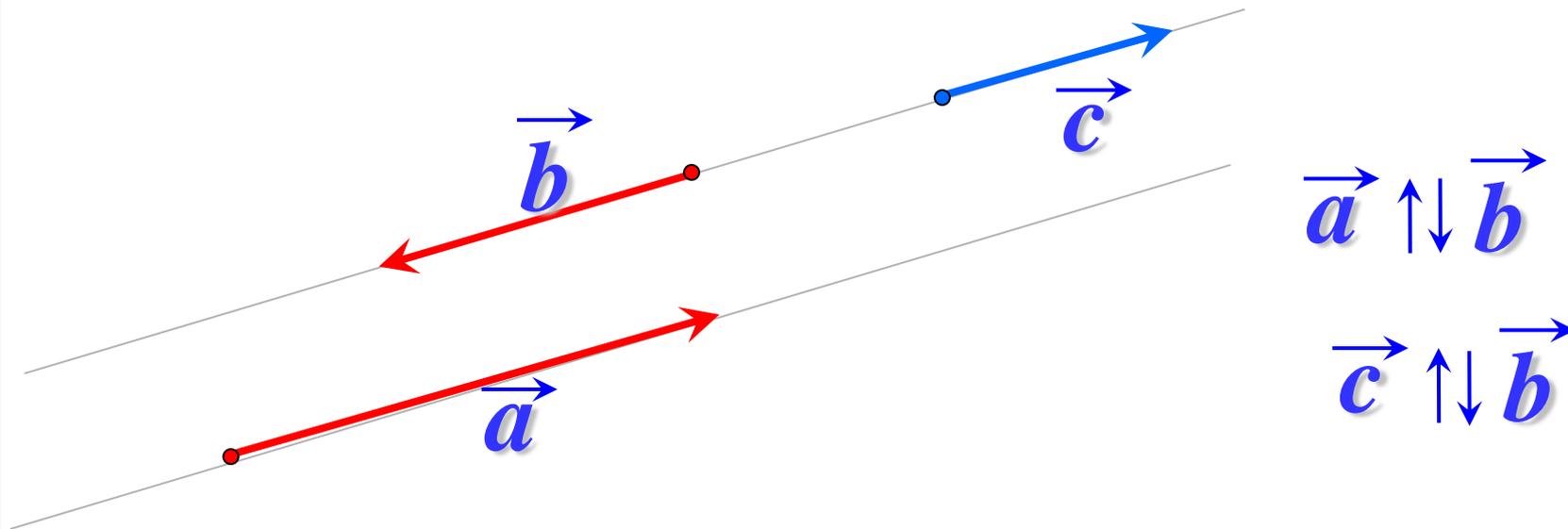
$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}$$



Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

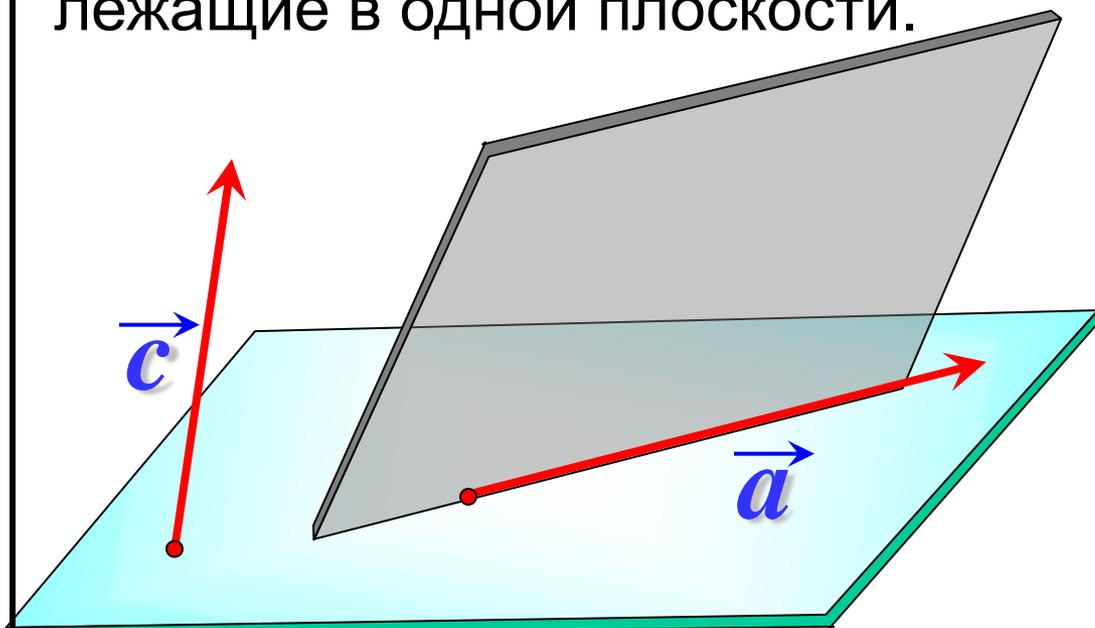
Коллинеарные,
противоположно направленные векторы





Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

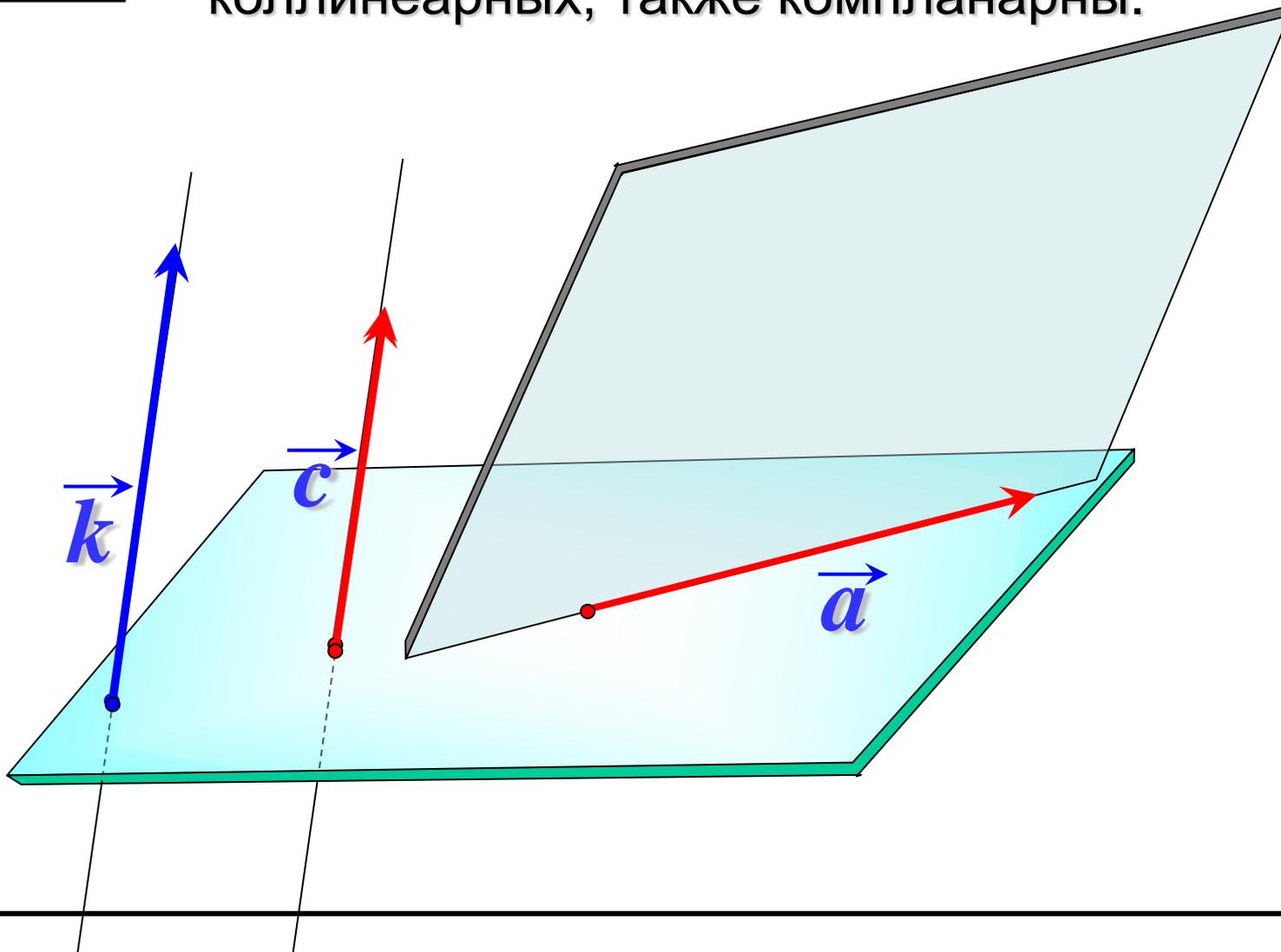
Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.



**Любые два вектора
компланарны.**

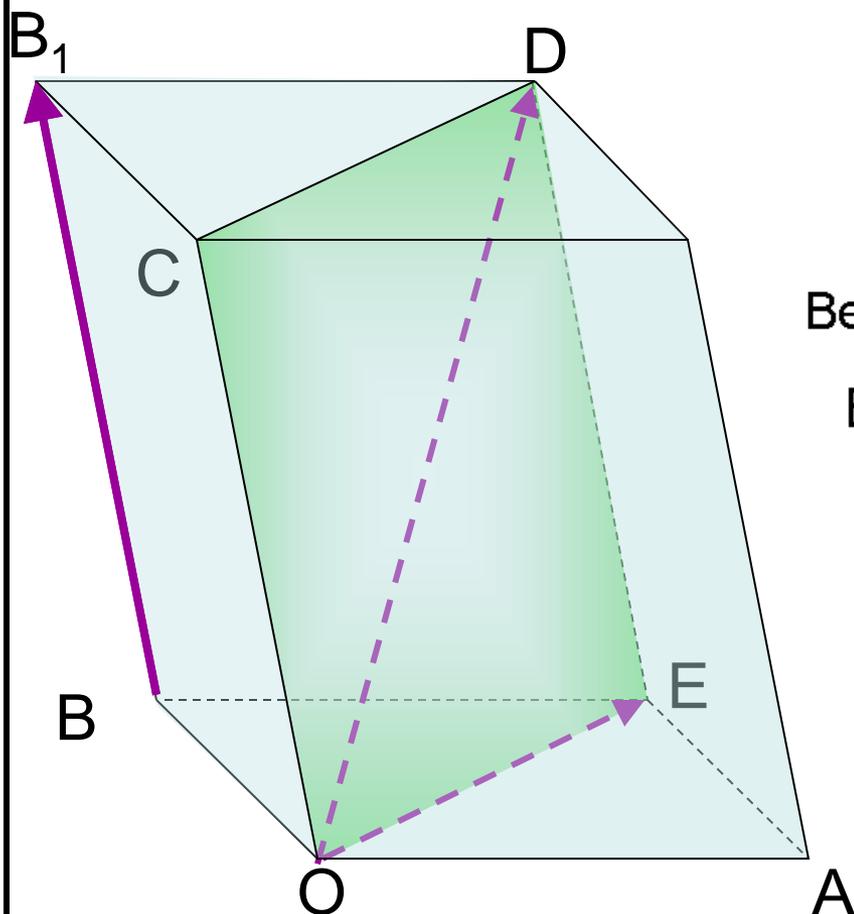


Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.





Три произвольных вектора могут быть как
компланарными, так и не компланарными.

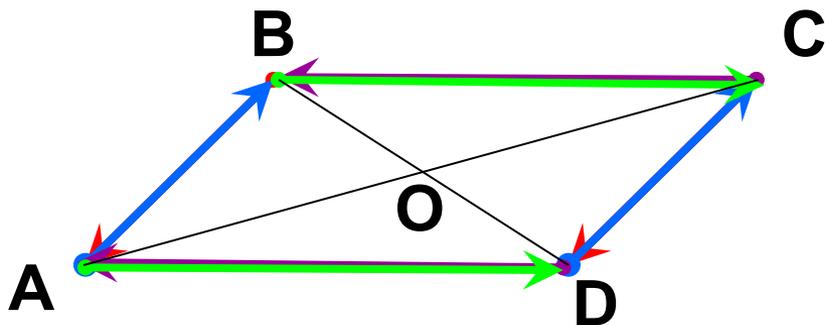


Векторы $\vec{BB_1}$, \vec{OD} и \vec{OE} не компланарны

Векторы \vec{OC} , \vec{OD} и \vec{OE} компланарны



Векторы называются равными,
если они сонаправлены и их длины равны.



1 $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

2 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

ABCD – параллелограмм.

$$\vec{BA} = \vec{CD};$$

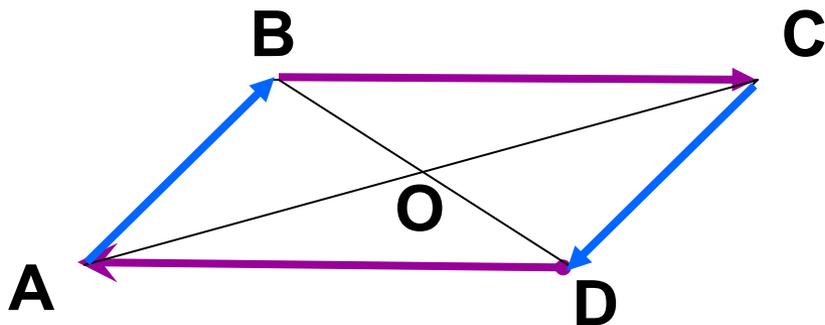
$$\vec{AB} = \vec{DC};$$

$$\vec{CB} = \vec{DA};$$

$$\vec{AD} = \vec{BC}.$$



Векторы называются противоположными, если они противоположно направлены и их длины равны.



$$1 \quad \vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

$$2 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

ABCD – параллелограмм.

$$\vec{DA} = -\vec{BC};$$

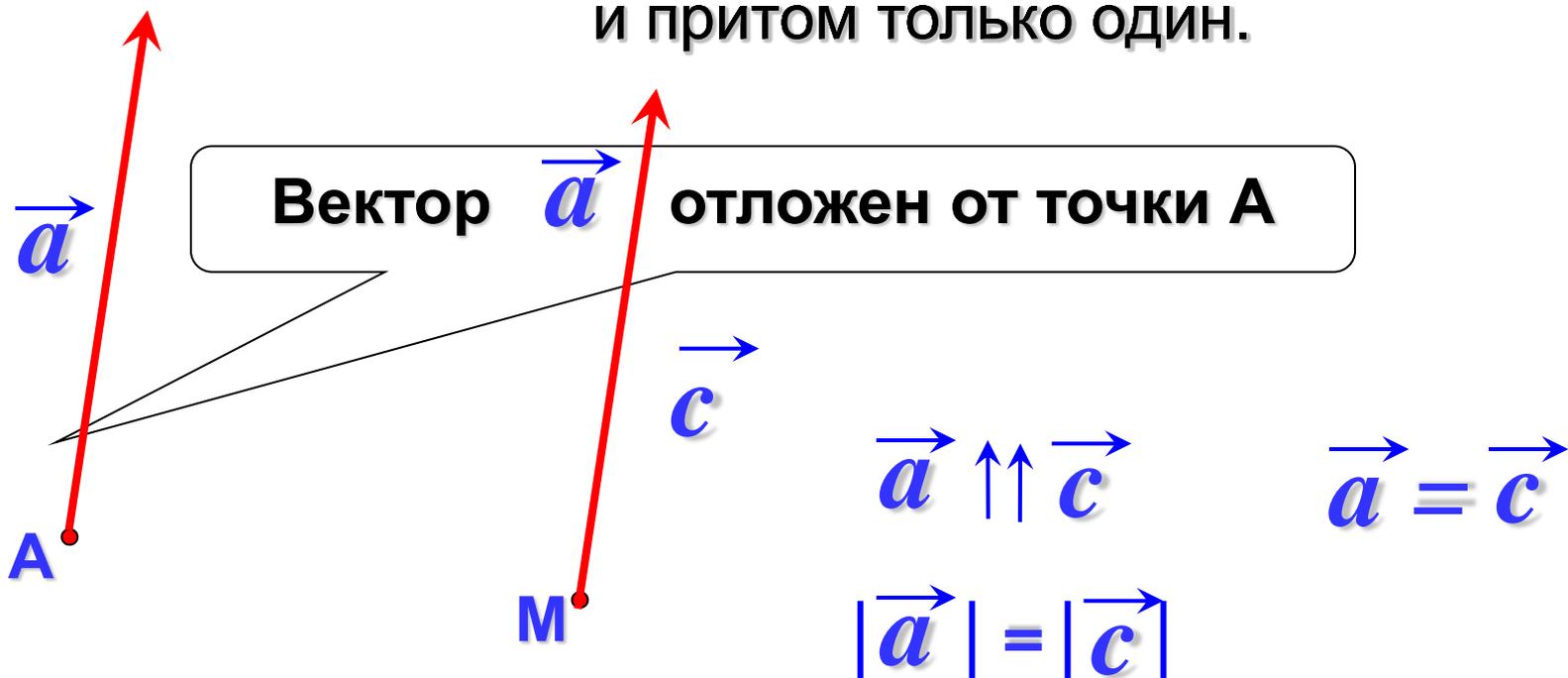
$$\vec{AB} = -\vec{CD};$$



Если точка A – начало вектора \vec{a} , то говорят, что

вектор \vec{a} отложен от точки A

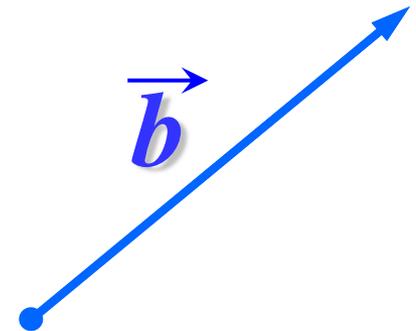
От любой точки M можно отложить
вектор, равный данному вектору \vec{a} ,
и притом только один.





Угол между векторами

Углом α между векторами называется наименьший угол, образуемый векторами при совмещении их начал.



\vec{a}

α

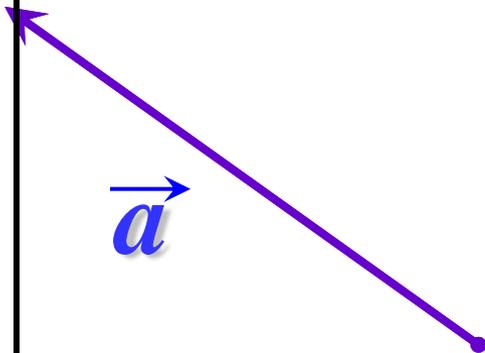
\vec{b}

• O

$\vec{a} \vec{b} = \alpha$

Угол между векторами
равен α

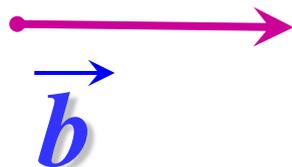
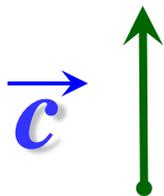
\vec{a} и \vec{b}





Для коллинеарных векторов $\alpha = 0$ или $\alpha = 180^\circ$

Два вектора называются **ортогональными**, если угол между ними равен 90° .

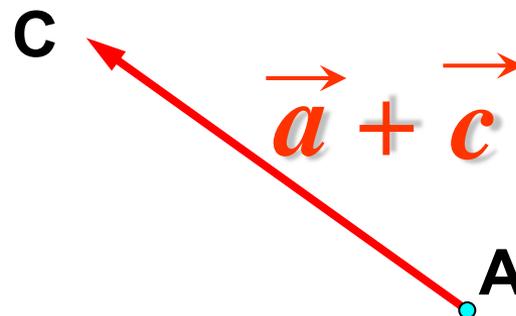
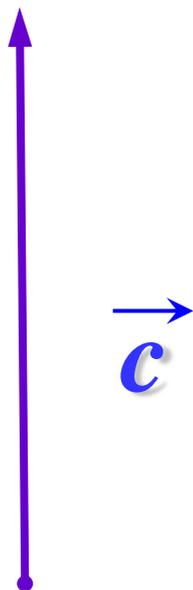
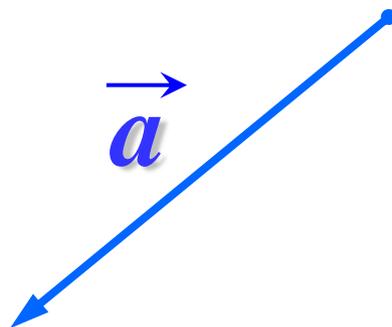


$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

§ 2. Линейные операции над векторами.



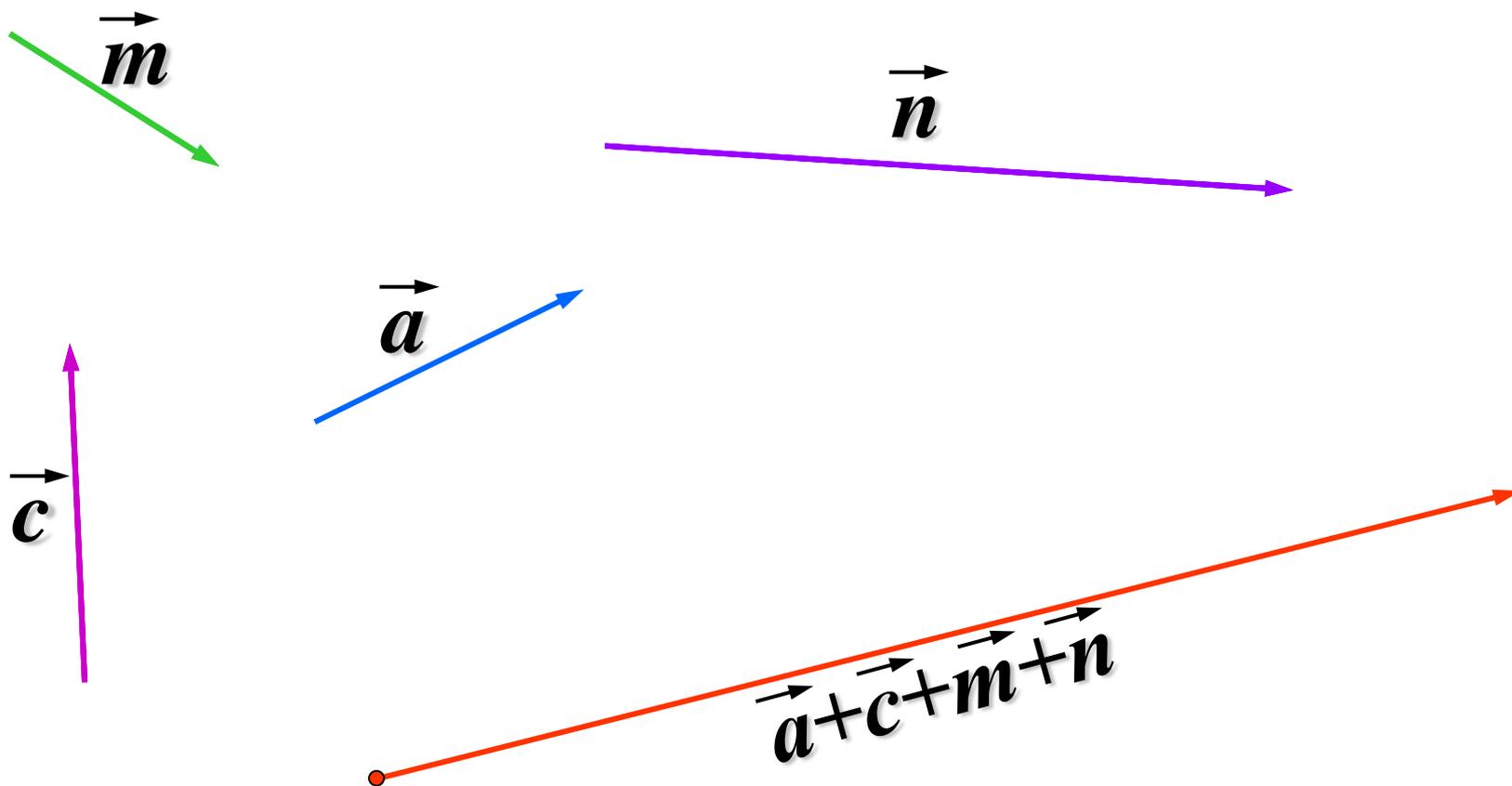
Сложение векторов. Правило треугольника.





§ 2. Действия над векторами.

Сложение векторов. Правило многоугольника.





§ 2. Действия над векторами.

Сложим первые две силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (аксиома параллелограмма).
Количество сил уменьшилось на единицу.

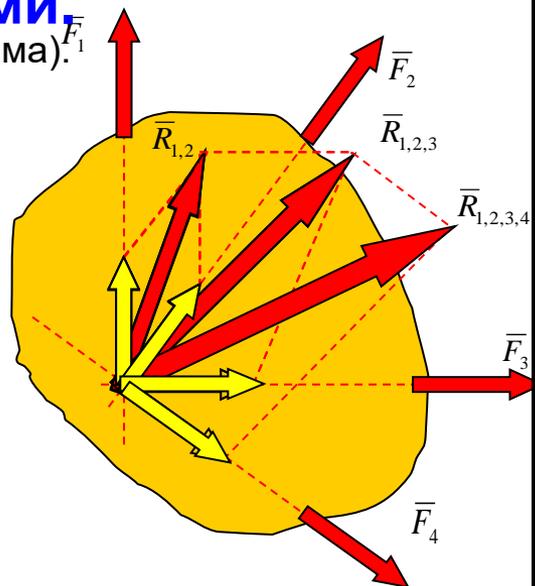
$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Сложим полученную равнодействующую $\vec{R}_{1,2}$ со следующей силой \vec{F}_3 .
Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3$$

Повторим эту же операцию со следующей силой \vec{F}_4 .
Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\vec{R}_{1,2,3,4} = \vec{R}_{1,2,3} + \vec{F}_4$$



Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением силового треугольника – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы.

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots = \sum \vec{F}_i$$

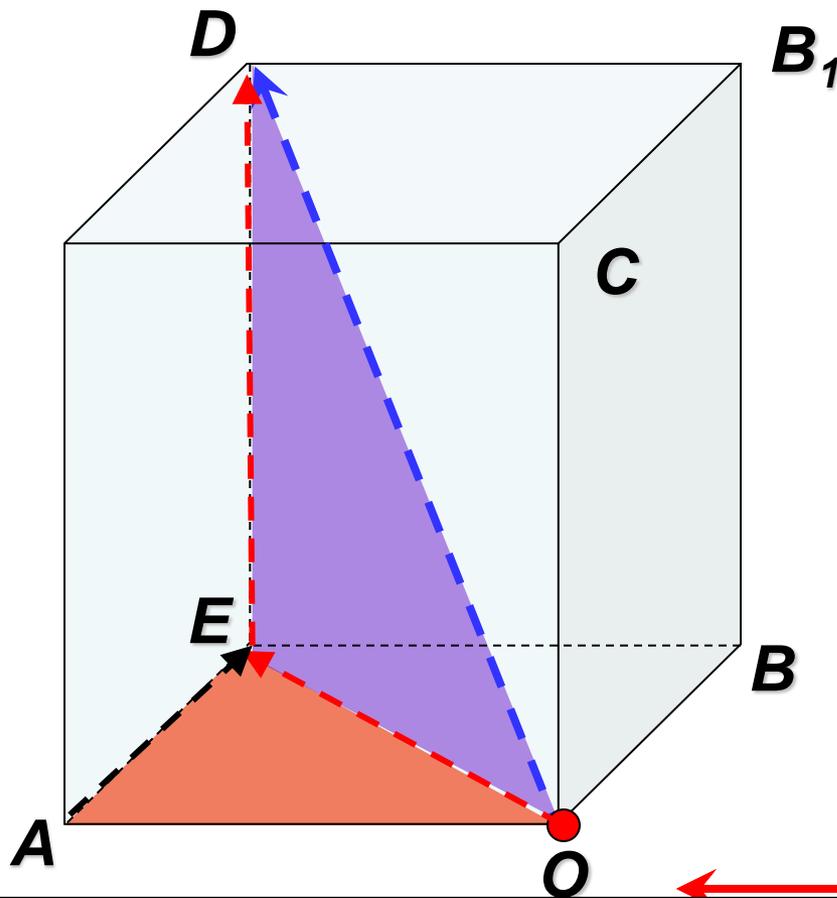


§ 2. Действия над векторами. Правило параллелепипеда.

из $\triangle OAE$

$$\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = (\vec{OA} + \vec{AE}) + \vec{ED} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



\vec{a}

\vec{c}

\vec{b}

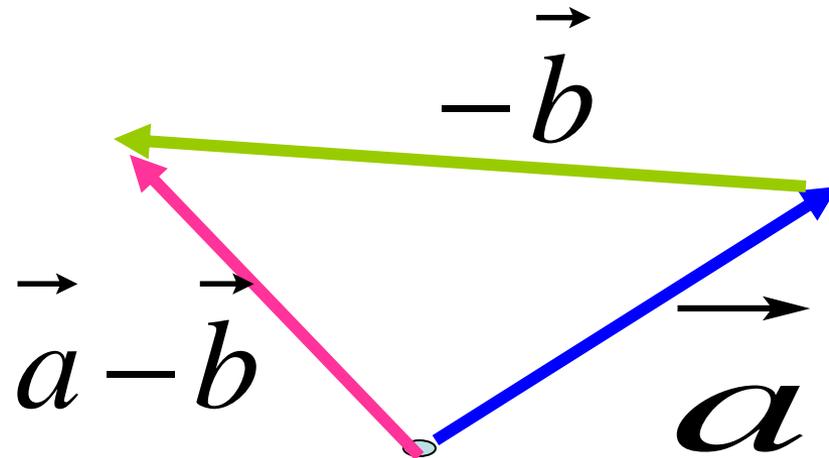


§ 2. Действия над векторами.

Вычитание векторов



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



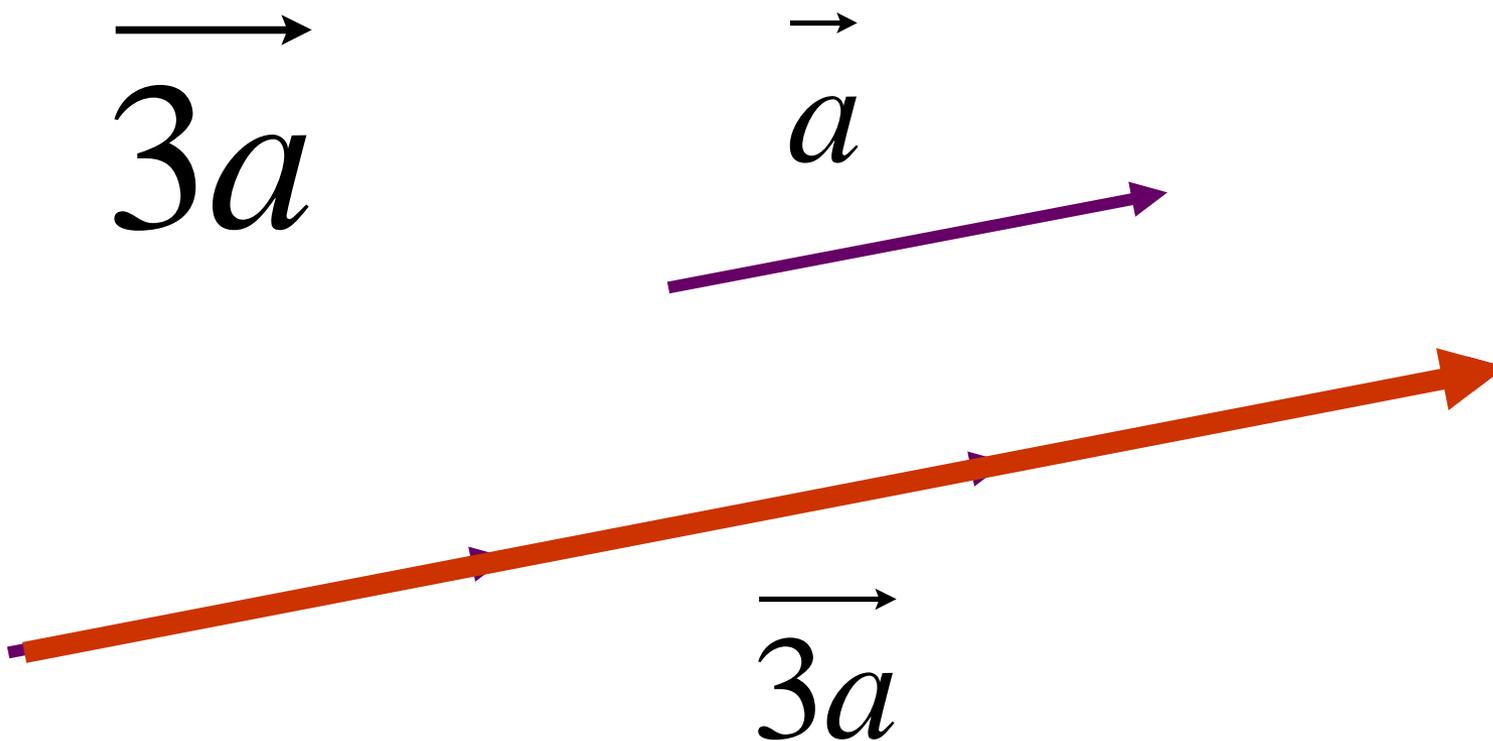


§ 2. Действия над векторами.

Умножение вектора на число

Произведением вектора \vec{a} на число α называется вектор, такой что:

$$1) |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|, \quad 2) \vec{b} \parallel \vec{a}.$$





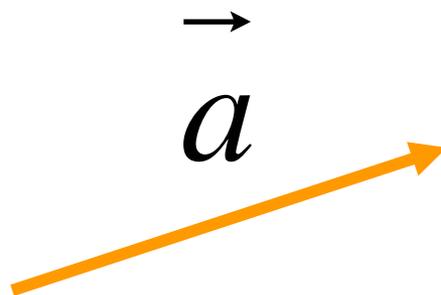
§ 2. Действия над векторами.

Умножение вектора на число

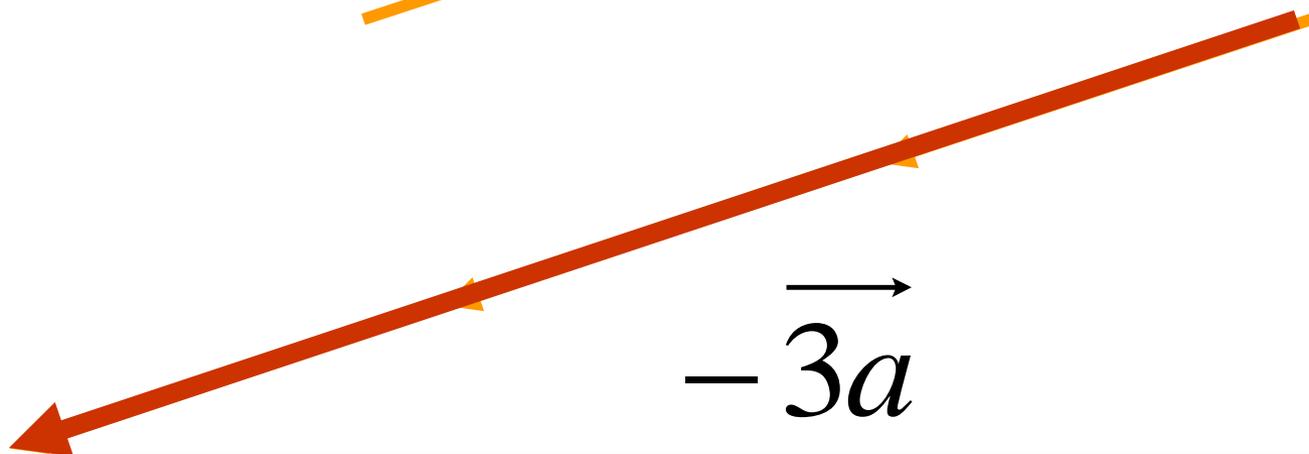
Произведением вектора \vec{a} на число α называется вектор, такой что:

$$1) |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|, \quad 2) \vec{b} \parallel \vec{a}.$$

\vec{a}
 $-3a$



\vec{a}

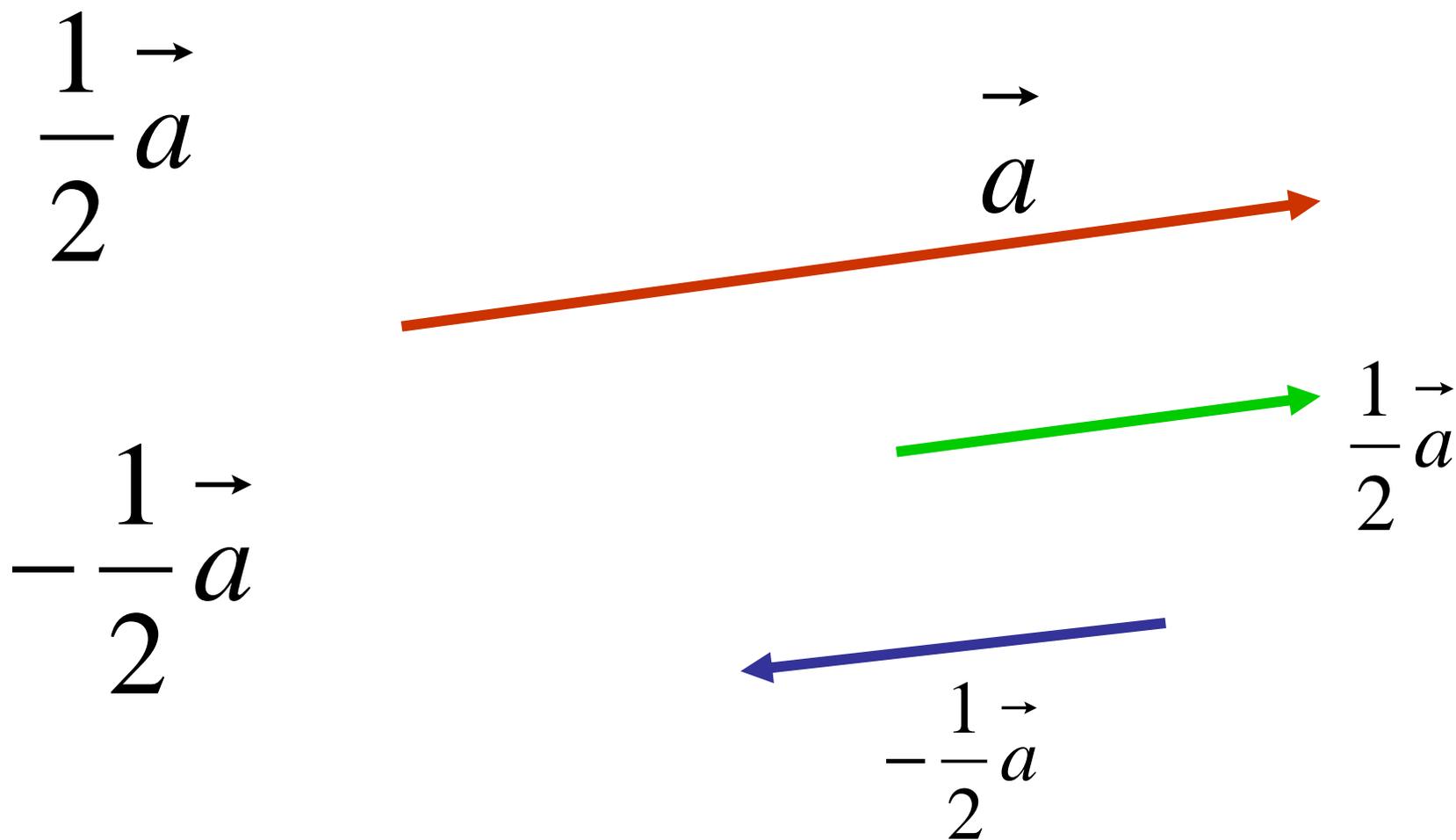


\vec{a}
 $-3a$



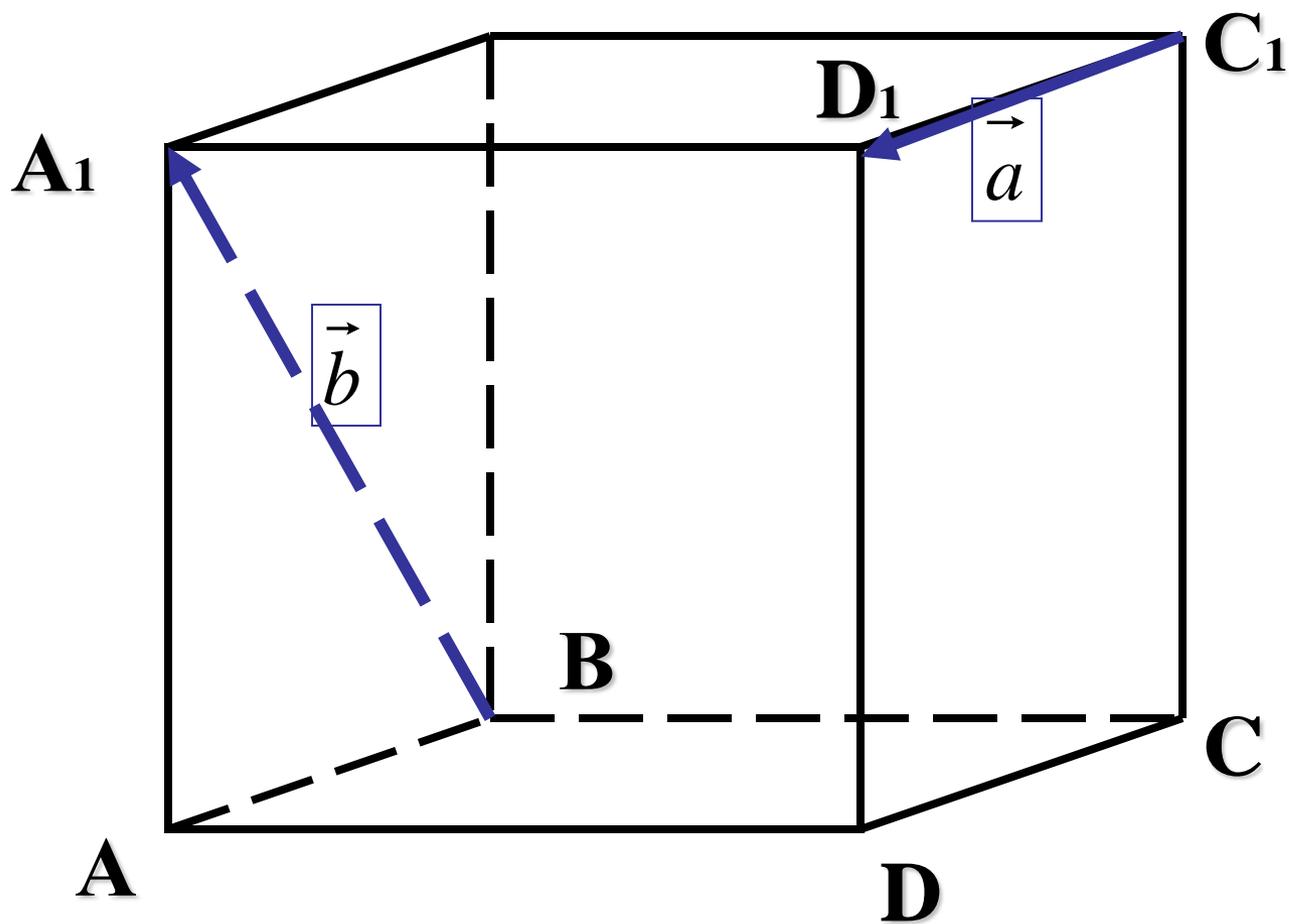
§ 2. Действия над векторами.

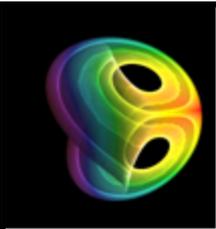
Умножение вектора на число





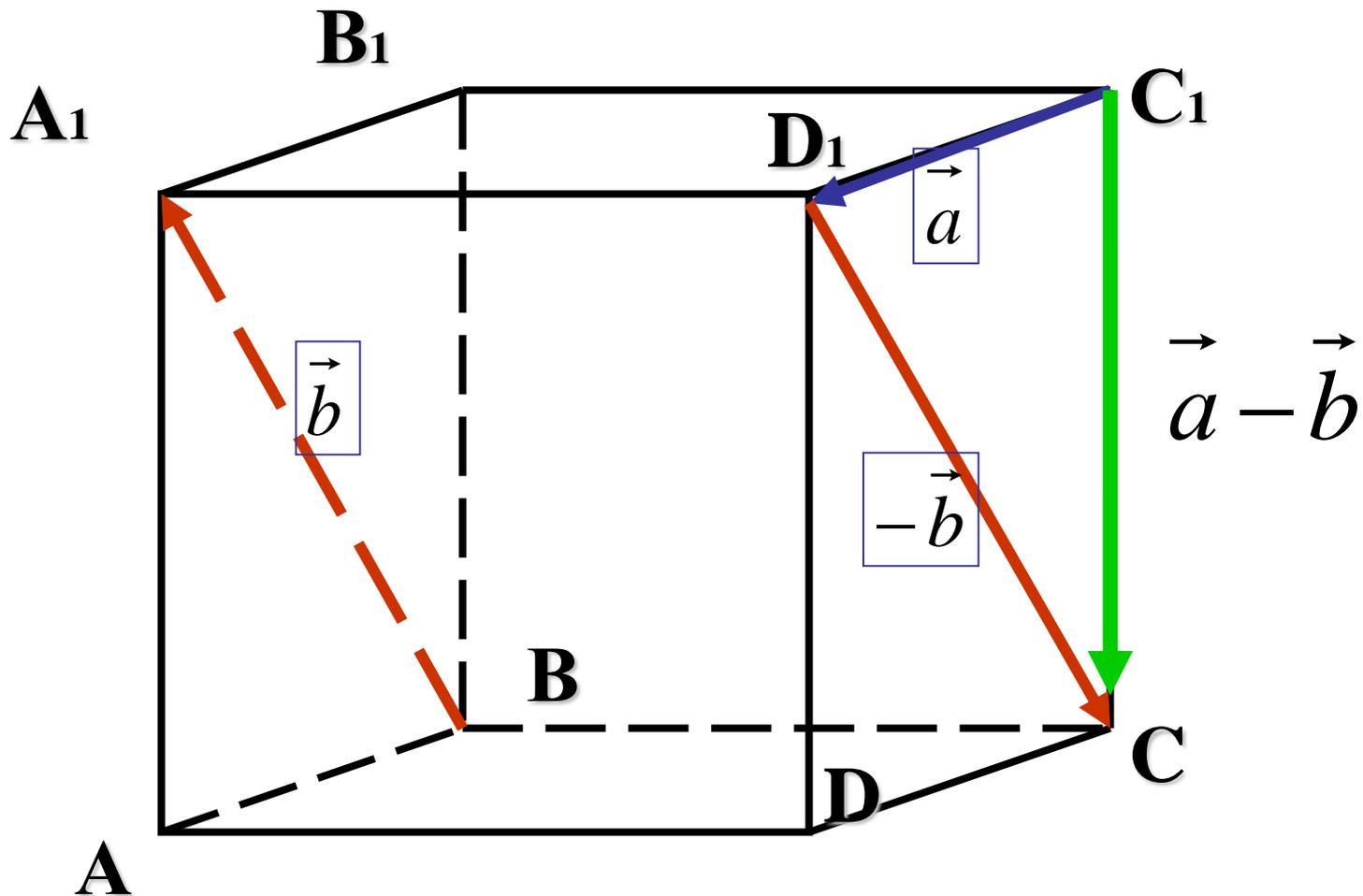
§ 2. Действия над векторами.





§ 2. Действия над векторами.

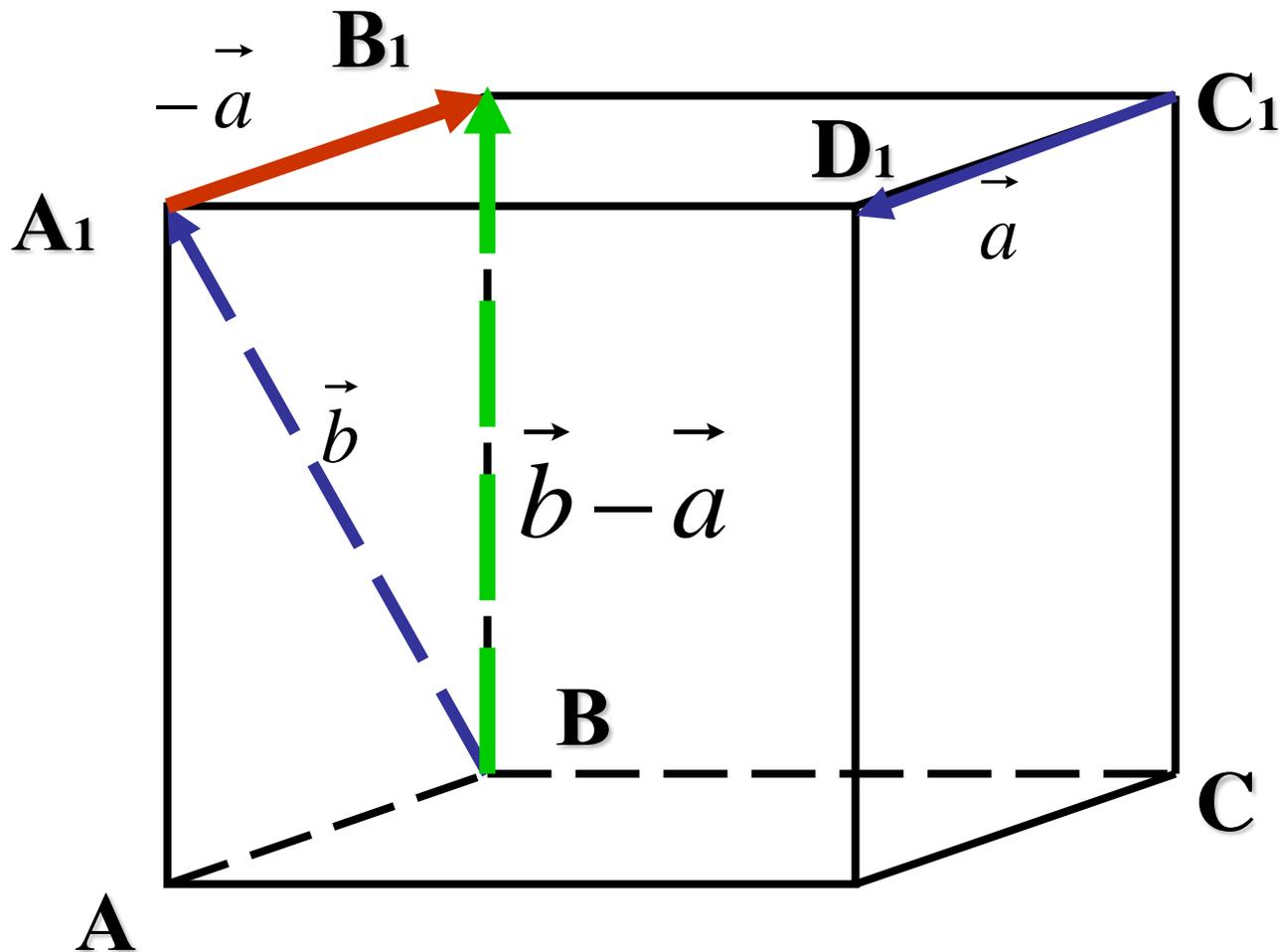
$$\vec{a} - \vec{b}$$





§ 2. Действия над векторами.

$$\vec{b} - \vec{a}$$





Линейная независимость векторов.

Определение 1. *Линейной комбинацией* векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$

называется вектор

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n},$$

где λ_i – некоторые числа.

Определение 2. Вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют действительные числа λ_i , такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля, и при этом выполняется равенство:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = 0.$$

Определение 2. Вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ называются *линейно независимыми*,

если из условия $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = 0$

следует тривиальная комбинация $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.



Теорема 1. Для линейной зависимости векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть вектора линейно зависимы. Тогда существуют числа λ_j , не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = 0$.

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\overline{a_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overline{a_2} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \overline{a_n}$, что доказывает необходимость.

Достаточность.

Пусть для определенности $\overline{a_1} = \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n}$.

Тогда $(-1)\overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_n \overline{a_n} = 0$, причем $|-1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$.

Это и есть условие линейной зависимости.



Для линейно зависимых векторов справедливы теоремы 2–6.

Теорема 2. Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.

Теорема 3. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Теорема 4. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы. Тогда существуют не равные одновременно нулю три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такие, что

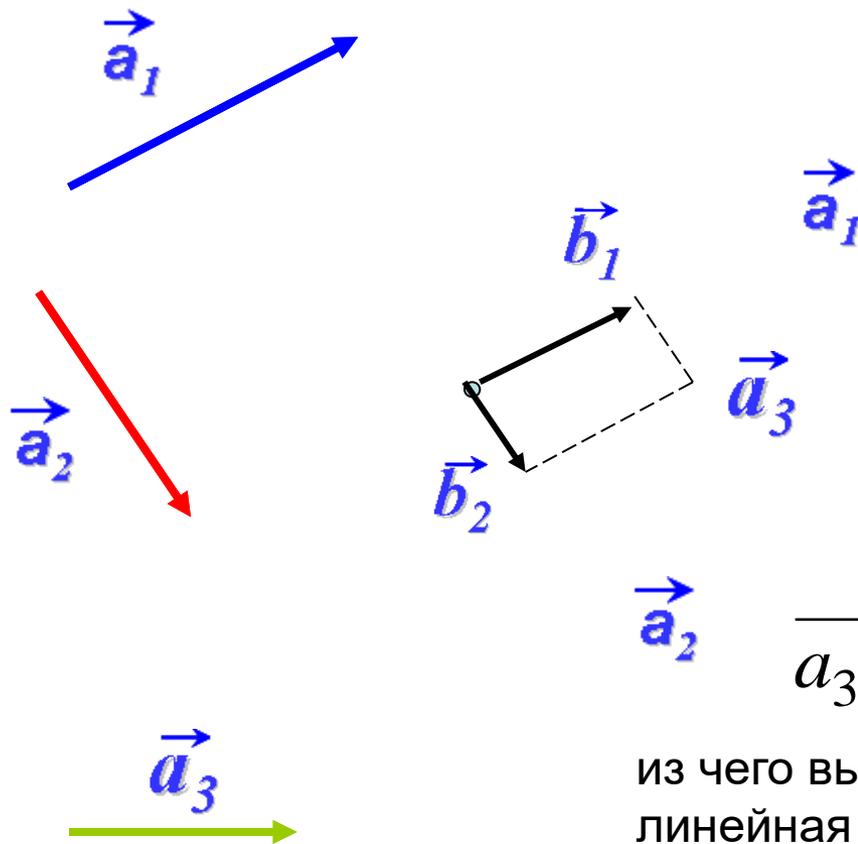
$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Тогда по теореме 1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны.



Достаточность.

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарны, и пусть вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 неколлинеарны.



$$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$$
$$\vec{a}_2 \parallel \vec{b}_2 \Rightarrow \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

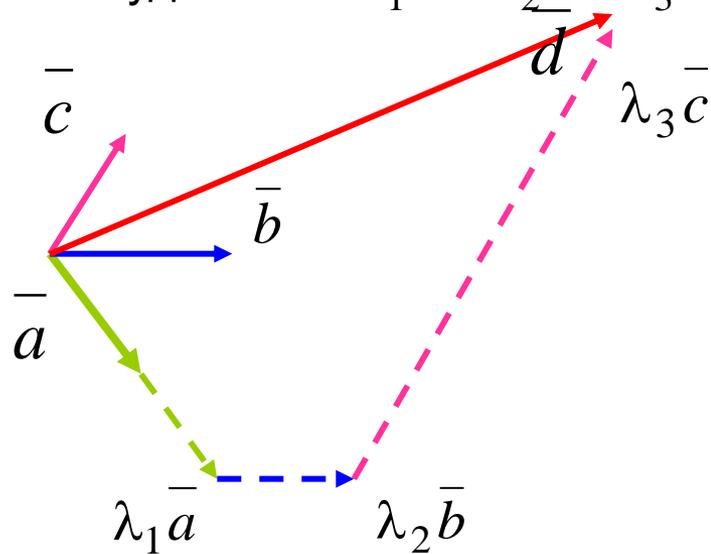
из чего вытекает (вследствие теоремы 1)
линейная зависимость векторов



Теорема 5. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Действительно, можно подобрать, причем единственным образом, такие

числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, что будет $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$.



Теорема 6. Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ имеется хотя бы один нулевой вектор, то вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы.



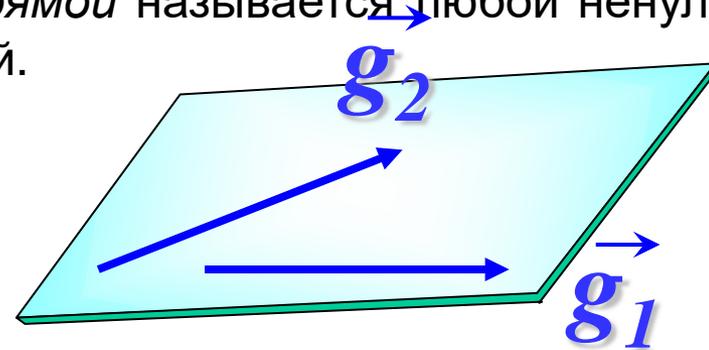
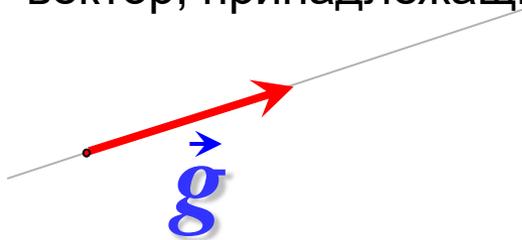
Свойства линейно независимых векторов:

- Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.
- Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.
- Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.



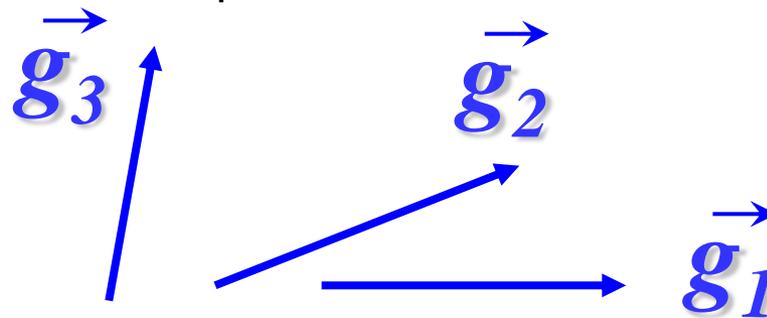
Базис. Координаты вектора в базисе.

Определение 1. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.



Определение 2. *Базисом на плоскости* называется любая пара линейно независимых векторов, лежащих на этой плоскости.

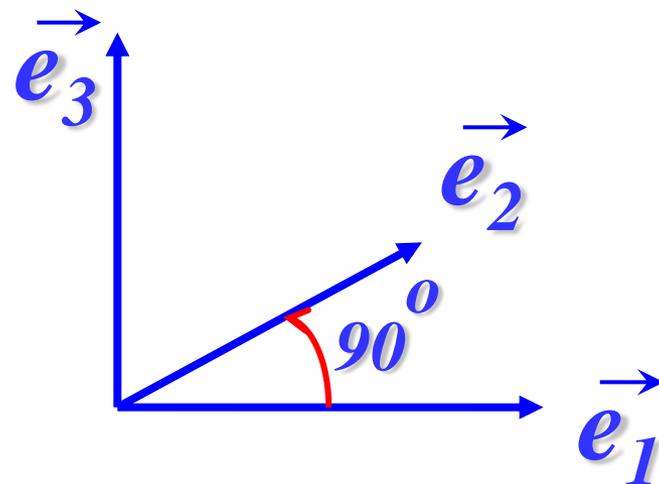
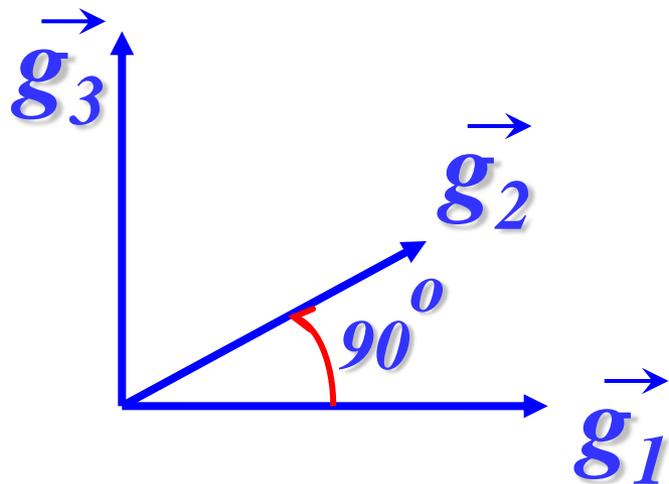
Определение 3. *Базисом в пространстве* называется любая тройка линейно независимых векторов.



Будем обозначать базис в пространстве, составленный из линейно независимых векторов, как $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$.



Определение 4. Базис называется *ортогональным*, если образующие его вектора попарно перпендикулярны.



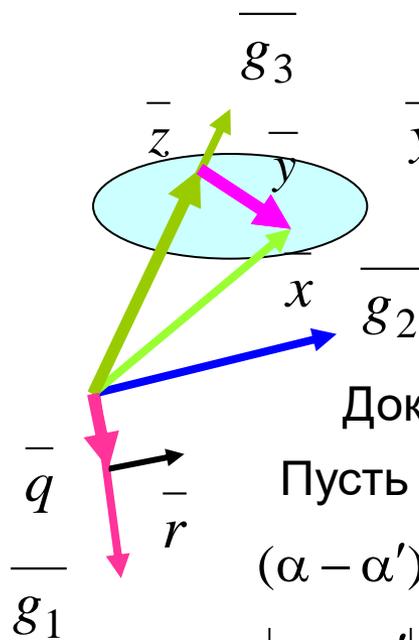
Определение 5. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его вектора имеют единичную длину.

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \right| &= 1 \\ \left| \begin{array}{c} \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \right| &= 1 \\ \left| \begin{array}{c} \vec{e}_3 \end{array} \right| &= 1 \end{aligned}$$



Теорема 1. Любой вектор \bar{x} в пространстве с базисом $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ может быть представлен, и причем единственным способом, в виде $x = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$, где α, β, γ – некоторые числа.

Доказательство. Докажем вначале, что такие числа существуют.



$\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$, и в силу коллинеарности $\bar{z} = \gamma \bar{g}_3$.

$\bar{y} = \bar{q} + \bar{r}$, и в силу коллинеарности $\bar{q} = \alpha \bar{g}_1, \bar{r} = \beta \bar{g}_2$.

Следовательно, $\bar{y} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2$ и

$$\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3.$$

Докажем единственность разложения по данному базису.

Пусть $\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3; \bar{x} = \alpha' \bar{g}_1 + \beta' \bar{g}_2 + \gamma' \bar{g}_3$.

$$(\alpha - \alpha') \bar{g}_1 + (\beta - \beta') \bar{g}_2 + (\gamma - \gamma') \bar{g}_3 = 0,$$

$$|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + |\gamma - \gamma'| \neq 0$$

Но это условие и означает, что вектора $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ являются линейно зависимыми и не могут образовывать базис. Это, в свою очередь, доказывает единственность разложения.



Определение 6. Числа α, β, γ в разложении $\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3$ называются *координатами* вектора \bar{x} в базисе $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$.

Координаты – величины скалярные.

Для краткой записи вектора $\bar{x} = \alpha \bar{g}_1 + \beta \bar{g}_2 + \gamma \bar{g}_3$ в координатном представлении будем использовать следующую форму: $\bar{x}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, т. е. каждому вектору в данном базисе можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу-строку.



В каждом конкретном базисе $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ каждый вектор находится во взаимно-однозначном соответствии с упорядоченной тройкой чисел α, β, γ – своими координатами. Возникает вопрос о том, как выполнять операции с векторами в координатном представлении.

С другой стороны, ранее были изучены матрицы и операции над ними, и целесообразно было бы свести операции с векторами в координатном представлении к матричным операциям.

Теорема 1. Два вектора

$$\overline{x} = \xi_1 \overline{g_1} + \xi_2 \overline{g_2} + \xi_3 \overline{g_3} \quad \text{и} \quad \overline{y} = \eta_1 \overline{g_1} + \eta_2 \overline{g_2} + \eta_3 \overline{g_3}$$

равны тогда и только тогда, когда равны матрицы координат

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}.$$



Теорема 2. Пусть в некотором базисе даны два вектора $\bar{x}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ и $\bar{y}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. Тогда в этом базисе

$$1) \alpha \bar{x} = \{\alpha \xi_1, \alpha \xi_2, \alpha \xi_3\},$$

$$2) \bar{x} + \bar{y} = \{\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3\}.$$

Иными словами: *при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число; при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.*



тема 3. Два вектора

$$\bar{x} = \xi_1 \bar{g}_1 + \xi_2 \bar{g}_2 + \xi_3 \bar{g}_3 \quad \bar{y} = \eta_1 \bar{g}_1 + \eta_2 \bar{g}_2 + \eta_3 \bar{g}_3 \quad \text{на}$$

плоскости линейно зависимы тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты в некотором базисе пропорциональны, т. е.

Доказательство.
$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Необходимость. Пусть вектора \bar{x} и \bar{y} линейно зависимы, тогда по

теореме 3.1 $\bar{x} = \lambda \bar{y}$, или в координатной форме
$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda \eta_1 \\ \xi_2 = \lambda \eta_2 \end{cases}$$

Исключив λ из этих уравнений, получаем

$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$, что и означает равенство нулю определителя.

Достаточность. Пусть
$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$
 Тогда $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$,

откуда
$$\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}.$$
 Таким образом, вектора \bar{x} и \bar{y}

пропорциональны, а, значит, и линейно зависимы.



Теорема 4. Три вектора в пространстве

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3, \quad \vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3 \quad \text{и} \quad \vec{z} = \kappa_1 \vec{g}_1 + \kappa_2 \vec{g}_2 + \kappa_3 \vec{g}_3$$

линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие. Равенства $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0$

соответственно являются необходимыми и достаточными условиями коллинеарности пары векторов на плоскости и компланарности тройки векторов в пространстве.



Пример 1. Показать, что вектора $\bar{a}\{3; -1; 2\}$, $\bar{b}\{1; -2; 0\}$, $\bar{c}\{-1; 7; 1\}$ образуют базис в трехмерном пространстве.

Решение.

Вычислим определитель, столбцы которого представляют координаты векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Так как определитель отличен от нуля, то столбцы линейно независимы, т. е. указанные вектора образуют базис.



Пример 2.

Разложить вектор \bar{c} по базису $\{\bar{p}; \bar{q}; \bar{r}\}$, где $\bar{c}\{11; -6; 5\}$,
 $\bar{p}\{3; -2; 1\}$, $\bar{q}\{-1; 1; -2\}$, $\bar{r}\{2; 1; -3\}$.

Решение.

Разложим вектор \bar{c} по базису $\{\bar{p}; \bar{q}; \bar{r}\}$ с неопределенными коэффициентами α, β, γ :

$$\bar{c} = \alpha \bar{p} + \beta \bar{q} + \gamma \bar{r}.$$

В координатах это разложение представляет собой систему трех уравнений относительно α, β, γ :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 11 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -6 \\ \alpha - 2\beta - 3\gamma = 5 \end{cases}$$

Имеем:

$\Delta = 8$; $\Delta_{\alpha} = 16$; $\Delta_{\beta} = -24$; $\Delta_{\gamma} = 8$; откуда по правилу Крамера

$$\alpha = 2; \quad \beta = -3; \quad \gamma = 1.$$

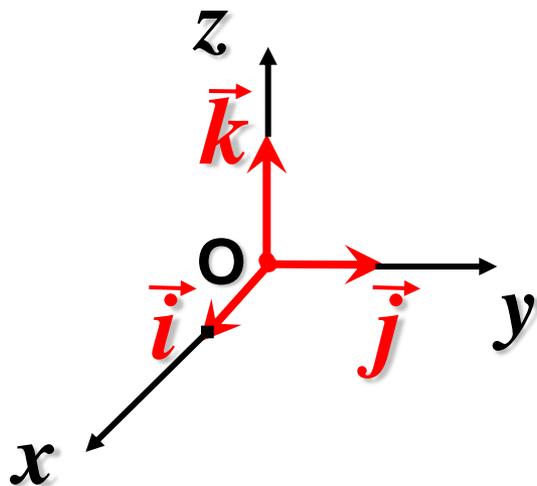
Ответ: $\bar{c} = 2\bar{p} - 3\bar{q} + \bar{r}$.



Декартова система координат.

Определение 1. Совокупность базиса $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ и точки O , в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$.

Определение 2. Система координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, состоящая из ортонормированного ортогонального базиса и точки O , называется *прямоугольной декартовой системой координат*.



Ox – ось абсцисс

Oy – ось ординат

Oz – ось аппликат



Рене Декарт
1596 — 1650,
— французский математик,,
создатель аналитической
геометрии и современной
алгебраической символики,

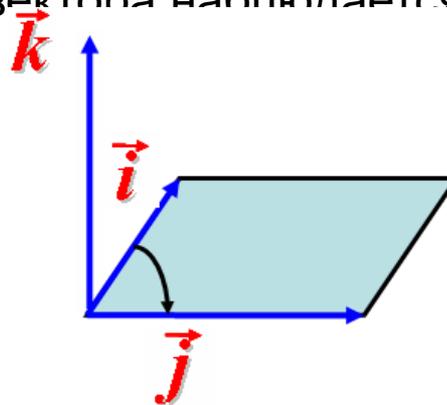
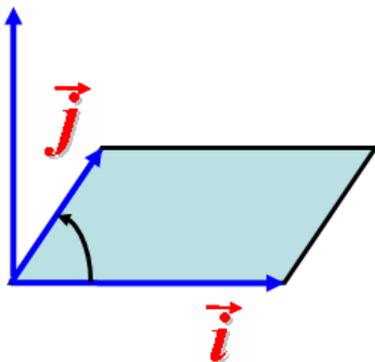
Родился в городе Лаэ (ныне г. Декарт).

Декарт ввел математическую
символику, близкую к современной.
Коэффициенты он обозначал a, b, c, \dots ,
а неизвестные — x, y, z . Натуральный
показатель степени принял
современный вид. Появилась черта над
подкоренным выражением.



$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

Определение. Упорядоченная тройка ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется *правой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается против часовой стрелки. \vec{k}



Определение. Упорядоченная тройка ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется *левой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается по часовой стрелки.

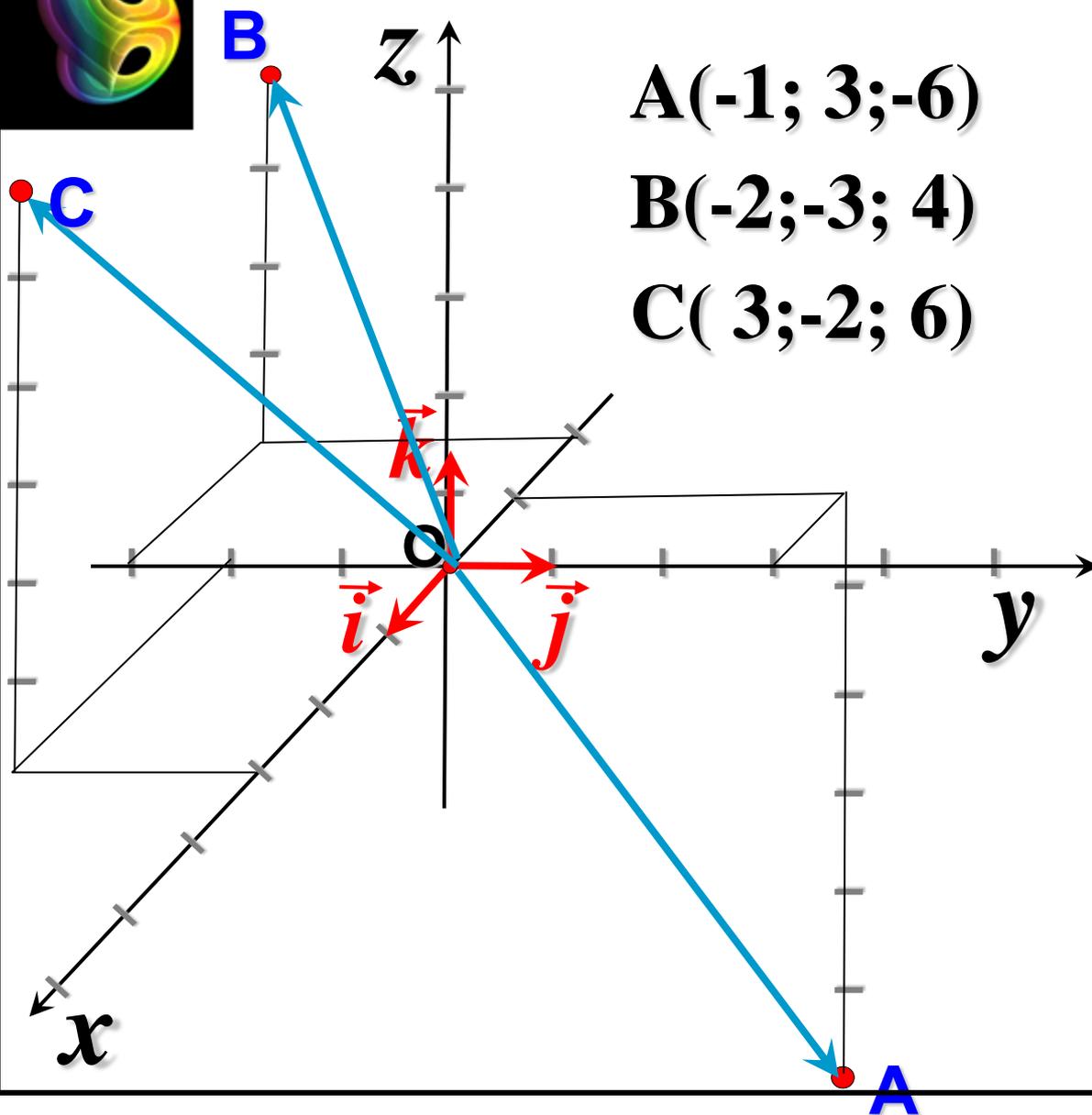


Если задана система координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор \bar{r} , начало которого находится в точке O , а конец в точке M .

Определение 3. Вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M в системе координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Определение 4. Координаты радиус-вектора точки M называются *координатами точки* M в системе координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.





$$A(-1; 3; -6)$$

$$B(-2; -3; 4)$$

$$C(3; -2; 6)$$

$$\vec{OA}\{-1; 3; -6\}$$

$$\vec{OB}\{-2; -3; 4\}$$

$$\vec{OC}\{ 3; -2; 6\}$$



§ 6. Декартова система координат.

Задача 1. Выразить координаты вектора \vec{AB} через координаты его начала A и конца B .

Из $\triangle AOB$, $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$

$B(x_2; y_2; z_2)$

$$\vec{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$$

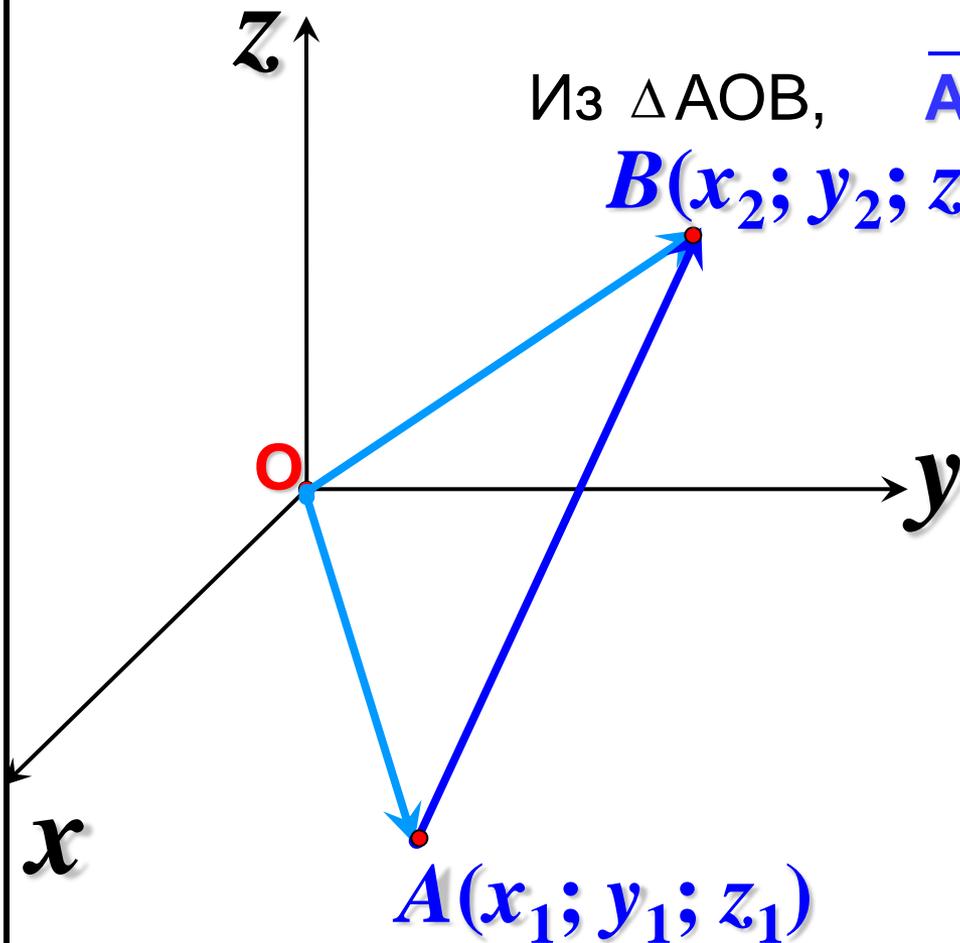
$$\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$-\vec{OA}\{-x_1; -y_1; -z_1\}$$

+

$$\vec{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{AB}\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$$





§ 6. Декартова система координат.

Задача 2

(условие коллинеарности двух векторов в координатной форме).

Пусть два вектора $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$ коллинеарны.

Тогда по теореме 3.1 существует такое число λ , при котором

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \text{ т. е. } a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \lambda (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \lambda b_x \\ a_y &= \lambda b_y \\ a_z &= \lambda b_z \end{aligned} \right\} \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

– условие коллинеарности двух векторов.

Если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны.



§ 6. Декартова система координат.

Пример 1. Коллинеарны ли вектора

$$\vec{a} \{2; 6; -3\}; \vec{b} \{6; 18; -9\}$$

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{-9}{-3} = \frac{1}{3} \quad \vec{b} = 3\vec{a} \text{ или } \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

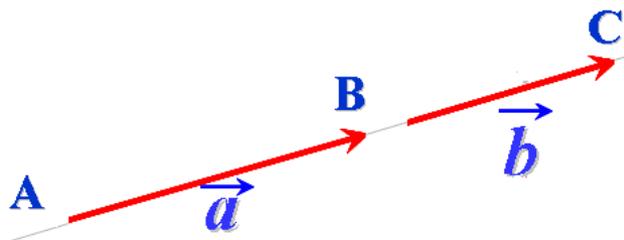
Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.



Пример 2.

В декартовой системе координат $A(1,3,0)$, $B(2,0,-1)$, $C(3,-3,-2)$. Доказать, что точки A , B , C лежат на одной прямой.

Решение



Очевидно, точки A , B , C лежат на одной прямой, если векторы $\overline{AB}\{\xi_1, \eta_1, \kappa_1\}$ и $\overline{AC}\{\xi_2, \eta_2, \kappa_2\}$ коллинеарны.

Для этого необходимо выполнение условия:

$$\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{AC}.$$

Отсюда следует (теорема 5.2), что координаты векторов \overline{AB} и \overline{AC} должны быть пропорциональны.

$$\overline{AB}\{1, -3, -1\}; \overline{AC}\{2, -6, -2\}; \quad \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{-1}{-2}.$$

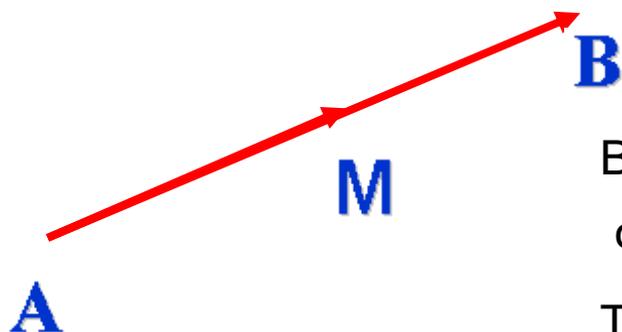
Таким образом, точки A , B , C лежат на одной прямой.



Задача 3

(деление отрезка в данном отношении). В декартовой системе координат заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.
Найти координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок AB в отношении λ :

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda.$$



Решение

Векторы \overline{AM} и \overline{MB} коллинеарны, сонаправлены, отношение их длин равно λ .

Тогда $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

Переходя к равенству соответствующих координат, получим:

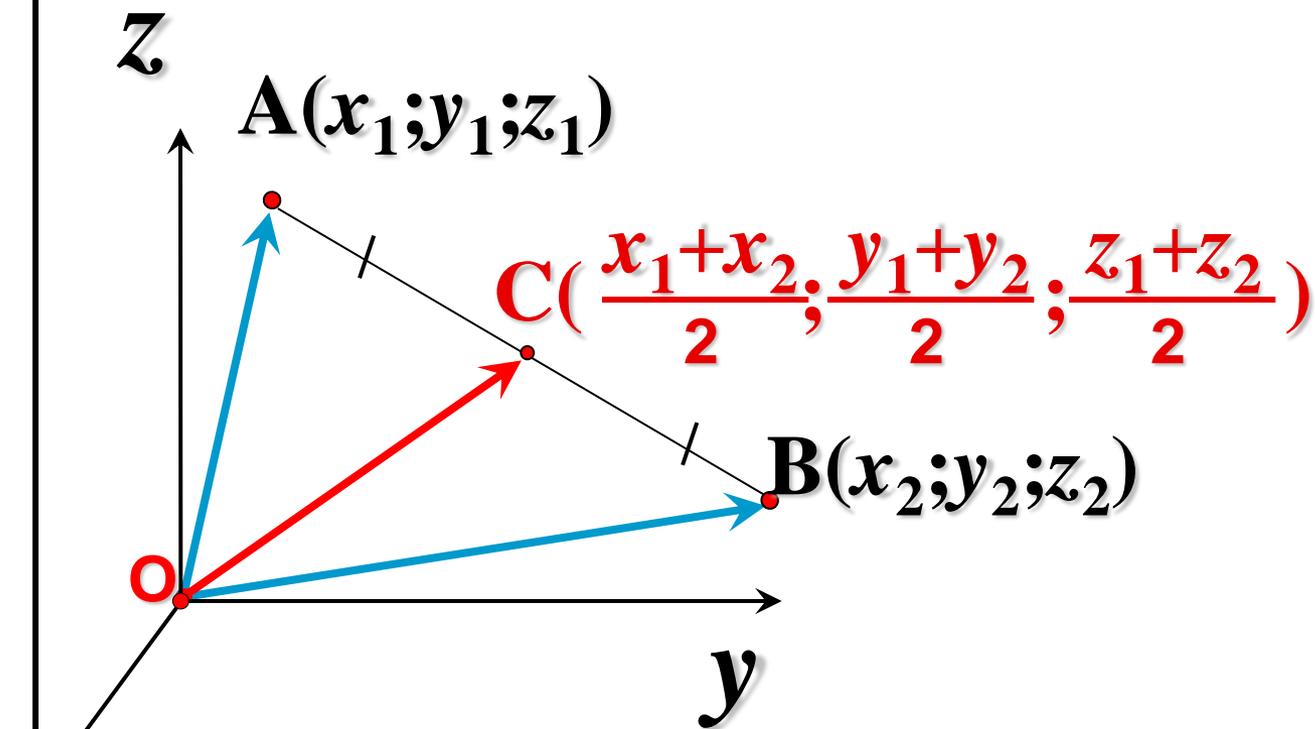
$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Выражая отсюда x, y, z , получим для координат точки M :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$



В частности, координаты середины отрезка ($\lambda=1$) равны полусумме соответствующих координат его концов.



$$\vec{OC} \left\{ \frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2} \right\}$$

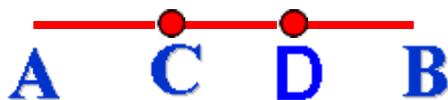


§ 6. Декартова система координат.

Пример.

Разделить отрезок AB ($A(3,5; 1)$, $B(2; 2)$) на три равные части.

Решение



$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

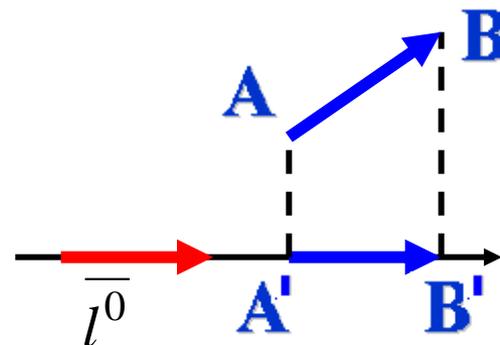
$$\lambda_c = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{1}{2}, \quad x_c = \frac{3,5 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = 3, \quad y_c = \frac{1 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = \frac{4}{3}.$$

$$\lambda_D = \frac{|AD|}{|DB|} = 2, \quad x_D = \frac{3,5 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = 2,5; \quad y_D = \frac{1 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{5}{3}.$$



§ 7. Проекция вектора на ось.

Пусть вектор \overline{AB} лежит на некоторой оси l . Направление орта $\overline{l^0}$ соответствует направлению оси.



Определение 1. *Проекцией вектора*, лежащего на оси, на эту ось называется число, по абсолютной величине равное длине вектора и взятое со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси и со знаком минус, если они противоположны.

Пусть вектор \overline{AB} не лежит на некоторой оси l . Из точек A и B опустим перпендикуляры на ось. Вектор $\overline{A'B'}$ называется *компонентой вектора* по оси l . \overline{AB}

Определение 2. *Проекцией вектора, не лежащего на оси l* , на эту ось называется проекция его компоненты по оси l на эту же ось.

Проекция вектора на ось обычно обозначается так: $\text{пр}_l \overline{AB}$.



§ 7. Проекция вектора на ось.

Свойства проекций вектора на ось:

1. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \theta, \text{ где } \theta \text{ – угол между вектором и осью.}$$

2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту же ось, т. е. $\text{пр}_l(\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}$.

3. Проекция на ось вектора, умноженного на число, равна произведению проекции вектора на это число, т. е.

$$\text{пр}_l(\lambda \overline{a}) = \lambda \text{пр}_l \overline{a}.$$

4. Проекции на ось двух равных векторов равны между собой.



Проекция вектора на ось.

Рассмотрим теперь вопрос о разложении вектора по координатным осям.



$$\vec{a} \{x; y; z\}$$

$$\vec{OA}_1 = x\vec{i}$$

$$\vec{OA}_2 = y\vec{j}$$

$$\vec{OA}_3 = z\vec{k}$$

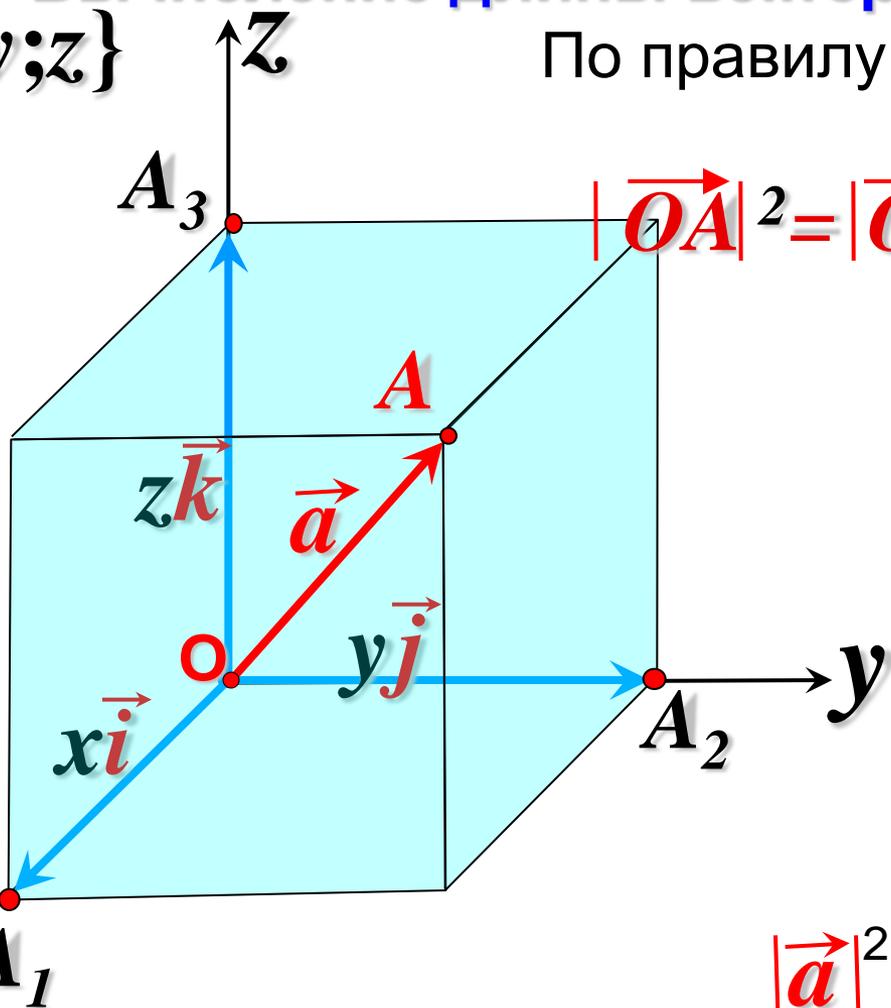
$$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$$

x Такое представление вектора называется разложением его на *компоненты* (или *составляющие*) по координатным осям.

Вычисление длины вектора по его координатам

$\vec{a} \{x; y; z\}$

По правилу параллелепипеда



$$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OA}_1|^2 + |\vec{OA}_2|^2 + |\vec{OA}_3|^2$$

$$|\vec{OA}_1| = |xi| = |x|$$

$$|\vec{OA}_2| = |yj| = |y|$$

$$|\vec{OA}_3| = |zk| = |z|$$

$$|\vec{a}|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Направляющие косинусы вектора.

Если $a_x; a_y; a_z$ – проекции вектора на координатные оси, то ясно, что имеют место формулы:

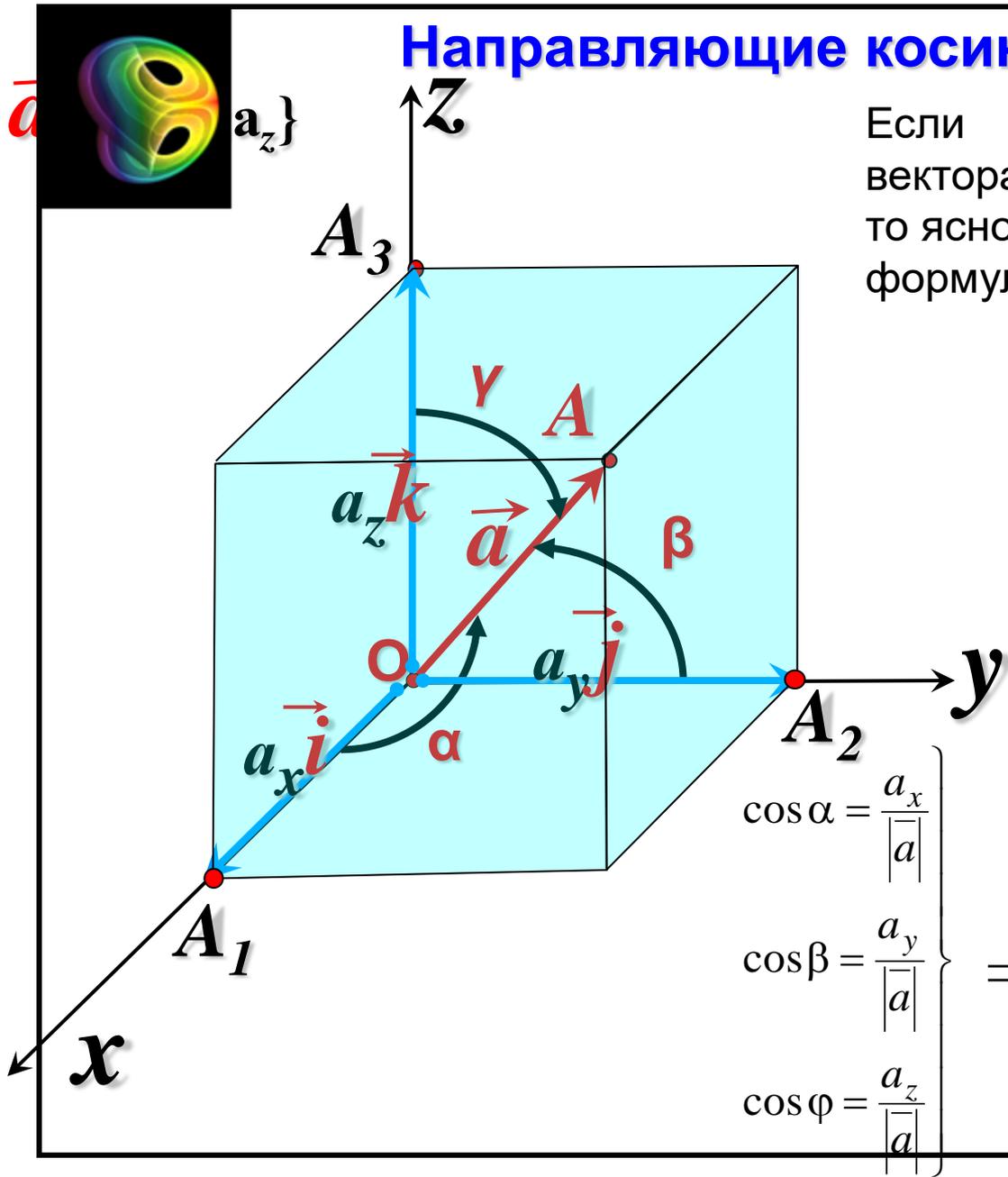
$$\left. \begin{aligned} a_x &= |\vec{a}| \cos \alpha \\ a_y &= |\vec{a}| \cos \beta \\ a_z &= |\vec{a}| \cos \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$





Проекция вектора на ось.

Пример 1. Даны точки $A(1, -1, 2)$ и $B(3, 2, 3)$.

Найти: Координаты вектора \overline{AB} :

$$\overline{AB} = \{3 - 1, 2 - (-1), 3 - 2\} = \overline{AB} = \{2, 3, 1\}.$$

Найти: Длину вектора \overline{AB} :

Так как $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, значит $|\overline{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$.

Найти: Разложение вектора \overline{AB} по базису;

Так как $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$, значит $\overline{AB} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

Найти: Направляющие косинусы вектора \overline{AB} :

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Найти: Единичный вектор (орт), соответствующий вектору \overline{AB} :

Так как $\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, значит $\overline{a^0} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\}$.



Проекция вектора на ось.

Пример 2.

Дан вектор $\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ и точки $B(1, 2, -1)$ и $C(2, 2, 5)$.

Найти координаты вектора \overline{AC} .

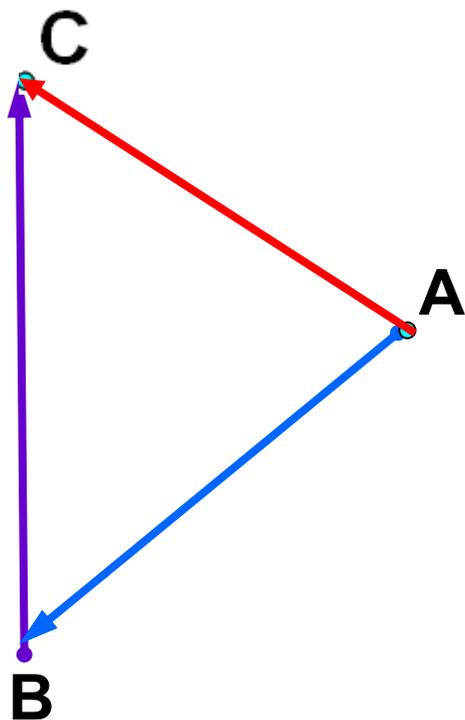
Решение

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Найдем координаты вектора \overline{BC} :

$$\overline{BC} \{1, 0, 6\}.$$

$$\overline{AC} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k} + \bar{i} + 6\bar{k} = 2\bar{i} + \bar{j} + 8\bar{k}.$$





Проекция вектора на ось.

Пример 3.

Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ вектора $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k}$ коллинеарны.

Решение

Два вектора коллинеарны, если существует некая константа c такая, что имеет место соотношение

$$\vec{a} = c\vec{b}.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = c(\vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k}),$$

откуда

$$(\lambda - c)\vec{i} + (2 - c)\vec{j} + (3 - \mu c)\vec{k} = 0.$$

Так как орты линейно независимы, ибо они представляют собою базис, то должны обращаться в нуль коэффициенты этой линейной комбинации, т. е.

$$\begin{cases} \lambda - c = 0 \\ 2 - c = 0 \\ 3 - \mu c = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \lambda = 2, \mu = \frac{3}{2}.$$

&3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ



Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скаляр – лат. *scale* – лестница, шкала.

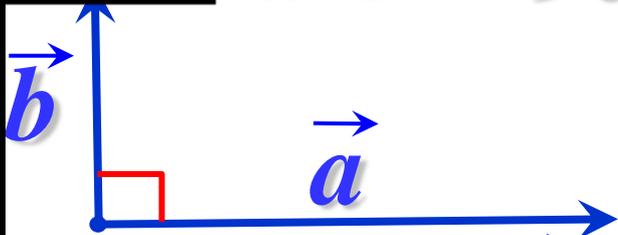
Ввел в 1845г. У. Гамильтон, ирландский математик.

Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \perp \vec{b} = 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$



Если векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны.

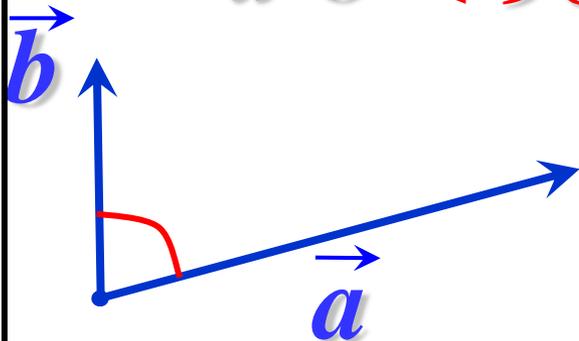
Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \vec{b} < 90^\circ$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

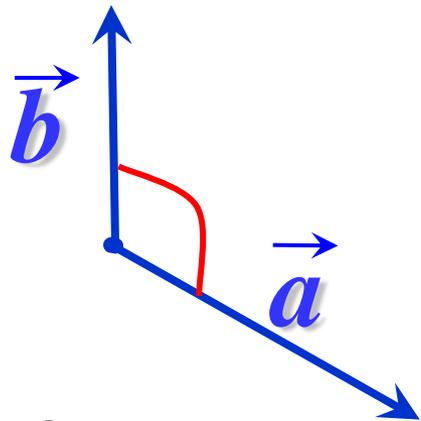
Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \vec{a} \vec{b} < 90^\circ$$

Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \vec{b} > 90^\circ$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \vec{a} \vec{b} > 90^\circ$$

Скалярное произведение векторов.

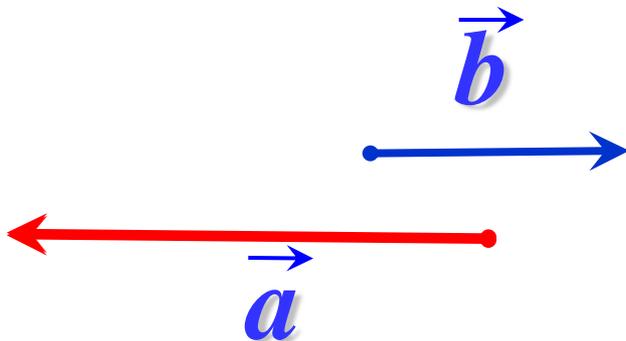
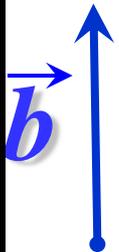
Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Если $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

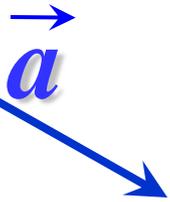
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



Скалярное произведение векторов.



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0^0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора \vec{a} и обозначается \vec{a}^2

Таким образом, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ откуда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Длина вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата.



Скалярное произведение векторов.

Свойства скалярного произведения:

$$1) \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}.$$

Действительно, $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b})$, тогда

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}.$$

Отсюда следует формула для нахождения проекции одного вектора на другой:

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

2) Переместительное или коммутативное свойство: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$

3) Сочетательное (ассоциативное) свойство: $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a} \cdot \bar{b}).$

4) Распределительное (дистрибутивное) свойство относительно сложения векторов:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$



Скалярное произведение векторов.

Выведем формулу скалярного произведения в координатной форме.

$$\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\} \quad \vec{b} \{b_x; b_y; b_z\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

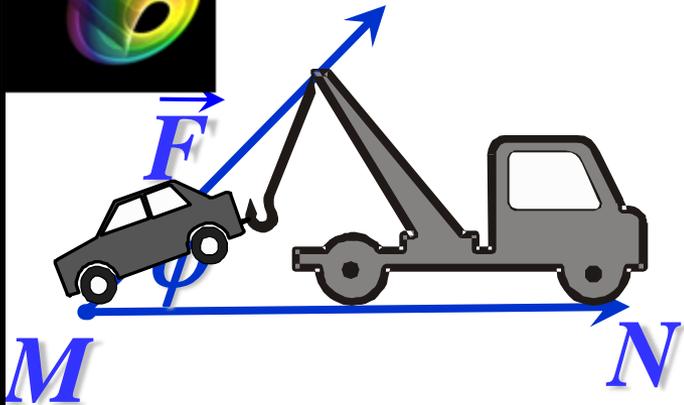
т.к.

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

В частности,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Скалярное произведение векторов.



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы \vec{F} при перемещении тела из точки M в точку N равна произведению силы \vec{F} и перемещения \vec{MN} на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \varphi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



Скалярное произведение векторов.

Скалярное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

1. Нахождение угла между двумя векторами.

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \arccos \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда нетрудно получить **условие ортогональности (перпендикулярности)** двух векторов в координатной форме:

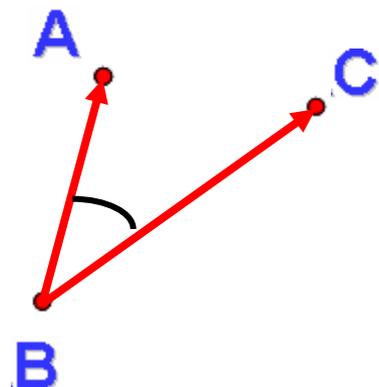
$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$



Скалярное произведение векторов.

Пример 1. Даны вершины треугольника: $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$. Найти $\angle ABC$.

Решение



$$\cos \angle ABC = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|}.$$

$$\overline{BA}\{1, -2, 2\}, \quad |\overline{BA}| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\overline{BC}\{-1, -1, 4\}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2},$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -1 + 2 + 8 = 9,$$

$$\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \angle ABC = 45^\circ.$$

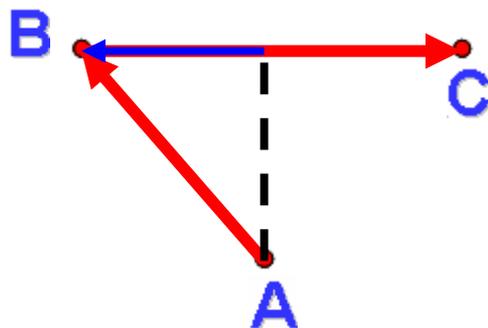


Скалярное произведение векторов.

2. Нахождение проекции одного вектора на направление другого

Пример 2. Даны три точки $A(2; 3; 5)$, $B(1; 2; 2)$, $C(3; 5; 4)$. Найти $\text{пр}_{\overline{BC}} \overline{AB}$.

Решение



$$\overline{BC} \{2, 3, 2\}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17},$$

$$\overline{AB} \{-1, -1, -3\}, \quad |\overline{AB}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -2 - 3 - 6 = -11,$$

$$\text{пр}_{\overline{BC}} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}.$$



Скалярное произведение векторов.

3. Нахождение длины вектора.

Пример 3. Дан вектор $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Найти длину вектора \vec{a} .

Решение

$|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$. Найдем скалярный квадрат вектора \vec{a} .

$$a^2 = (\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = m^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} + n^2 =$$

$$= |\vec{m}|^2 + 2|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} + 4 = 8 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

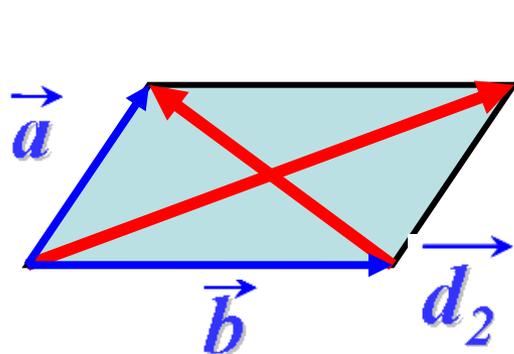
$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2} = 2\sqrt{3}.$$



Скалярное произведение векторов.

Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где \vec{m}, \vec{n} – единичные векторы, угол между которыми равен 60° .

Решение



$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= \vec{a} + \vec{b} & \vec{d}_1 &= 3\vec{m} - \vec{n} \\ \vec{d}_2 &= \vec{a} - \vec{b} & \vec{d}_2 &= \vec{m} + 3\vec{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{d}_1|^2 &= (3\vec{m} - \vec{n}) \cdot (3\vec{m} - \vec{n}) = 9|\vec{m}|^2 - 6\vec{m} \cdot \vec{n} + |\vec{n}|^2 = \\ &= 9|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + |\vec{n}|^2 = 9 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 1 = 7. & |\vec{d}_1| &= \sqrt{7} \\ |\vec{d}_2|^2 &= (\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 3\vec{n}) = |\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos(\vec{m} \wedge \vec{n}) + 9|\vec{n}|^2 = 13. \\ & & |\vec{d}_2| &= \sqrt{13}\end{aligned}$$



Скалярное произведение векторов.

Доказательство ортогональности векторов

Пример 5. При каком значении α ортогональны вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение

Принимая во внимание условие ортогональности двух векторов $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$, получим $1 \cdot 2 + 2 \cdot \alpha + 1 \cdot 2 = 0$. $\alpha = -2$

5) Задачи с механическим содержанием

Пример 6. Даны три постоянные силы $\vec{F}_1\{5; 3; -2\}$, $\vec{F}_2\{2; -4; 6\}$, $\vec{F}_3\{1; 7; 3\}$, приложенные в одной точке. Найти работу равнодействующей этих сил на прямолинейном перемещении из положения $M_1(4,4,6)$ в положение $M_2(7,5,2)$.

Решение

Равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$.

Вектор перемещения $\vec{S} = \overline{M_1 M_2}\{3, 1, -4\}$.

Искомая работа $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 8 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) = 2$.



Векторное произведение векторов.

Введем еще одну операцию над векторами. Эта операция существует только в трехмерном векторном пространстве, на плоскости она не определена.

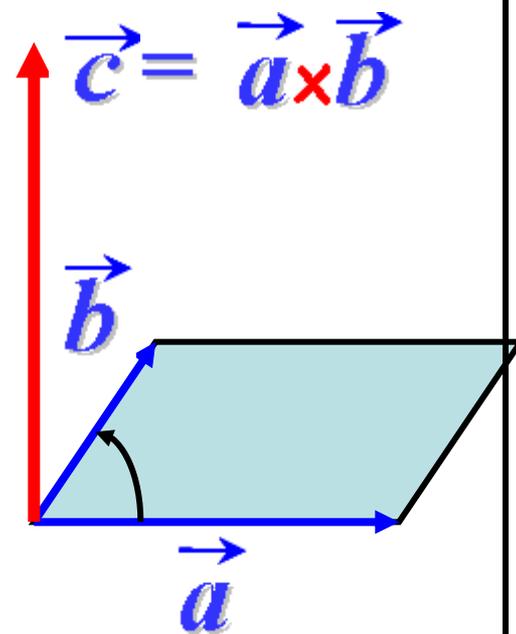
Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ называется вектор \vec{c} ,

удовлетворяющий трем требованиям:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$

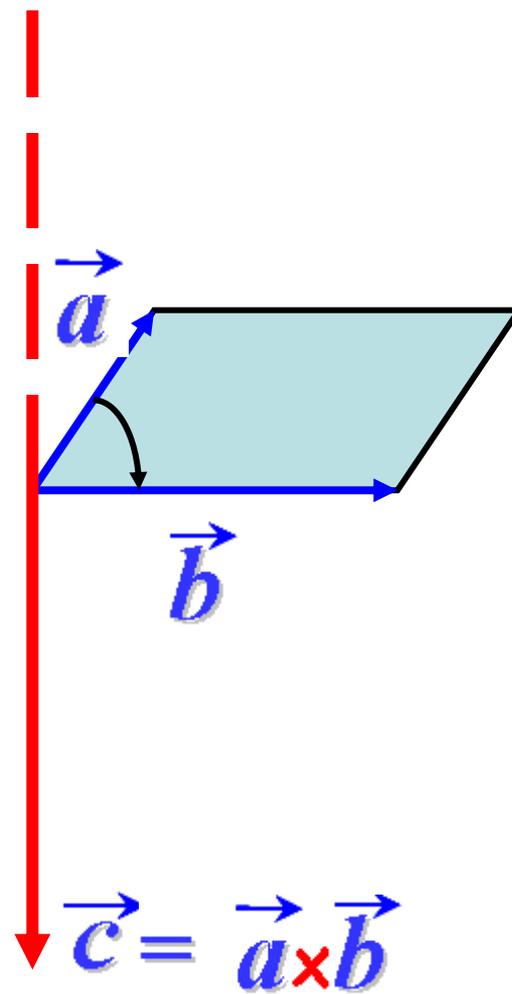
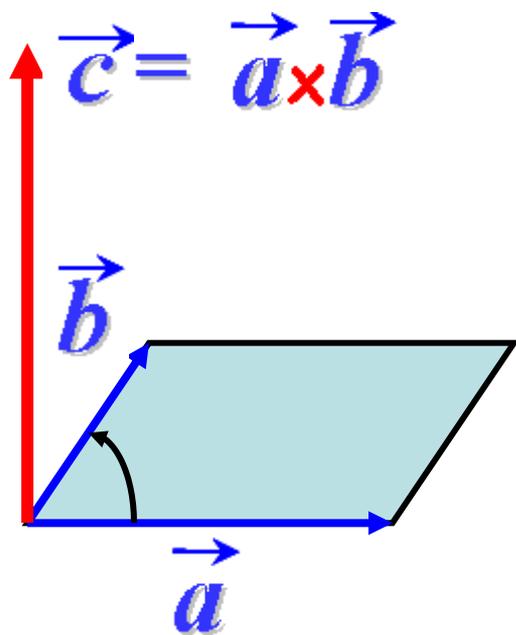
2) $\vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$

3) Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой.





Векторное произведение векторов.





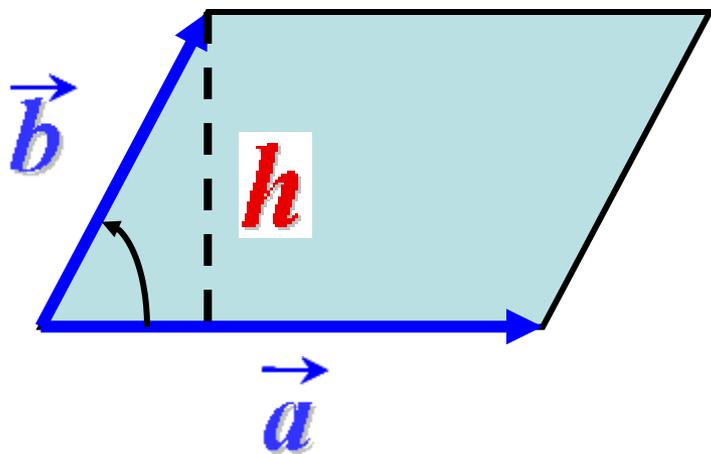
Векторное произведение векторов.

Геометрический смысл векторного произведения.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

$$|\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = h$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot h = S$$



Для неколлинеарных векторов модуль их векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.



Векторное произведение векторов.

Свойства векторного произведения:

$$1) \quad \bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$$

Свойство очевидно, так как синус – функция нечетная.

2) Свойство сочетательности относительно скалярного множителя:

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b}).$$

3) Распределительное свойство относительно сложения векторов:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c},$$

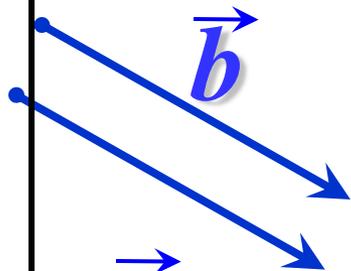
$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{d} + \bar{b} \times \bar{d}.$$



Векторное произведение векторов.

Если вектора коллинеарные, то

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ, 180^\circ$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 0^\circ = 0$$

Признак коллинеарности векторов:

Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было бы равно нулю.

В частности, имеем для ортов:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$



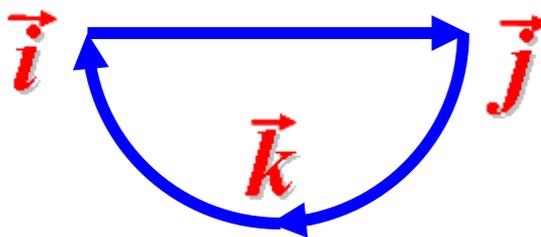
Векторное произведение векторов.

Рассмотрим векторные произведения различных ортов.

Очевидно, что векторное произведение двух различных ортов будет равно третьему орту, взятому:

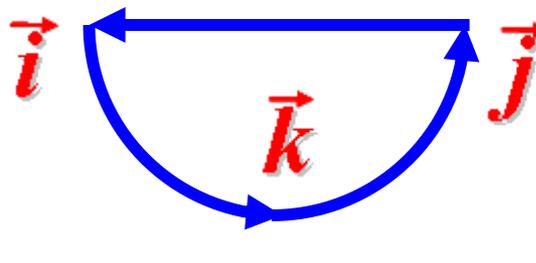
- со знаком **+**, если тройка ортов правая;
- со знаком **-**, если тройка ортов левая.

Если векторы правой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться правой тройкой.



Тогда $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
 $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Если векторы левой тройки изменять непрерывно, то в любой момент такой деформации эта тройка векторов будет оставаться левой тройкой.



Тогда $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
 $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$



Векторное произведение векторов.

Выразим теперь векторное произведение через координаты векторов, его составляющих.

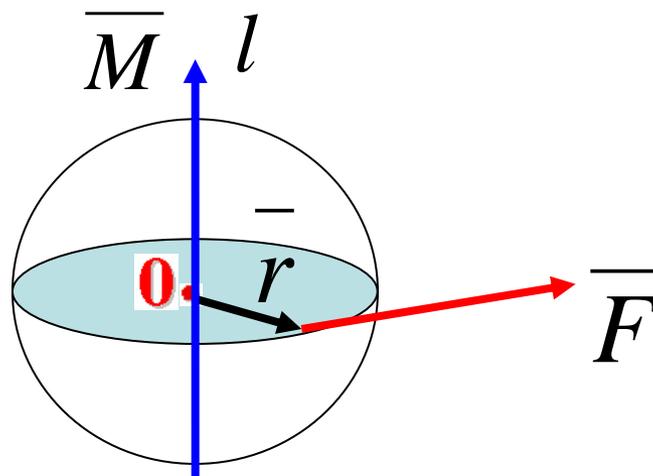
$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\ &= a_x b_x \bar{i} \times \bar{i} + a_y b_x \bar{j} \times \bar{i} + a_z b_x \bar{k} \times \bar{i} + a_x b_y \bar{i} \times \bar{j} + a_y b_y \bar{j} \times \bar{j} + a_z b_y \bar{k} \times \bar{j} + \\ &\quad + a_x b_z \bar{i} \times \bar{k} + a_y b_z \bar{j} \times \bar{k} + a_z b_z \bar{k} \times \bar{k} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \end{aligned} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



Векторное произведение векторов.

Векторное произведение имеет простую механическую интерпретацию.



Если сила \vec{F} поворачивает тело вокруг оси l , то момент \vec{M} силы \vec{F} относительно т. O , равен

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$



Векторное произведение векторов.

Векторное произведение двух векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры.

1) *Нахождение площади параллелограмма и треугольника*

Действительно, площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы \vec{a} и \vec{b} , равна модулю их векторного произведения

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

а площадь треугольника со сторонами \vec{a} и \vec{b} вычисляется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

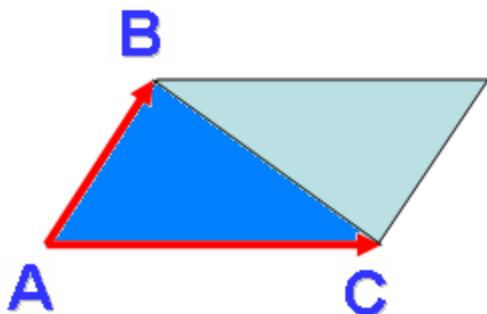


Векторное произведение векторов.

Пример 1.

Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(0, 1, 2)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 1, -1)$.

Решение



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|,$$

$$\overline{AB} \{0, 3, -3\}; \quad \overline{AC} \{2, 0, -3\}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{81 + 36 + 36} = \sqrt{153},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{\sqrt{153}}{2} \approx 6,18$$



Векторное произведение векторов.

Пример 2. Найти площадь треугольника, построенного на векторах

$2\bar{a} + \bar{b}$ и \bar{b} , если известно, что

$$|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Решение

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b}|,$$

$$(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b} = 2\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{b} = 2\bar{a} \times \bar{b},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |2\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin\left(\bar{a} \wedge \bar{b}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1.$$



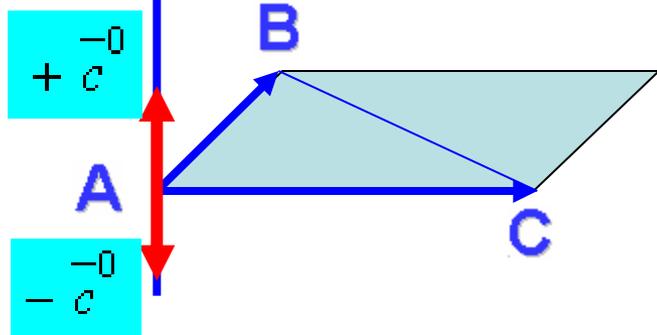
Векторное произведение векторов.

2) Нахождение векторов, перпендикулярных данной плоскости

Пример 3. Найти единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат точки $A(0, 1, 2)$, $B(0, 4, -1)$, $C(2, 1, -1)$.

Решение

$$\vec{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}$$



В силу определения векторного произведения векторов

$$\vec{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$

$$\overline{AB} \{0, 3, -3\}, \quad \overline{AC} \{2, 0, -3\},$$

$$\vec{c} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \{-9, -6, -6\},$$

Поставленной задаче удовлетворяют два единичных вектора

$$\pm \vec{c} = \pm \frac{-9\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}}{\sqrt{153}}.$$



Векторное произведение векторов.

3) Доказательство коллинеарности векторов

Пример 4. Коллинеарны ли векторы $\bar{c}_1 = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{c}_2 = 2\bar{a} + \bar{b}$ построенные по векторам $\bar{a}\{2, 1, 1\}$ и $\bar{b}\{0, 3, 1\}$?

Решение

Условие коллинеарности: $\bar{c}_1 \times \bar{c}_2 = 0$. $\bar{c}_1\{2, -2, 0\}$, $\bar{c}_2\{4, 5, 3\}$.

$$\bar{c}_1 \times \bar{c}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 6\bar{j} + 18\bar{k} \neq 0, \text{ т. е. вектора неколлинеарны.}$$

4) Задачи механического содержания

Пример 5. Сила $\bar{F}\{4; 2; 1\}$ приложена в точке $B\{3; 2; 4\}$. Найти момент этой силы относительно точки $A\{5; -1; 6\}$.

Решение

$$\overline{AB}\{-2; 3; -2\}, \quad \overline{M}_A(\bar{F}) = \overline{AB} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 6\bar{j} - 16\bar{k}.$$



Смешанное произведение векторов.

Определение 1.

Смешанным произведением ненулевых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора \vec{a} и векторного произведения вектора \vec{b} на вектор \vec{c} , т. е. выражение

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Свойства смешанного произведения:

- 1) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке перемножаемых векторов.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

- 2) При перестановке двух соседних векторов модуль смешанного произведения не меняется, а знак меняется на противоположный, т. к. тройка меняет свою ориентацию.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

- 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, т.е. порядок знаков умножения не важен.

Поэтому принято смешанное произведение обозначать $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.



Смешанное произведение векторов.

Выразим теперь смешанное произведение через координаты векторов, его составляющих.

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \bar{b} \times \bar{c} = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



Смешанное произведение векторов.

Теорема 1. Смешанное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

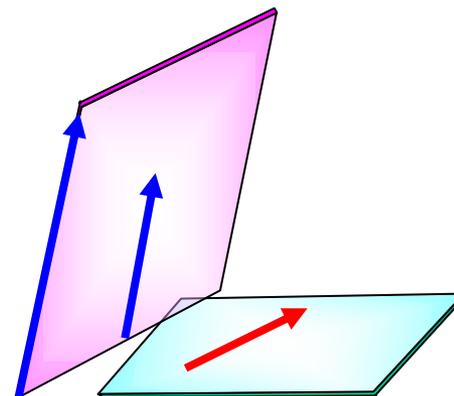
Доказательство.

Необходимость.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Возможны два случая.

1) $\vec{b} \times \vec{c} = 0$, т.е. вектора коллинеарны,

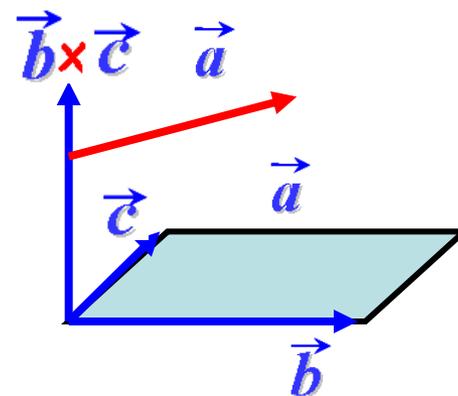


а три вектора, два из которых коллинеарны, всегда компланарны.

2) $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$, но $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

Тогда $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$.

Это значит, что три вектора лежат в одной плоскости.



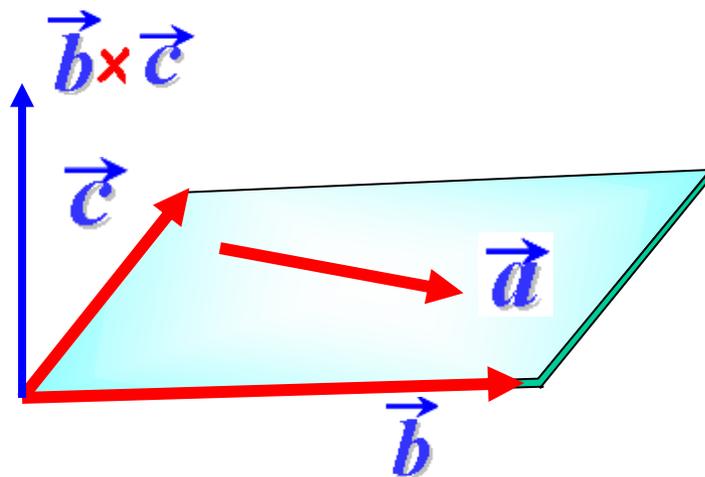


Смешанное произведение векторов.

Достаточность.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

Тогда их можно поместить в одной плоскости.



Вектор $\vec{b} \times \vec{c}$ перпендикулярен плоскости, а, следовательно, и \vec{a}

Тогда по правилам скалярного произведения $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

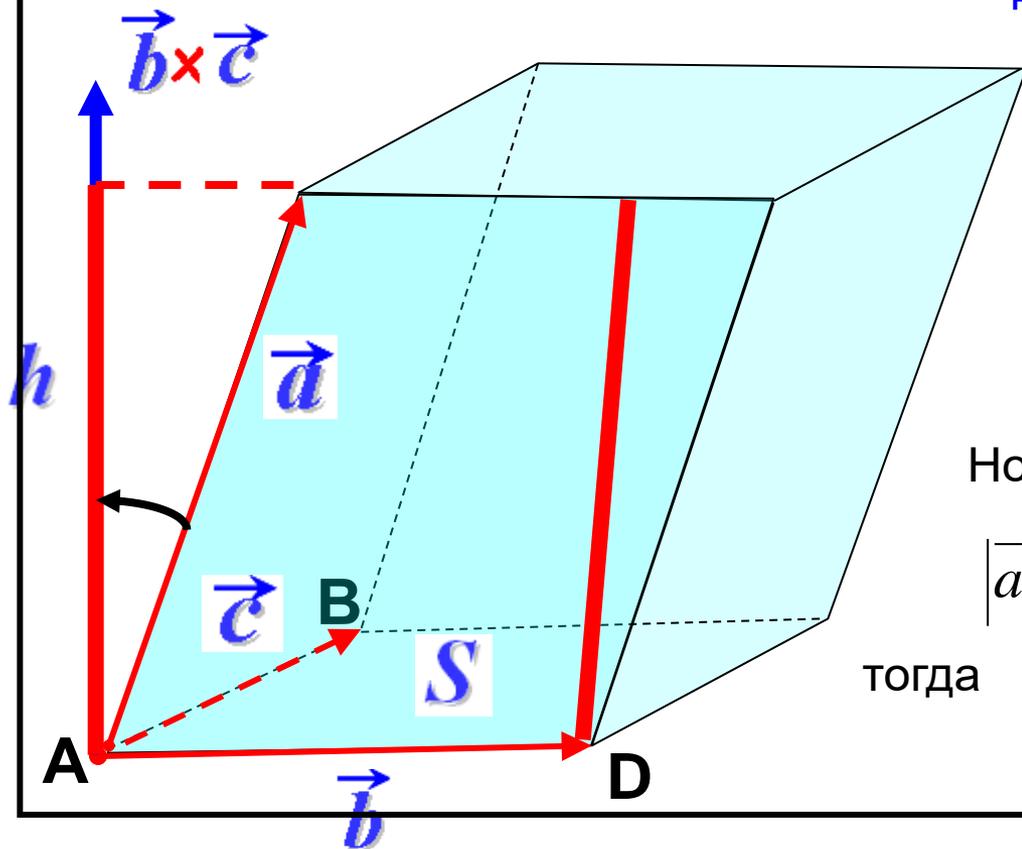


Смешанное произведение векторов.

Установим геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Теорема 2. Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ некопланарных векторов равно объему параллелепипеда, сторонами которого служат эти вектора, взятому со знаком $+$, если тройка векторов правая, и со знаком $-$, если тройка левая.

Доказательство.



$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}}) = \\ &= |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}}) \cdot |\vec{b} \times \vec{c}|. \end{aligned}$$

Но

$$|\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}}) = \pm h, \quad |\vec{b} \times \vec{c}| = S,$$

тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm S \cdot h = \pm V.$$



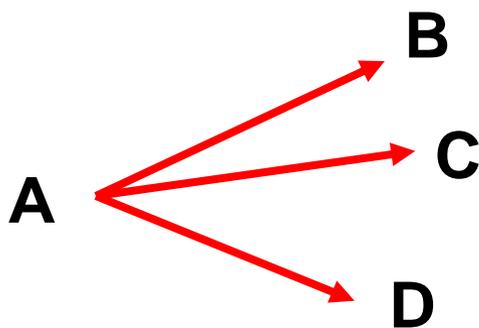
Смешанное произведение векторов.

Смешанное произведение трех векторов позволяет решить следующие задачи векторной алгебры:

1) Доказательство компланарности (линейной зависимости) трех векторов

Пример 1. Показать, что точки $A(1, 2, 1)$, $B(3, 3, 3)$, $C(4, 1, 2)$ и $D(5, 4, 5)$ лежат в одной плоскости.

Решение



$$\overline{AB}\{2; 1; 2\}, \quad \overline{AC}\{3; -1; 1\}, \quad \overline{AD}\{4; 2; 4\}.$$

Если точки A , B , C и D лежат в одной плоскости, то и вектора лежат в одной плоскости, а тогда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

$$\left(\overline{AB} \quad \overline{AC} \quad \overline{AD} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, точки лежат в одной плоскости.



Смешанное произведение векторов.

Пример 2. Доказать, что вектора $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ линейно зависимы и найти эту линейную зависимость.

Решение

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Следовательно, векторы компланарны, а значит, они линейно зависимы,}$$

т. е. существуют константы λ , μ и ν такие, что $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0$.

$$\lambda(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + \mu(3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) + \nu(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = 0,$$

$$(\lambda + 3\mu + \nu)\vec{i} + (\lambda + 4\mu + 2\nu)\vec{j} + (2\lambda + \mu - 3\nu)\vec{k} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu - 3\nu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ -5\mu - 5\nu = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ \mu = -\nu \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - 3\nu + \nu = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 2\nu \\ \mu = -\nu \end{array}$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений.

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = 2\nu\vec{a} - \nu\vec{b} + \nu\vec{c} = 0.$$

откуда получим искомую линейную зависимость: $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$



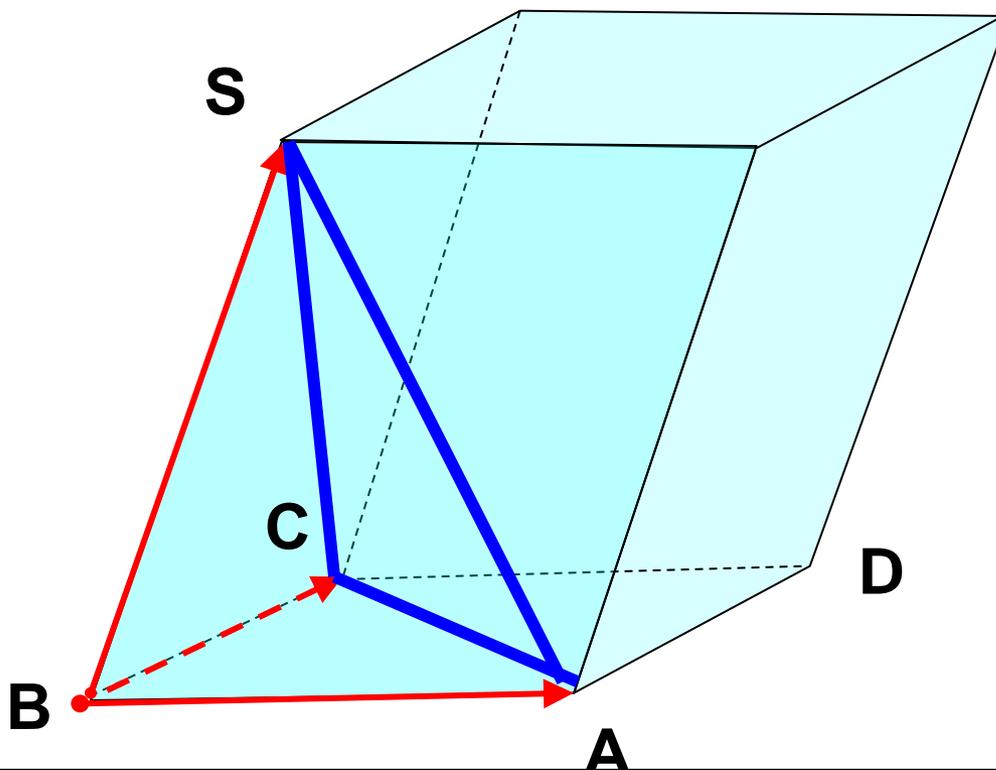
Смешанное произведение векторов.

2) Нахождение объема параллелепипеда и тетраэдра

Объем параллелепипеда вычисляется по формуле $V = S_{ABCD} \cdot h$,

а объем пирамиды — $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h$. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V.$$





Смешанное произведение векторов.

Пример 3. В пирамиде $ABCD$ найти высоту, опущенную из вершины A , если в прямоугольной декартовой системе координат $A(2, 1, 0)$, $B(2, -1, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(-1, 1, 0)$.

Решение

$$\overline{DA}\{3, 0, 0\}, \quad \overline{DB}\{3, -2, 2\} \quad \overline{DC}\{1, 0, 3\},$$

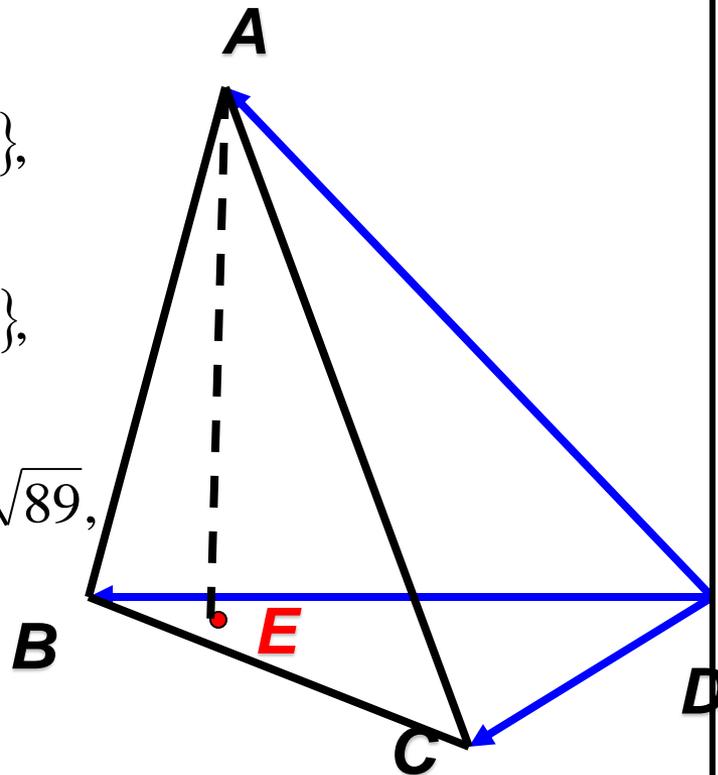
$$\overline{DB} \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{-6, -7, 2\},$$

$$S = \frac{1}{2} |\overline{DB} \times \overline{DC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{89},$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-18| = |-3|.$$

Знак «-» показывает, что тройка векторов левая.

$$H = \frac{3 \cdot V}{S} = \frac{3 \cdot 3}{\sqrt{89}/2} \approx 1,91.$$



Основные формулы

Тема 1. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису.

Вектором называется направленный отрезок.

Координаты вектора с концами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (X; Y; Z).$$

$$\text{Длина вектора: } |\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

$$\text{Проекция вектора на ось } m: \text{пр}_m \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

$$\text{Направляющие косинусы: } \cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}; \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$\text{Сумма (разность) векторов } \vec{a} = (x_1; y_1; z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2; y_2; z_2): \vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2).$$

$$\text{Произведение вектора } \vec{a} = (x_1; y_1; z_1) \text{ на число } \lambda: \vec{b} = \lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1).$$

$$\text{Условие коллинеарности векторов: } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Разложение вектора \vec{d} по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$, где α, β, γ - координаты вектора \vec{d} в системе координат $O\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Тема 2 Нелинейные операции над векторами.

1. **Скалярное произведение векторов** – число $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$; 2). проекция вектора на вектор $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$;

3). если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Свойства: 1). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2). $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$; 3). Скалярный квадрат $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$; 4). $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; 5). $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

Условие перпендикулярности векторов: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

Угол между векторами: $\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

2. **Векторное произведение** – вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. 1). $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$; 2). если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$,

$\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Свойства векторного произведения: 1). $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$; 2). $\vec{a} \times \vec{a} = 0$; 3). $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; 4). $\vec{i} \times \vec{i} = 0$, $\vec{j} \times \vec{j} = 0$, $\vec{k} \times \vec{k} = 0$; $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

Геометрически векторное произведение – площадь параллелограмма: $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$.

3. **Смешанное произведение векторов** – число $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2); \vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Геометрически – объемы параллелепипеда и пирамиды: $V_{\text{пар}} = \pm \vec{a} \vec{b} \vec{c}$, $V_{\text{пир}} = \pm (1/6) \vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Условие компланарности векторов: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Задачи для самоконтроля

А

1. Даны точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(3; 2; 6)$. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора \vec{AB} .
2. Даны $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
3. Даны векторы своими координатами $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
4. Даны векторы $\vec{a} = \{1; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 1\}$. Найти угол между векторами φ - ?.
5. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 5; 7\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 4\}$. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$?
6. Определить компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} ? Если
 $\vec{a} = \{6; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.
7. Коллинеарны ли векторы \vec{c}_1 и \vec{c}_2 , построенные по векторам \vec{a} и \vec{b} ? Если $\vec{a} = \{0; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$, $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.

В

8. Найти скалярное произведение векторов $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 6\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$ и угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен $\frac{\pi}{3}$.
9. Найти косинус угла между векторами \vec{AB} и \vec{AC} . Если $A(-4, -2, 0)$, $B(-1, -2, 4)$, $C(3, -2, 1)$.
10. Упростить выражение $(2\vec{i} - \vec{j})\vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k})\vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2$.
11. Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ при каком значении m эти векторы перпендикулярны?

С

12. Написать разложение вектора \vec{x} по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Если $\vec{x} = \{-19; -1; 7\}$, $\vec{p} = \{0; 1; 1\}$, $\vec{q} = \{-2; 0; 1\}$, $\vec{r} = \{3; 1; 0\}$.
13. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$ и угол между векторами \vec{p}, \vec{q} равен $\frac{\pi}{6}$.
14. Вычислить объем пирамиды с вершинами A, B, C, D и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC , если $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!