

Плоскость в пространстве

Преподаватель: Филиппова М.П., доцент
кафедры высшей математики ИМИ СВФУ

План лекции

- 1. Уравнения плоскости**
- 2. Угол между плоскостями**
- 3. Условие параллельности плоскостей**
- 4. Условие перпендикулярности плоскостей**
- 5. Расстояние от точки до плоскости**

&1. Уравнения плоскости

Определение.

Плоскостью называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0, (1)$$

где A, B, C – координаты вектора - нормали к плоскости, т.е. $\vec{N}(A, B, C)$ или $\vec{n}(A, B, C)$.

Пример-1

Пусть задано уравнение
плоскости

$$x-4y+5z-16=0. (*)$$

Следовательно, (*)
общее уравнение
плоскости и

$$A=1, B=-4, C=5, D=-16,$$

$$\text{т.е. } \vec{N}(1, -4, 5)$$

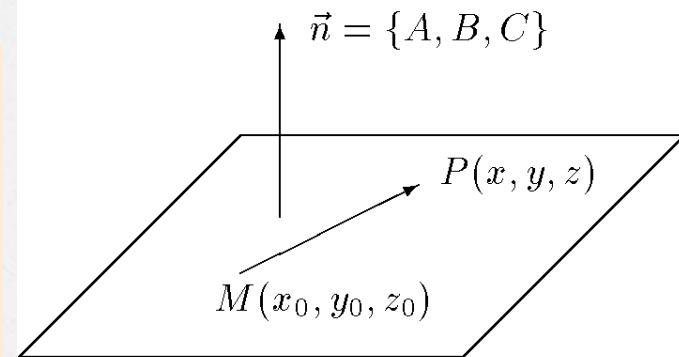


Рис. 1

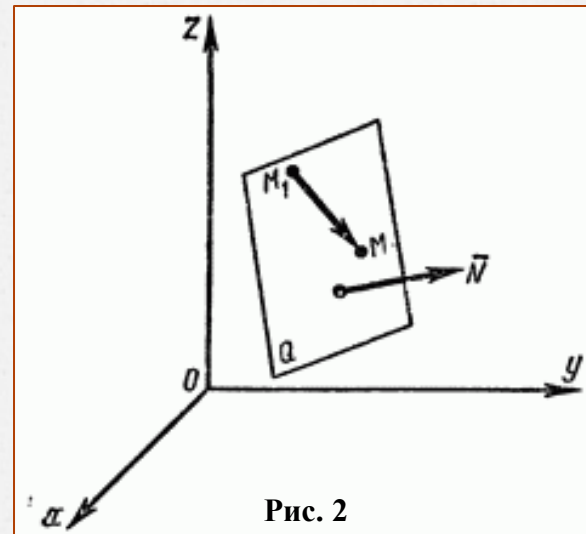
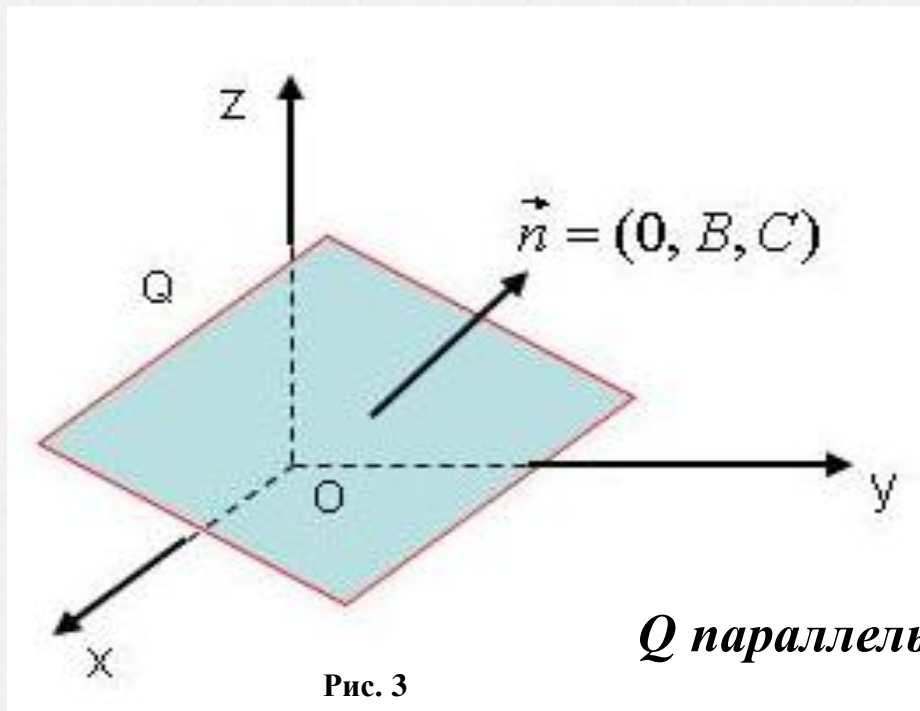


Рис. 2

Пример-2

Пусть задано уравнение плоскости Q : $y-3z+2=0$.

Тогда $A=0$, $B=1$, $C=-3$, $D=2$, т.е. $\vec{N}(0, 1, -3)$



Q параллельно оси Ox

Пример-3

Пусть задано уравнение плоскости $4x-3=0$.

Тогда $A=4$, $B=0$, $C=0$, $D=-3$, т.е. $\vec{N}(4, 0, 0)$

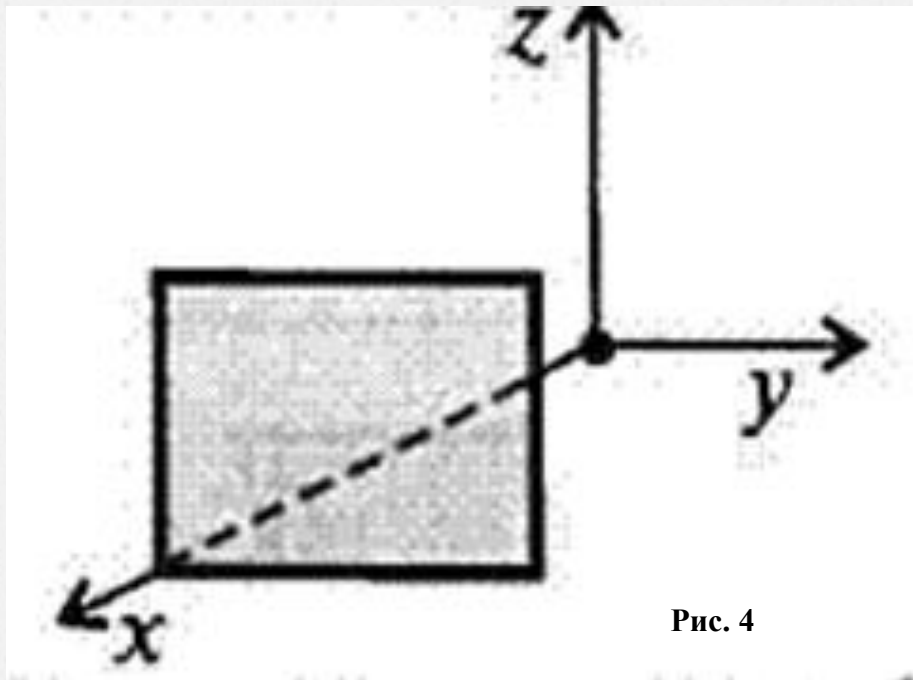


Рис. 4

плоскость параллельно к плоскости zOy

Пример-4

Пусть задано уравнение плоскости α : $z=0$.

Тогда $A=0$, $B=0$, $C=1$, $D=0$, т.е. $\vec{N}(0, 0, 1)$

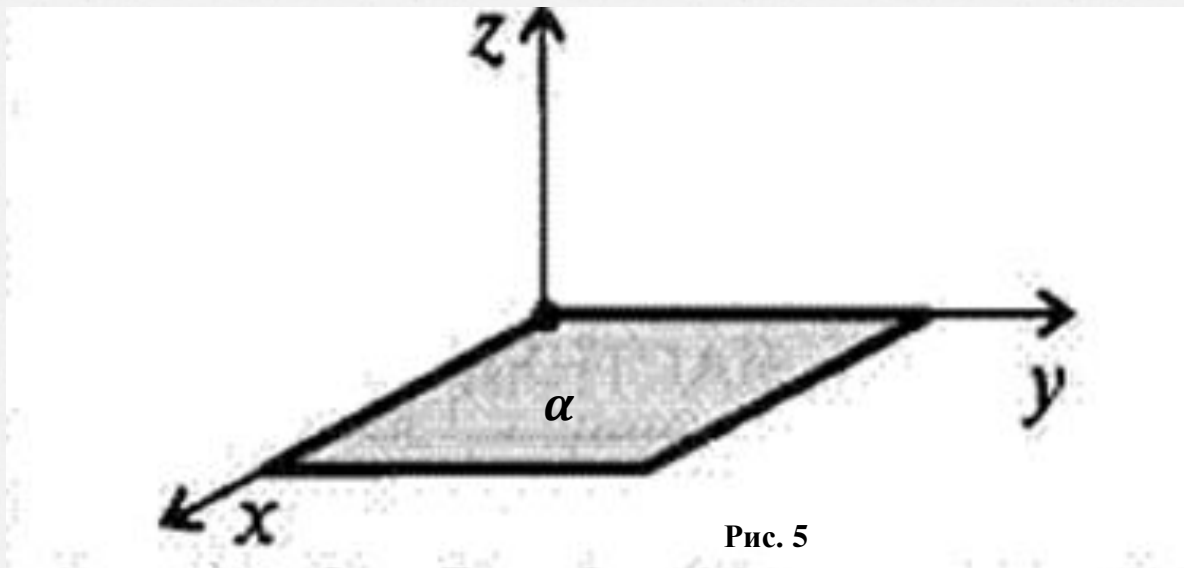


Рис. 5

Плоскость α совпадает с *плоскостью* xOy

Пример-5

Пусть задано уравнение плоскости α : $y-z=0$.

Тогда $A=0$, $B=1$, $C=-1$, $D=0$,

т.е. $\vec{N}(0, 1, -1)$

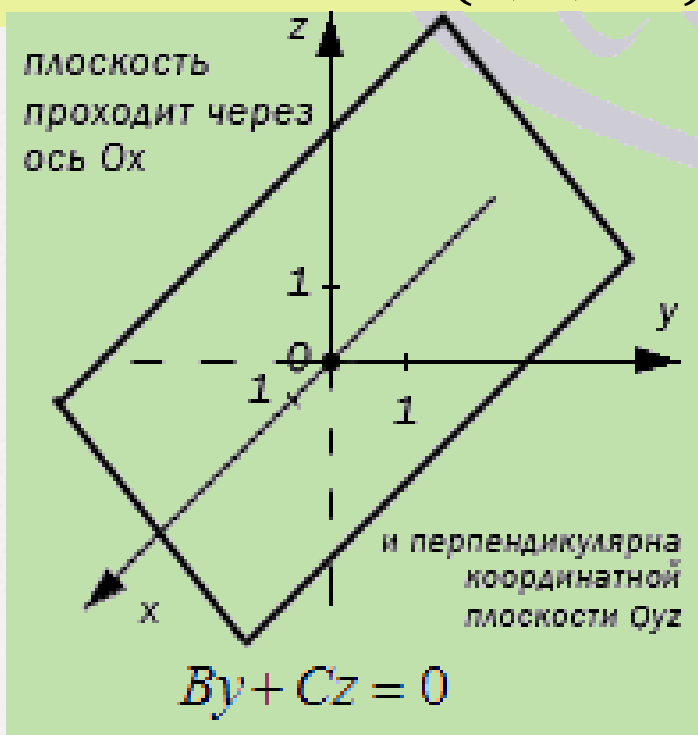


Рис. 6

Пример-6

Пусть задано уравнение плоскости α : $x-y-z=0$.

Тогда $A=1$, $B=-1$, $C=-1$, $D=0$,

т.е. $\vec{N}(1, -1, -1)$

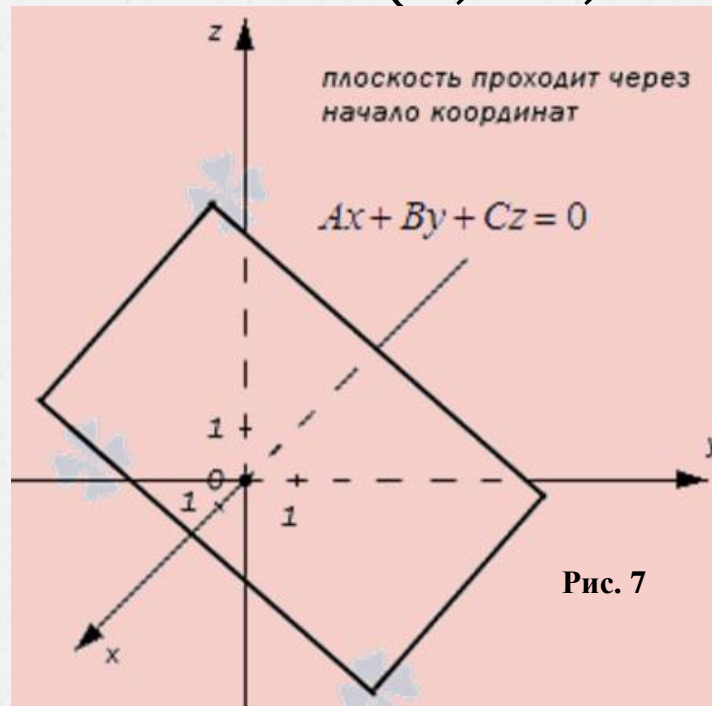


Рис. 7

Возможны следующие частные случаи плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ если}$$

- 1) $A = 0$ – плоскость параллельна оси Ox
- 2) $B = 0$ – плоскость параллельна оси Oy
- 3) $C = 0$ – плоскость параллельна оси Oz
- 4) $D = 0$ – плоскость проходит через начало координат
- 5) $A = B = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy
- 6) $A = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz
- 7) $B = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz
- 8) $A = D = 0$ – плоскость проходит через ось Ox
- 9) $B = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oy
- 10) $C = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oz
- 11) $A = B = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy
- 12) $A = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz
- 13) $B = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть задано $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2) \quad , \text{ где}$$

$$-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$$

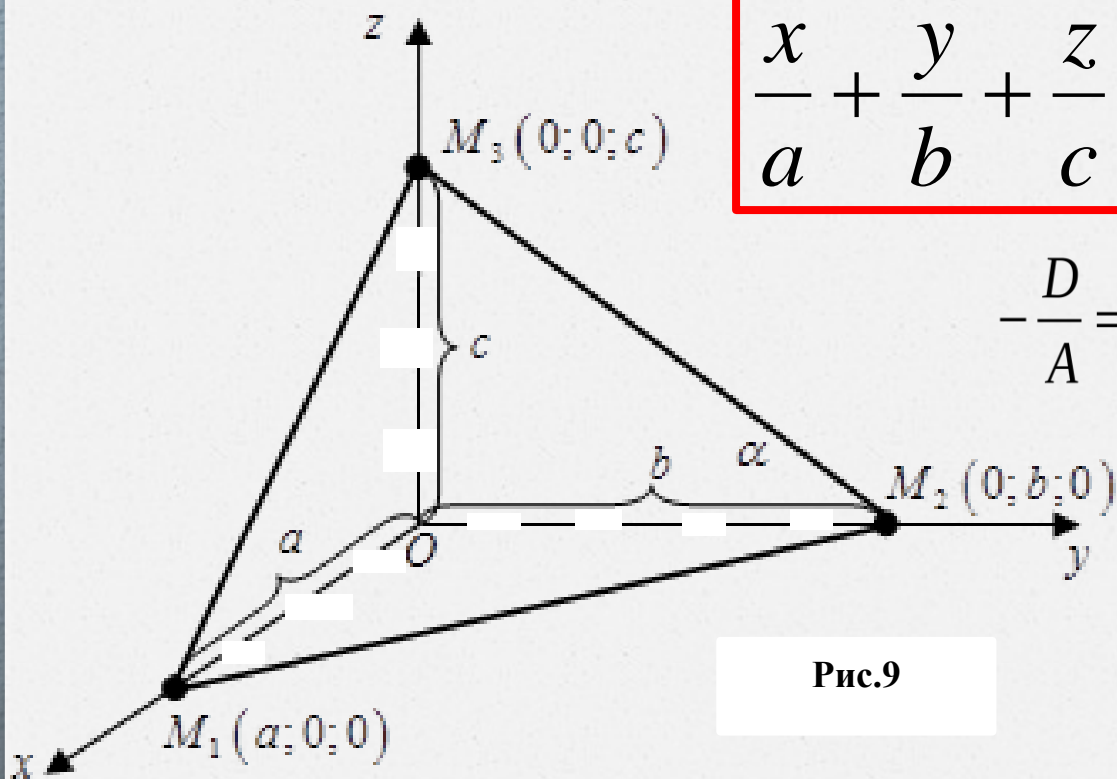


Рис.9

ЗАДАЧА_1

Построить плоскость

$$3x+4y-6z-12=0$$

Решение

$$6x+2y+3z-12=0$$

$$6x+2y+3z=12$$

$$6x+2y+3z=12 \quad / \text{обе части уравнения делим на } 12$$

$$\frac{6x}{12} + \frac{2y}{12} + \frac{3z}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} = 1,$$

$$a=2, b=6, c=4$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} = 1$$

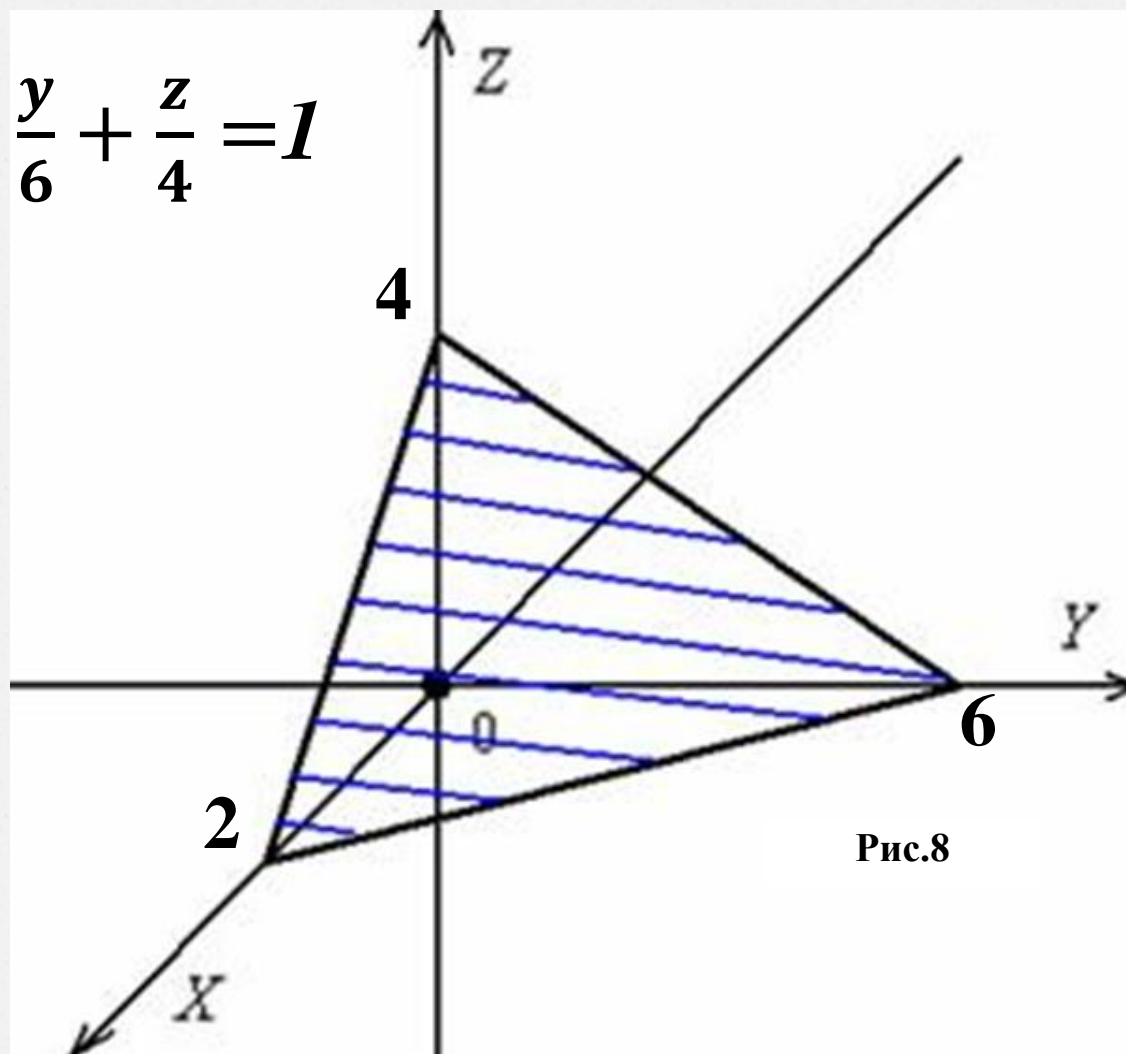


Рис.8

Теорема

Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N}(A, B, C)$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N}(A, B, C)$

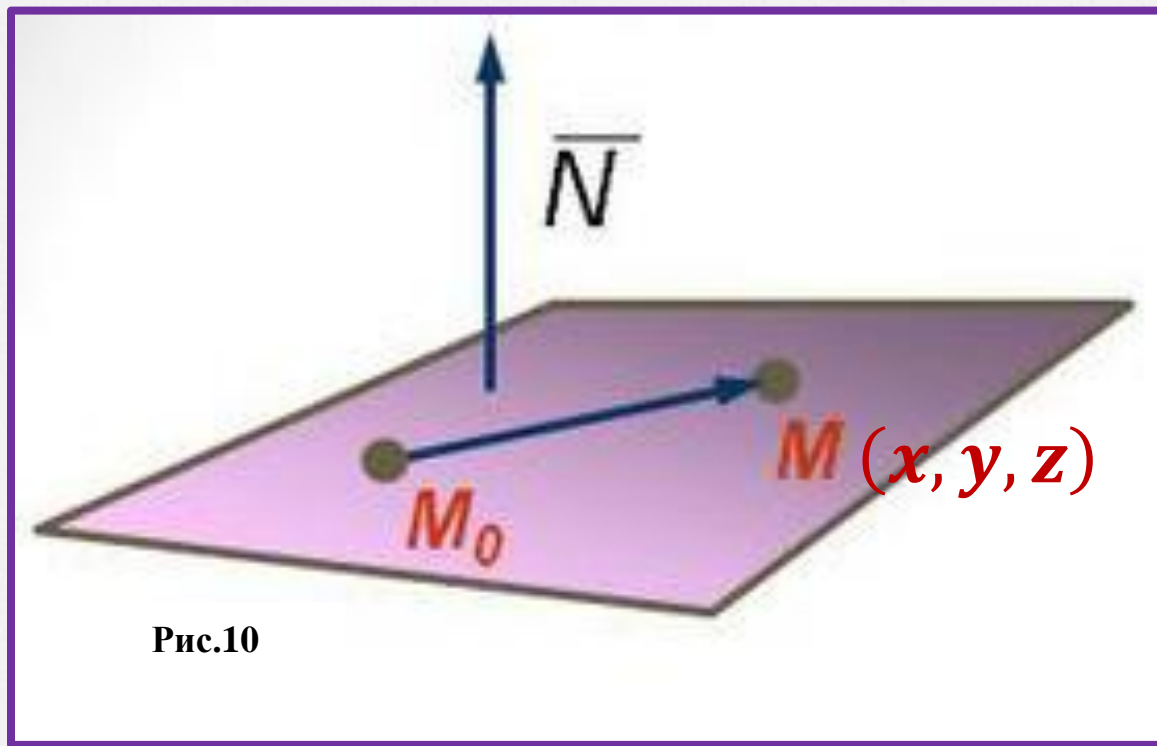


Рис.10

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Доказательство. Для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Так как, вектор $\vec{N}(A, B, C)$ - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Следовательно, выполняется условие:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Теорема доказана.

ЗАДАЧА_2

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1; 3; -5)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = \{3; -2; 4\}$

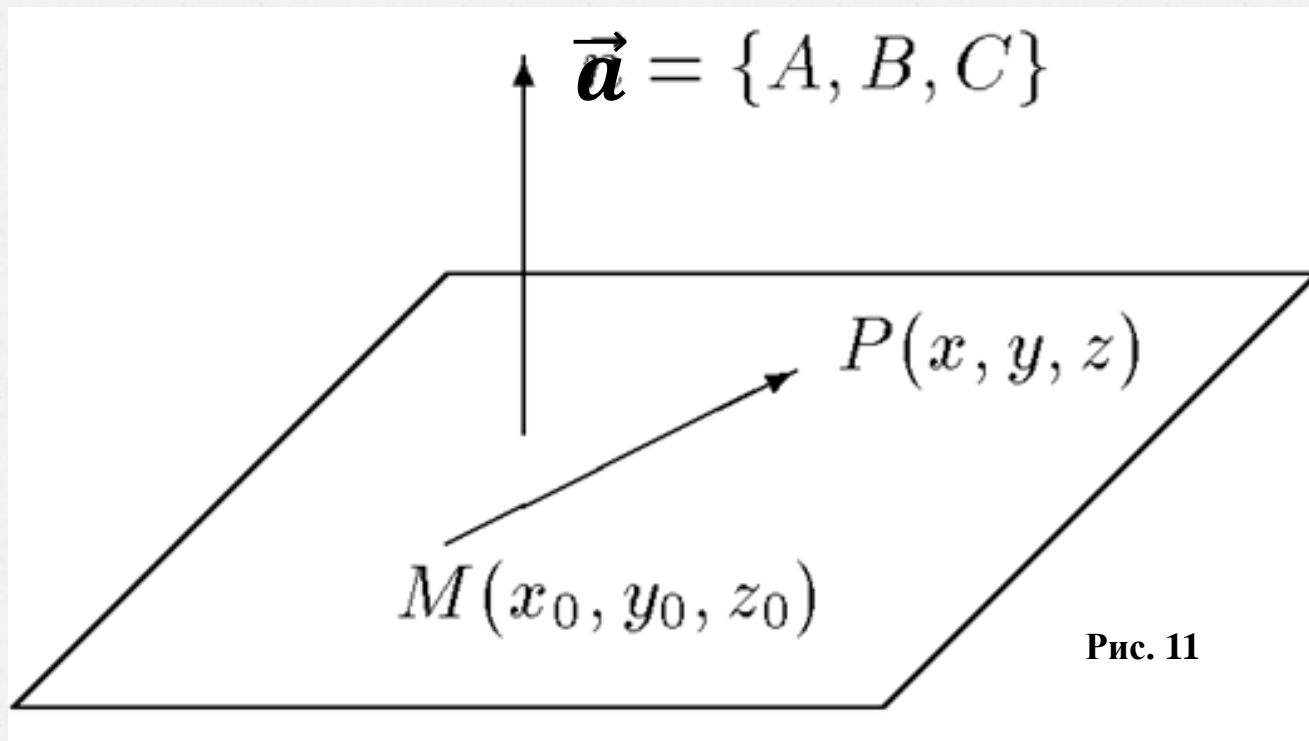


Рис. 11

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

РЕШЕНИЕ

Исходное уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$M_0(-1; 3; -5) \quad \vec{a} = \{3; -2; 4\}$$

Подставляем координаты точки и вектора

$$3(x + 1) - 2(y - 3) + 4(z + 5) = 0$$

Раскрываем скобки

$$3x + 3 - 2y + 6 + 4z + 20 = 0$$

Приводим подобные

$$3x - 2y + 4z + 29 = 0$$

Получили общее уравнение плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_3(x_3, y_3, z_3)$

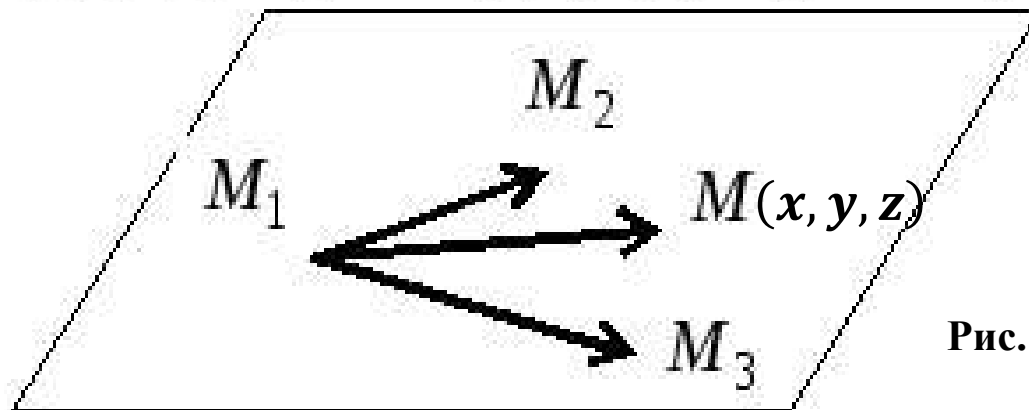


Рис. 12

■ Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны

$$\overrightarrow{abc} = (\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ЗАДАЧА_3

**Составить уравнение
плоскости проходящей
через три точки**

$$M_1(2;2;2)$$

$$M_2(4;0;3)$$

$$M_3(0;1;0)$$

РЕШЕНИЕ

$$M_1(2;2;2)$$

$$M_2(4;0;3)$$

$$M_3(0;1;0)$$

Подставляем в формуле (4)

$$1) \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 4-2 & 0-2 & 3-2 \\ 0-2 & 1-2 & 0-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$3) 4(x-2) - 2(z-2) - 2(y-2) - 4(z-2) + 1(x-2) + 4(y-2) = 0$$

$$5x + 2y - 6z - 2 = 0 \text{ - Уравнение плоскости}$$

$$\text{нормаль } \vec{N}\{5; 2; -6\}$$

Нормальное уравнение плоскости

Пусть $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – единичный вектор

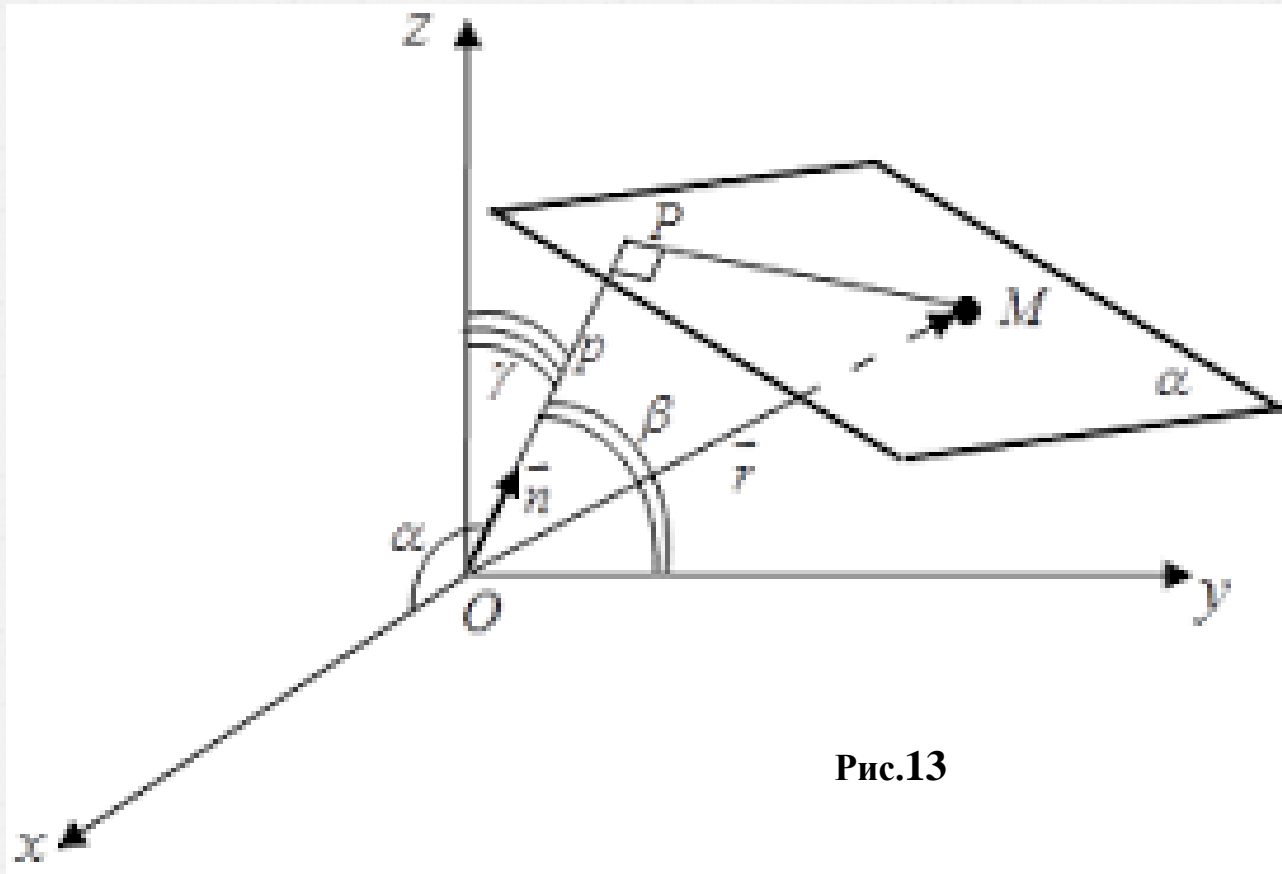


Рис.13

$$\alpha: \boxed{\vec{r} \cdot \vec{n} = p} \Rightarrow \boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0} \quad (5)$$

Нормальное уравнение плоскости

$$\boxed{\vec{r} \cdot \vec{n} = p}, \text{ где}$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки $M(x, y, z)$,

$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат.

α , β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x , y , z .

p — длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0} \quad (5)$$

ЗАДАЧА_4

**Приведите уравнение плоскости к
нормальному виду.**

$$2x-3y+z+5=0$$

РЕШЕНИЕ

В нашем случае, $2x-3y+z+5=0$,

$$A=2, B=-3, C=1, D=5.$$

Так как $D>0$, то нормирующий множитель:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5')$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (2x - 3y + z + 5) = -\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x + \frac{3}{\sqrt{14}}y - \frac{1}{\sqrt{14}}z - \frac{5}{\sqrt{14}} = 0_{\text{нормальное}}$$

уравнение плоскости

&2. Угол между плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Так как $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, то

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6)$$

Угол между плоскостями

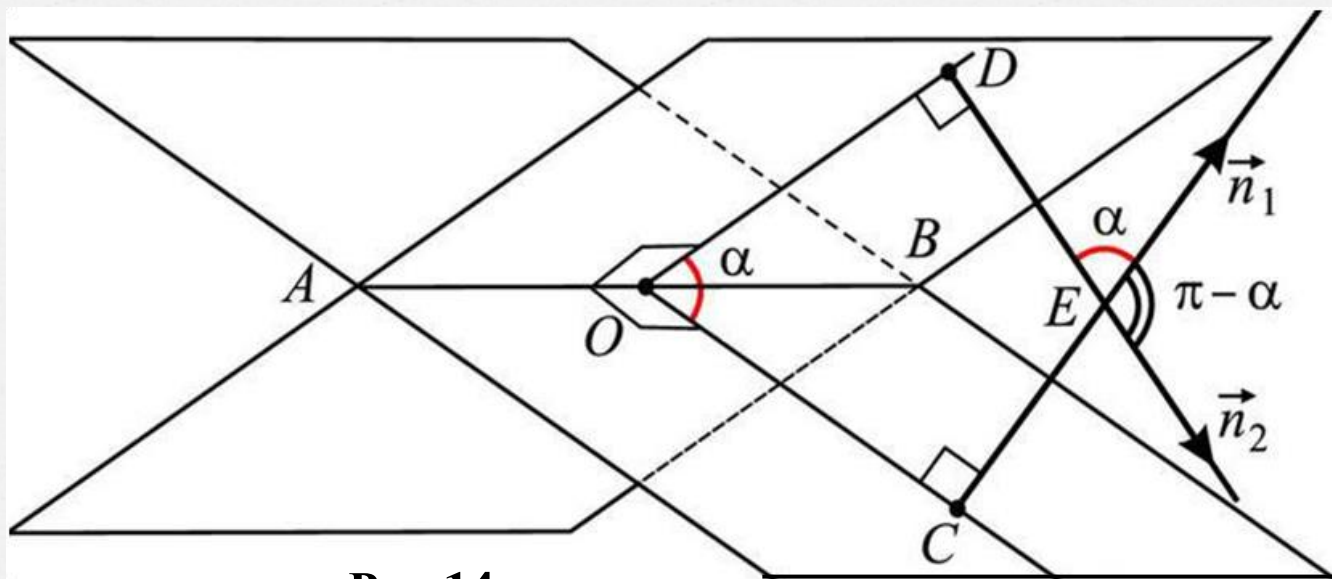


Рис.14

Под углом между двумя плоскостями будем понимать один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Очевидно, что угол между данными плоскостями равен углу между их нормальными векторами.

ЗАДАЧА_5

Определить угол между плоскостями

$$x-y+\sqrt{2}z+2=0, \quad x+y+\sqrt{2}z-5=0$$

РЕШЕНИЕ

$$x-y+\sqrt{2}z+2=0, \quad \overrightarrow{N_1} = \{1, -1, \sqrt{2}\}$$

$$x+y+\sqrt{2}z-5=0, \quad \overrightarrow{N_2} = \{1, 1, \sqrt{2}\}$$

Подставляем в формуле (6)

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \sqrt{2} \sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ:} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

&3. Условие параллельности плоскостей

Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

параллельны, а значит

$$\vec{N}_1 // \vec{N}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \quad (7)$$

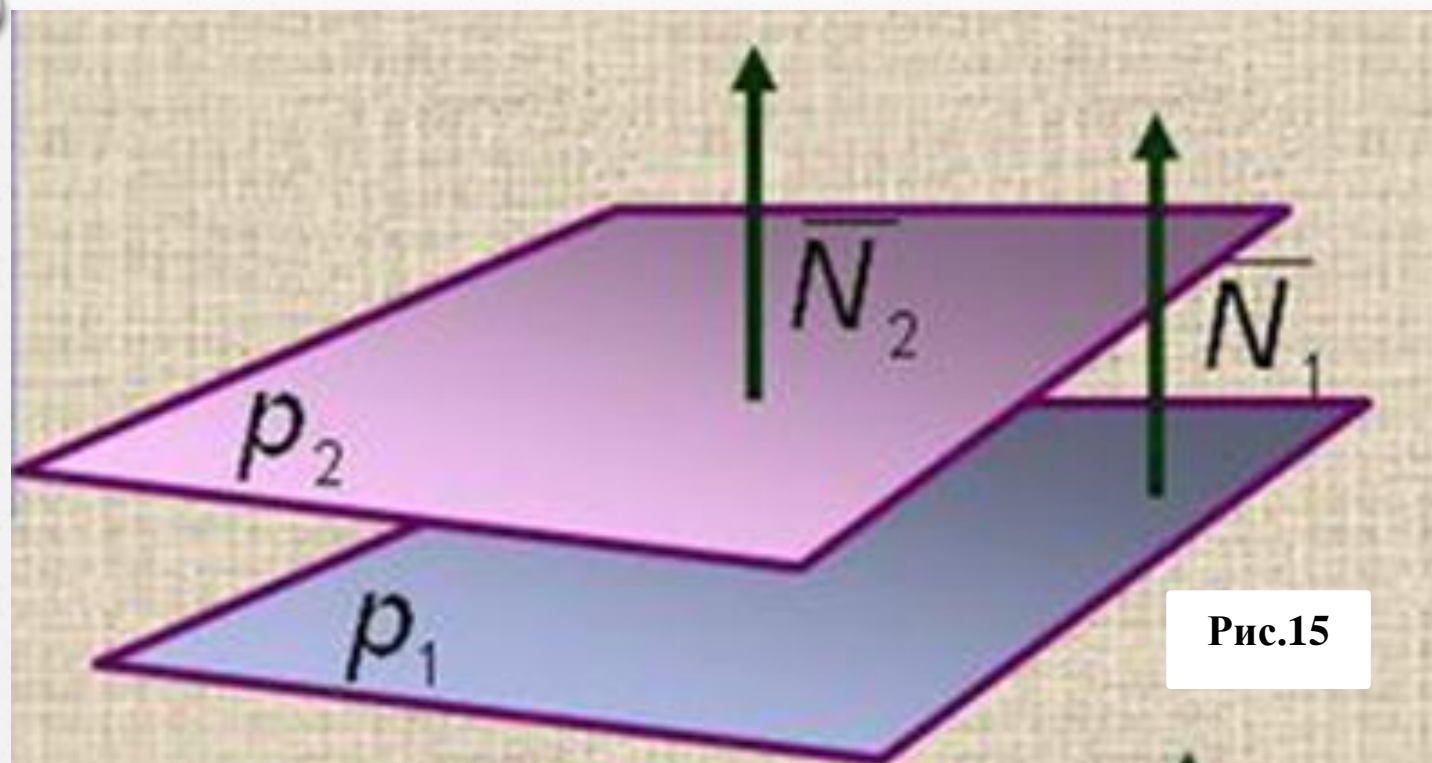


Рис.15

$$\vec{N}_1 // \vec{N}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

ЗАДАЧА_6

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2; 1; 4)$ параллельно плоскости $3x+2y-7z+8=0$.

РЕШЕНИЕ

Уравнение плоскости будем искать в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Из условия параллельности плоскостей следует, что: $\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{-7}$. Поэтому можно положить, что $A=3$, $B=2$, $C=-7$. Поэтому уравнение плоскости принимает вид

$$3x + 2y - 7z + D = 0.$$

Кроме того, точка $M(-2; 1; 4)$ лежит на искомой плоскости, то $-6 + 2 - 28 + D = 0$, $D = 32$.

Итак, искомое уравнение плоскости

$$3x + 2y - 7z + 32 = 0.$$

&4. Условие перпендикулярности плоскостей

Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы

$$\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

перпендикулярны, а значит

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0} \quad (8)$$

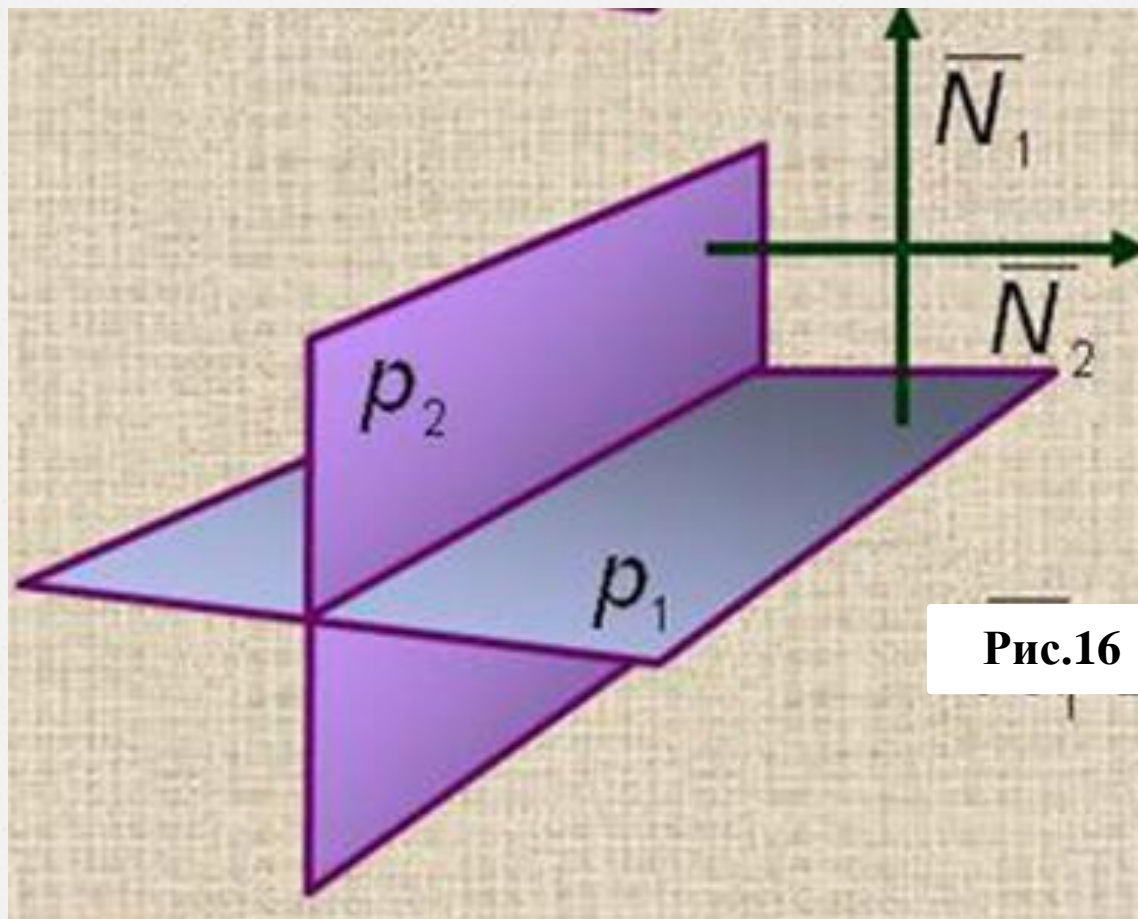


Рис.16

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0}$$

ЗАДАЧА_7

**Перпендикулярны ли плоскости
 $3x+2y-7z+8=0$ и $x+4y+2z-5=0$?**

РЕШЕНИЕ

$$2x+3y-7z+8=0, \quad \overrightarrow{N_1} = \{2, 3, -7\},$$
$$x+4y+2z-5=0, \quad \overrightarrow{N_2} = \{1, 4, 2\}.$$

Проверяем условие перпендикулярности
двух плоскостей

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + (-7) \cdot 2 = 0.$$

Следовательно, заданные плоскости
перпендикулярны.

&5. Расстояние от точки до плоскости

Если задано уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости можно найти, используя следующую формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9)$$

ЗАДАЧА_8

Найти расстояние между плоскостью $2x + 4y - 4z - 6 = 0$ и точкой $M(0, 3, 6)$.

РЕШЕНИЕ

Подставим в формуле (9) коэффициенты плоскости и координаты точки

$$2x + 4y - 4z - 6 = 0 \quad M(0, 3, 6).$$

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 6 - 6|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{|0 + 12 - 24 - 6|}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{18}{6} = 3$$

Ответ: расстояние от точки до плоскости равно 3.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Уравнения плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

Угол между плоскостями

$$\cos \alpha = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Условие параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется общее уравнение плоскости? Каковы частные случаи общего уравнения плоскости. Приведите примеры.
2. Геометрический смысл уравнения плоскости в «отрезках»? Приведите примеры.
3. Как определяется уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярно к заданной плоскости?
4. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки?
5. Что называется нормальным вектором плоскости?
6. Как определяется угол между двумя плоскостями?
7. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей?
8. Как определяется расстояние от точки до плоскости?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Построить плоскость $3x+4y+6z-12=0$ с помощью уравнения в «отрезках».
2. Найти угол между плоскостями $x-3y+5=0$, $2x-y+5z-16=0$.
3. Найти расстояние от точки $M(-12, 7, -1)$ до плоскости $25x-34y-22z+57=0$.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 5, -3)$, перпендикулярно вектору $\vec{BC}\{2;-1;5\}$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A , B и C , если $A(1, 4, 1)$, $B(2, 3, -1)$ и $C(0, -1, 0)$.
6. Уравнение плоскости $2x-6y+3z-14=0$ привести к нормальному виду.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!