УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Составитель: **Филиппова М.П., доцент кафедры высшей математики ИМИ СВФУ**

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. **Прямая, как линия пересечения двух плоскостей**
2. **Каноническое уравнение прямой**
3. **Параметрическое уравнение плоскости**
4. **Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки**
5. **Угол между прямыми**
6. **Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых**

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Прямая, как линия пересечения двух плоскостей

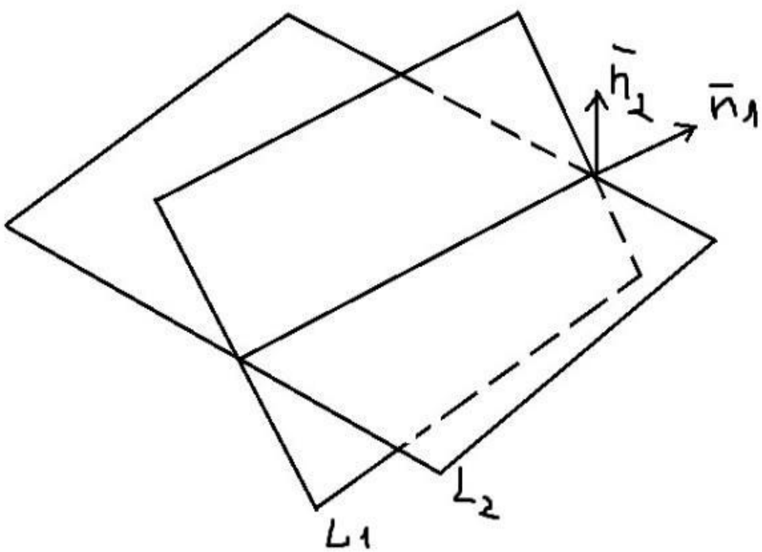
Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей.

Тогда любая точка прямой будет удовлетворять системе уравнений, задающих данные плоскости:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

(1)

Прямая, как линия пересечения двух плоскостей



$$\overrightarrow{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$$

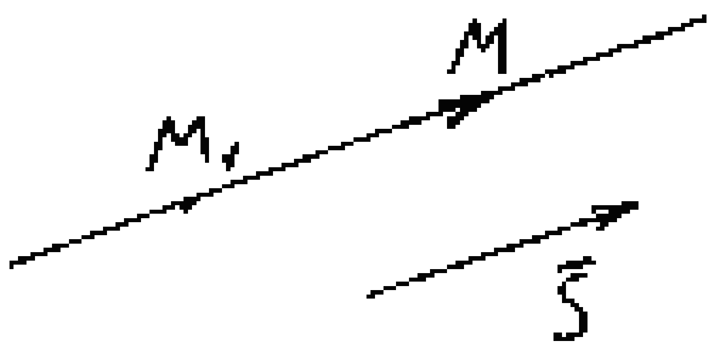
$$\overrightarrow{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

2. Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через точку

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$ **параллельно вектору**

$$\vec{s} = \{m, n, p\}$$



Этот вектор называется <u>направляющим</u> вектором прямой.

Доказательство

Выберем на прямой произвольную точку

$$M(x, y, z)$$

и рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

Уравнения прямой могут быть получены из условия коллинеарности этого вектора и направляющего вектора прямой:

$$\overrightarrow{M_1M} || \vec{s}$$

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (2)$$

каноническое уравнение прямой

ПРИМЕР 1

Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Решение.

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

$$2x - 9x - 7 = 0;$$

$$x = -1;\ y = 3;$$

Получаем: A(-1; 3; 0).

Направляющий вектор прямой: $\vec{S} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

Итого: $\frac{x+1}{-35} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z}{-7}$; $\quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$;

3. Параметрическое уравнение прямой

При решении многих практических задач используют параметрическое уравнение прямой, которое получается из канонического уравнения:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=t\\[2mm]\dfrac{y-y_0}{n}=t\\[2mm]\dfrac{z-z_0}{p}=t\end{cases} \quad\Rightarrow$$

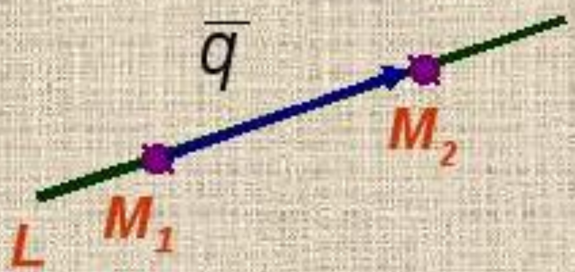
$$\boxed{\begin{cases}x=mt+x_0\\ y=nt+y_0\\ z=pt+z_0\end{cases}} \qquad \textbf{(3)}$$

Параметрическое уравнение прямой

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть прямая проходит через две точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \qquad M_2(x_2, y_2, z_2)$$



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\overline{q} = \overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad \textbf{(4)}$$

уравнения прямой,
проходящей через две заданные точки

ПРИМЕР 2

Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 1, 1) и B(3, 2, 5)

Решение:

$$\bar{l} = \overline{AB} = \{2, 1, 4\}$$

Подставляем в формуле (4) получаем уравнение

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$$

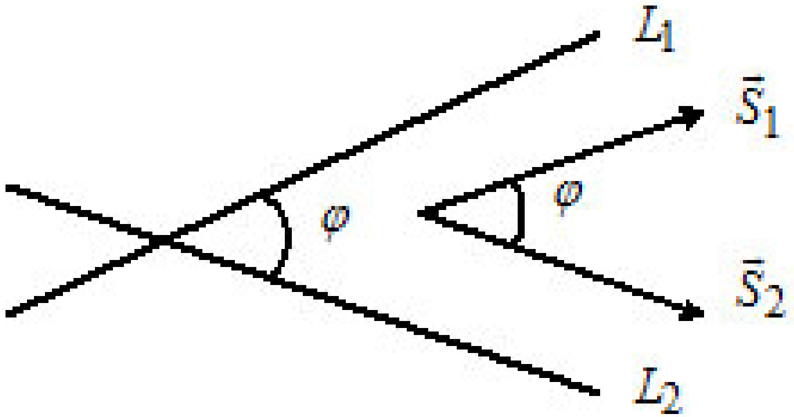
5. Угол между прямыми в пространстве

Пусть заданы две прямые

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \qquad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

Острый угол между этими прямыми находится из скалярного произведения векторов

$$\overrightarrow{s_1} = \{m_1, n_1, p_1\} \qquad \overrightarrow{s_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$$



$$\cos\varphi = \frac{\left|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (5)$$

угол между прямыми в пространстве

6. Условия параллельности прямых

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

(6)

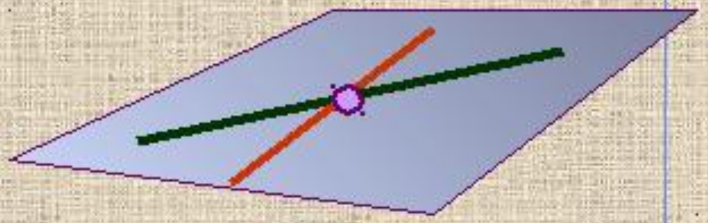
условия перпендикулярности прямых

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

(7)

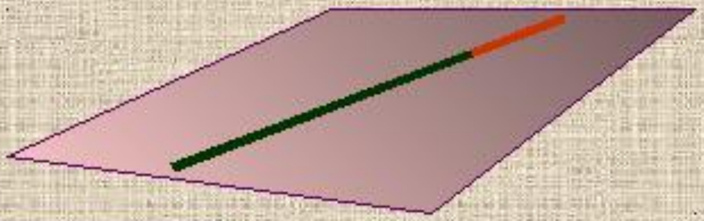
Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Две прямые в пространстве могут пересекаться,

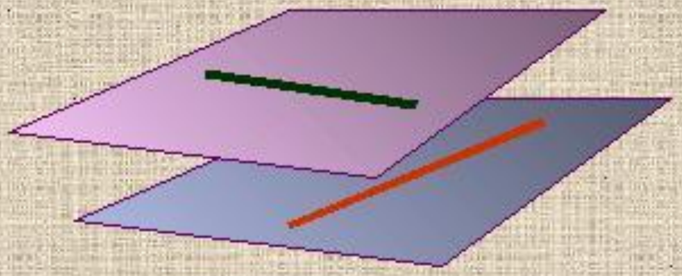


быть параллельными,

совпадать,



и скрещиваться.



В первых трех случаях прямые лежат в одной плоскости.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Название	Уравнение	Способ задания прямой	Геометрический смысл коэффициентов
Общее уравнение прямой	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$	Прямая определяется как линия пересечения двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (рис. 4.25)	Коэффициенты A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 – координаты нормалей $\vec{n}_1=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}+C_1\vec{k}$, $\vec{n}_2=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}+C_2\vec{k}$,
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+by, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct. \end{cases}$ $a^2+b^2+c^2\neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ коллинеарно вектору $\vec{p}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$, (рис. 4.27)	Коэффициенты a, b, c – координаты направляющего вектора $\vec{p}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$; x_0, y_0, z_0 – координаты точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащей прямой
Каноническое уравнение прямой	$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$	См. параметрическое уравнение	См. параметрическое уравнение
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ (рис. 4.32)	Коэффициенты x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 – координаты точек $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется направляющим вектором линии?
2. Как определяется каноническое уравнение прямой? Приведите примеры.
3. Как записываются параметрические уравнения прямой?
4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки в пространстве.
5. Как определяется угол между двумя прямыми в пространстве?
6. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две данные точки (1, -2, 1) и (3, 1, -1).
2. Каноническое уравнение прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$ привести к параметрическому виду.
3. Найти угол между прямыми: $\begin{cases} x=-t \\ y=4t \\ z=-2t+2 \end{cases}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}$.
4. Установить взаимное расположение прямых:

1) $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x=5-8t; \\ y=4-6t; \\ z=3+4t. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=5-t; \\ y=4+7t; \\ z=4t. \end{cases}$ и $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{14}$.

3) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!