Прямая и плоскость

Преподаватель: **Филиппова М.П., доцент кафедры высшей математики ИМИ СВФУ**

План лекции

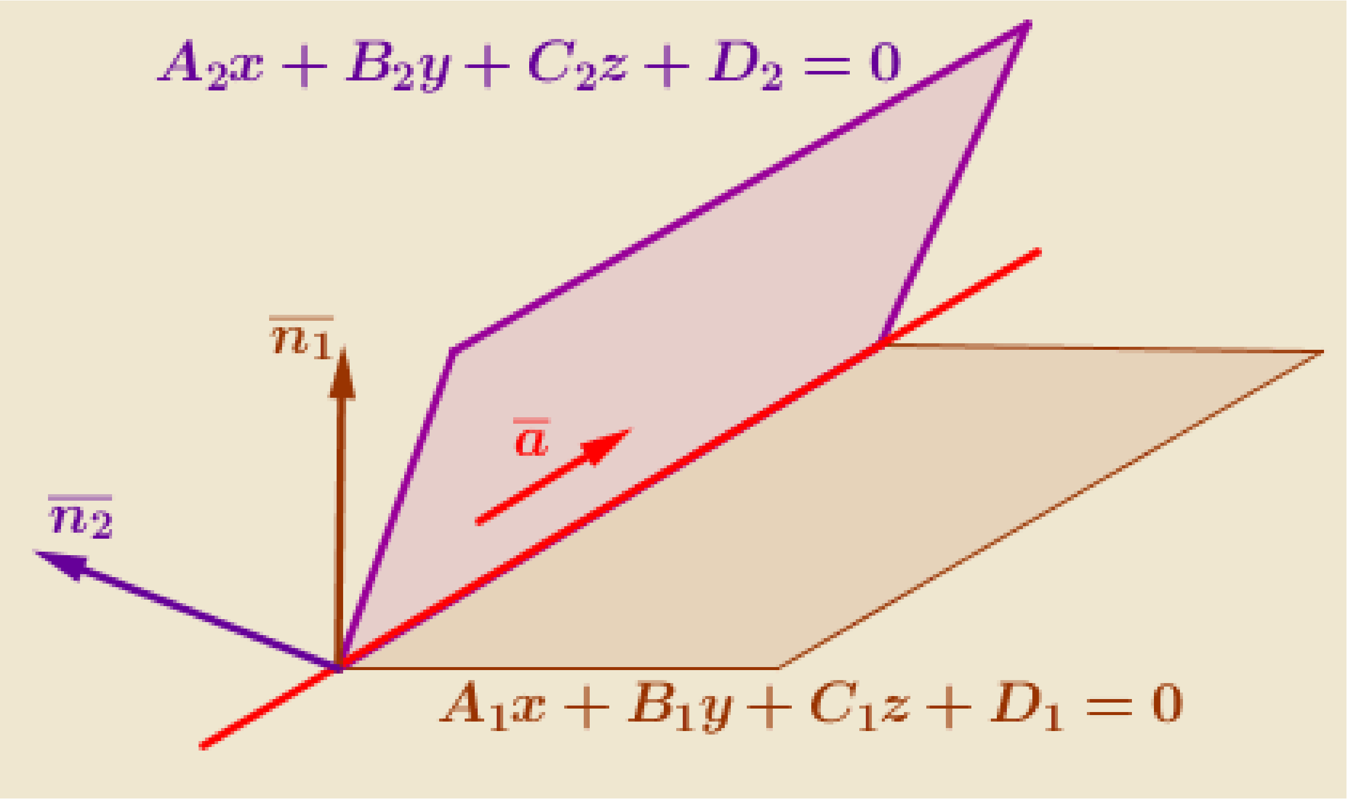
1. Прямая, как линия пересечения двух плоскостей
2. Пересечение прямой и плоскости
3. Угол между прямой и плоскостью
4. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости
5. Поверхности второго порядка

&1. Прямая, как линия пересечения двух плоскостей

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей.
Тогда любая точка прямой будет удовлетворять системе уравнений, задающих данные плоскости:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Прямая, как линия пересечения двух плоскостей



$$\overrightarrow{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}, \qquad \overrightarrow{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

ПРИМЕР 1

Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Решение.

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

2x – 9x – 7 = 0;

x = -1; y = 3;

Получаем: A(-1; 3; 0).

Направляющий вектор прямой: $\vec{S} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

Итого: $\dfrac{x+1}{-35} = \dfrac{y-3}{-14} = \dfrac{z}{-7}$; $\quad \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$;

&2. Пересечение прямой и плоскости

Постановка задачи. *Найти точку пересечения прямой*

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

и плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

План решения.

1. Проверим, что прямая не параллельна плоскости. Это означает, что направляющий вектор прямой $\vec{a}=\{l,m,n\}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\{A,B,C\}$ не ортогональны, т.е. их скалярное произведение не равно нулю:

$$Al+Bm+Cn\neq 0.$$

В этом случае существует единственная точка пересечения прямой и плоскости.

2. Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости, вообще говоря, надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными (два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Однако удобнее использовать параметрические уравнения прямой.

Положим
$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = t.$$
Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид
$$\begin{cases} x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1. \end{cases}$$

3. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости и решая его относительно t, находим значение параметра $t = t_0$, при котором происходит пересечение прямой и плоскости.

4. Найденное значение t_0 подставляем в параметрические уравнения прямой и получаем искомые координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x_0 = lt_0 + x_1, \\ y_0 = mt_0 + y_1, \\ z_0 = nt_0 + z_1. \end{cases}$$

Записываем ответ в таком виде: прямая и плоскость пересекаются в точке (x_0, y_0, z_0).

Пример. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1}$$

и плоскости

$$2x - 3y + z - 8 = 0.$$

Решение.

1. Имеем

$$(\vec{a}, \vec{n}\,) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3 + (-1) \cdot 1 = 3 \neq 0.$$

Следовательно, направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости не ортогональны, т.е. прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

2. Положим

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1} = t.$$

Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -1, \\ z = -t. \end{cases}$$

3. Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, находим значение параметра t, при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$2(2t+1) - 3(-1) + 1(-t) - 8 = 0 \Longrightarrow t_0 = 1.$$

4. Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = 1$, получаем

$$x_0 = 3, \quad y_0 = -1, \quad z_0 = -1.$$

Ответ. Прямая и плоскость пересекаются в точке $(3, -1, -1)$.

&3. Угол между прямой и плоскости

Острый угол между прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

определяется по формуле

(2) $$\sin\varphi=\left|\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right|.$$

Пример 2. Найти угол между прямой $\frac{x-5}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$ и плоскостью $3x+4y-2z+15=0$.

Решение. Имеем $l=2$, $m=3$, $n=6$

$$\sin\psi=\frac{|A*l+B*m+C*n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}*\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=$$
$$=\frac{|3*2+4*3+(-2)*6|}{\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}*\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{6}{7\sqrt{29}}\approx 0.16$$

Ответ: $\psi=\arcsin 0{,}16\approx 9.2^0$

&4. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

(3)

Условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

(4)

ПРИМЕР 3

Задача 19, 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1, 2, -1)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}.$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1, 2, -1)$, напишем иа основании уравнения (17, 18) в виде

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0.$$

Пользуясь условием (19, 3) перпендикулярности прямой и плоскости, заменив в последнем уравнении величины A, B и C им пропорциональными величинами m, n и p из уравнений прямой, т. е. числами 1, -3 и 4, и получим

$$1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0,$$

а после упрощений будем иметь

$$x-3y+4z+9=0.$$

&5. Поверхности второго порядка

Поверхностью называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x, y, z) = 0$.

Если это уравнение можно разрешить относительно z, то получим уравнение поверхности в виде $z = f(x, y)$. Уравнение поверхности может и не содержать всех трех переменных: x, y и z.

1. Сфера. Сферой называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром сферы.

а) Уравнение сферы имеет вид.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{20, 1}$$

где a, b и c — координаты центра сферы, а R — ее радиус.

б) Уравнение сферы с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{20, 2}$$

ПРИМЕР 4

Задача 20, 1. Составить уравнение сферы радиуса $R = 5$ с центром в начале координат.

Решение. Подставляя в уравнение сферы (20, 2) $R = 5$, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

ПРИМЕР 5

Задача 20, 2. Составить уравнение сферы радиуса $R = 3$ с центром в точке $C(-1, 2, -3)$.

Решение. Подставляя в (20, 1) $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$ и $R = 3$, будем иметь

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9,$$

ПРИМЕР 6

Задача 20, 5. Определить координаты центра сферы и ее радиус

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0.$$

Решение. Представим это уравнение в виде (20, 1) для чего

1) объединим в группы члены, содержащие одноименные координаты;

2) выделим в этих группах полные квадраты (мы так же поступали и при определении координат центра окружности и ее радиуса). Поступая, как указано, получим

$$\underbrace{x^2 - 6x}_{\mathrm{I}} + \underbrace{y^2 + 8y}_{\mathrm{II}} + \underbrace{z^2 + 10z}_{\mathrm{III}} + 25 = 0.$$

Выделяя полные квадраты в подчеркнутых группах, получим

$$\underbrace{(x-3)^2 - 9}_{\mathrm{I}} + \underbrace{(y+4)^2 - 16}_{\mathrm{II}} + \underbrace{(z+5)^2 - 25}_{\mathrm{III}} + 25 = 0,$$

а упрощая, будем иметь

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 - 25 = 0.$$

и окончательно

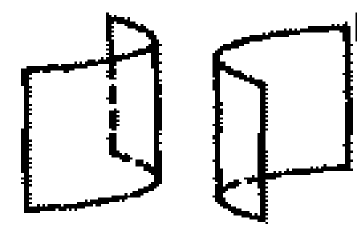
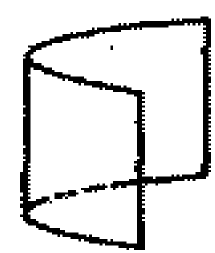
$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 25.$$

Сравнивая с (20, 1), имеем

$$a = +3, \; b = -4; \; c = -5; \; R^2 = 25.$$

Итак, центр сферы — точка $C(3, -4, -5)$, $R = 5$.

2. Цилиндрические поверхности. Цилиндрической поверхностью, или цилиндром, называется поверхность, описанная бесконечной прямой (образующей), которая движется, оставаясь все время параллельной данной прямой и пересекая данную кривую (направляющую).

Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический циликдр	$y^2 = 2px$	

ПРИМЕР 7

Задача 20, 16. Какие поверхности определяют уравнения 1) $x^2+z^2=16$; 2) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$; 3) $x=2z^2$; 4) $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$?

Решение. Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z и определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу; 4) гиперболу.

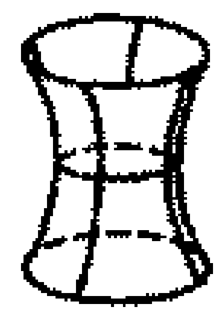
В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, так как эти уравнения не содержат переменной y. Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

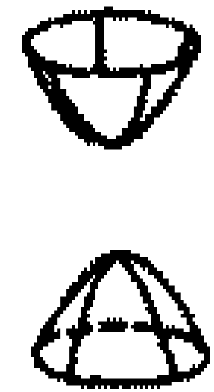
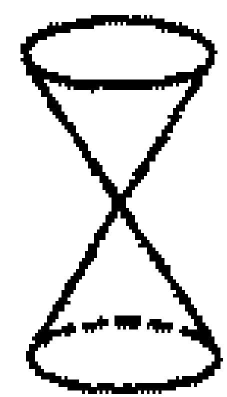
1) $x^2+z^2=16$ — уравнение прямого кругового цилиндра;

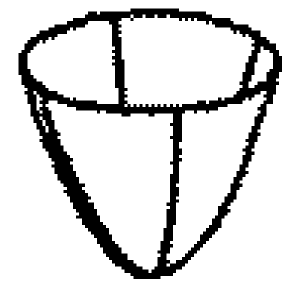
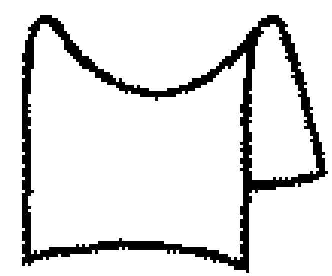
2) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$ — уравнение эллиптического цилиндра;

3) $x=2z^2$ — уравнение параболического цилиндра;

4) $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$ — уравнение гиперболического цилиндра.

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	

Двухполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллиптический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	
Гиперболический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\sin\varphi = \left| \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right|.$$

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр;

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр;

$y^2 = 2px$ — параболический цилиндр.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид*;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однополостный гиперболоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — двуполостный гиперболоид;

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ — эллиптический параболоид;

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$ — гиперболический параболоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — конус второго порядка.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как можно найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве? Приведите примеры.
2. Как записывается угол между прямой и плоскостью?
3. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Назовите поверхности второго порядка и напишите их канонические уравнения. Приведите примеры.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

ЗАДАЧА 1

Привести к каноническому виду уравнение прямой $\begin{cases} x+2y-3z+1=0, \\ x-y+2z-3=0. \end{cases}$

ЗАДАЧА 2

Найти угол между прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ и плоскостью $x+2y+3z-14=0$

ЗАДАЧА 3

Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0$.

ЗАДАЧА 4

Составить уравнение сферы, если её центр C(2; -4; 0) и радиус $R=\sqrt{27}$

ЗАДАЧА 5

Какие поверхности определяются следующими уравнениями:

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!