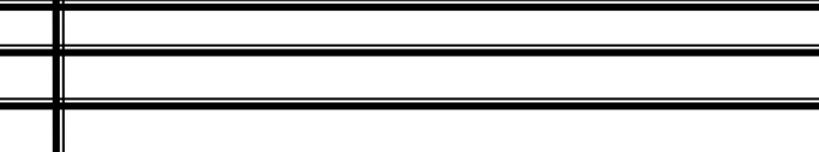




А.Д. НАХМАН

***ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО***



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 004(075)  
ББК В161.12я73-5  
Н349

Р е ц е н з е н т ы:

Заведующий кафедрой  
Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина  
доктор физико-математических наук, профессор  
*В.А. Федоров*

Проректор по научно-методической работе Тамбовского областного института повышения квалификации работников образования  
кандидат педагогических наук, доцент  
*Е.И. Азаркова*

Декан факультета информационных технологий  
Тамбовского государственного технического университета, профессор  
*Ю.Ф. Мартемьянов*

**Нахман, А.Д.**

Н349      Элементы теории функций комплексного переменного :  
учебное пособие / А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос.  
техн. ун-та, 2007. – 188 с. – 400 экз. – ISBN 978-5-8265-0611-0.

Изложены основные понятия и факты теории функций комплексного переменного. Материал содержит значительное количество типовых примеров с решениями и упражнений для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 090105 "Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем".

УДК 004(075)  
ББК В161.12я73-5

**ISBN 978-5-8265-0611-0** © ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет" (ТГТУ), 2007

**А.Д. Нахман**

# **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

*Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем"*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2007

Учебное издание

НАХМАН Александр Давидович

## **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова  
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

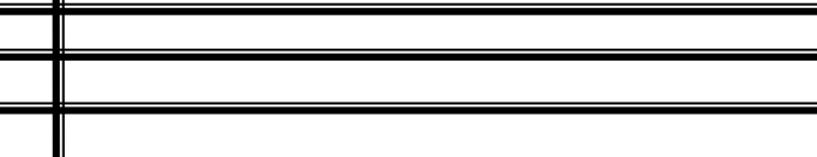
Подписано в печать 02.07.2007.  
Формат 60 × 84/16. 10,93 усл.-печ. л. Тираж 400 экз. Заказ № 445

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14



А.Д. НАХМАН

***ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО***



♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

В настоящем пособии излагаются основные понятия и факты теории функций комплексного переменного. Изложение ведется в рамках федерального компонента образовательного стандарта в области общих математических и естественнонаучных дисциплин для студентов, обучающихся по специальностям, связанным с компьютерными технологиями и обеспечением информационной безопасности. Высокая востребованность соответствующих специалистов и определенная популярность в молодежной среде всего, что связано с компьютерами, обусловили приток в вузы учащихся с весьма неоднородной математической подготовкой. В связи с этим возникла необходимость в создании разноуровневых учебных пособий, в том числе и направленных на первичное ознакомление с предметом.

Настоящее пособие соответствует указанной цели. Его чтение требует знания, в основном, главных положений дифференциально-интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Изложение сопровождается большим количеством примеров, как подробно решенных, так и предлагаемых для самостоятельного решения. Автор стремился к изложению доступному и достаточно краткому, в связи с чем некоторые объемные и сложные доказательства опущены или указаны лишь их идеи. Обращается внимание читателя на те специфические свойства функций, производных, интегралов, которые они приобретают с выходом в комплексную плоскость. Вместе с тем ряд тонких вопросов комплексного анализа опущен вообще или изложен лишь на уровне понятий и перечисления фактов. Такими являются, например, конформные отображения, вычеты относительно бесконечно удаленной точки, аналитическое продолжение и др.

Автор стремился к тому, чтобы материал согласовывался с другими разделами курса математики, мог быть использован в приложениях и соответствовал требованиям, предъявляемым к математической подготовке современных специалистов.

## Глава 1

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

---

#### 1.1. ЗАДАЧА О РАСШИРЕНИИ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1<sup>0</sup>. Процесс освоения понятия числа состоит из нескольких этапов.

а) Рассмотрение натуральных чисел, т.е. чисел, употребляемых при счете. Их множество обозначается буквой  $\mathbf{N}$ :  $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ .

б) *Расширение*  $\mathbf{N}$  до множества  $\mathbf{Z}$  всех целых чисел; необходимость такого расширения возникает, так как во множестве  $\mathbf{N}$  не всегда выполнима операция вычитания; например  $(2 - 5) \notin \mathbf{N}$ . Итак, вводится множество  $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , при этом  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ .

в) *Расширение*  $\mathbf{Z}$  до множества  $\mathbf{Q}$  всех рациональных чисел, т.е. множества всех дробей вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \neq 0$ . В классе чисел  $\mathbf{Q}$  (в отличие от  $\mathbf{Z}$ ) всегда выполнимо деление на любое целое  $n$ ,  $n \neq 0$ . Поскольку каждое целое число  $m$  есть дробь со знаменателем, равным единице, то  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ . Заметим, что всякое рациональное число есть либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь.

г) Извлечение корня  $n$ -й степени (действие, обратное возведению в натуральную степень) не всегда выполнимо в  $\mathbf{Q}$ .

Дополним множество  $\mathbf{Q}$  всевозможными десятичными непериодическими дробями (иррациональными числами). В полученном множестве  $\mathbf{R}$  всех действительных чисел уже всегда возможно извлечение корня нечетной степени; корень четной степени может быть извлечен из любого *неотрицательного* действительного числа. Ясно, что  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ . Остается невыполнимым извлечение корня четной степени из отрицательного числа; например  $\sqrt{-1}$  не существует в  $\mathbf{R}$ . Следовательно, требуется дальнейшее *расширение*  $\mathbf{R}$  до такого множества  $\mathbf{C}$ , в котором оказалось бы выполнимым и указанное действие (например, были бы разрешимы квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами).

Построением  $\mathbf{C}$  (так чтобы  $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ ) мы и будем заниматься в главе I.

#### 1.2. МНИМАЯ ЕДИНИЦА. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1<sup>0</sup>. В выбранной прямоугольной системе координат точка  $(1, 0)$  соответствует числу 1 на числовой оси абсцисс (оси действительных чисел), а точка  $(0, 1)$  – числу 1 на оси ординат. Чтобы отличать по написанию эти две единицы, последнюю обозначим буквой  $i$  и назовем мнимой единицей. Итак, точка  $(0, 1)$  отождествляется с мнимой единицей; всякое же другое

число оси ординат, отвечающее точке  $(0, y)$ , теперь естественно записать в виде  $yi$  и назвать чисто мнимым числом; сама ось  $OY$  будет далее называться мнимой осью (тогда как  $OX$  – действительная ось).

2<sup>0</sup>. Произвольную упорядоченную пару  $x, y$  действительных чисел ("комплекс" из двух действительных чисел), соответствующую точке  $(x, y)$  координатной плоскости, назовем комплексным числом.

Перейдем к так называемой алгебраической записи (форме) комплексного числа.

3<sup>0</sup>. Произвольная точка  $(x, y)$ , расположенная в прямоугольной системе координат  $XOY$ , есть конец радиус-вектора

$$\vec{z} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad (1.2.1)$$

где  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – единичные направляющие вектора координатных осей  $OX$  (конец вектора расположен в точке  $1$  этой оси) и  $OY$  (конец вектора  $\vec{e}_2$  расположен в точке  $i$ ). Соответственно, по аналогии с векторной записью (1.2.1) для точки  $z$  с координатами  $(x, y)$  будем употреблять запись

$$z = x + yi \quad (1.2.2)$$

и говорить теперь, что  $z$  – это *комплексное число вида* (1.2.2).

Итак, между точками  $(x, y)$  и комплексными числами вида (1.2.2) установлено взаимно однозначное соответствие. Сама же плоскость (со введенной в ней прямоугольной системой координат) называется *комплексной плоскостью*. В частности, для действительного числа  $x$  естественна запись  $x = x + 0 \cdot i$ , что соответствует точке  $(x, 0)$ ; и теперь мы не делаем различия между действительными числами  $x$  и комплексными числами вида  $x + 0 \cdot i$ . Для чисто мнимого  $y \cdot i$ , соответствующего точке

$(0, y)$ , употребима запись  $yi = 0 + yi$ , т.е. любое  $yi \in \mathbb{C}$ .

Итак, множество  $\mathbb{C}$  всех комплексных чисел содержит своим подмножеством  $\mathbb{R}$ .

4<sup>0</sup>. Числа вида  $z = x + yi$  и  $\bar{z} = x - yi$  называются *комплексно-сопряженными*. Они изображаются точками, симметричными относительно оси  $OX$ , см. рис. 1.2.1.

Модулем комплексного числа называется длина (модуль) радиус-вектора точки  $(x, y)$ , т.е.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.2.3)$$

В частности, модуль действительного числа  $x = x + 0 \cdot i$  есть  $\sqrt{x^2}$ , т.е. он равен абсолютной величине числа  $x$ ; аналогично

$$|yi| = \sqrt{y^2} = |y|.$$

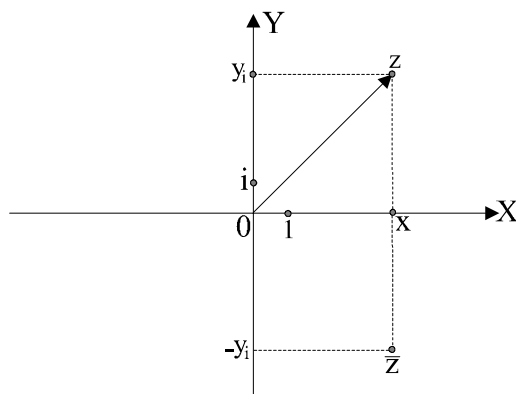


Рис. 1.2.1

5<sup>0</sup>. Действительной частью числа  $z = x + yi$  называется  $x$ , а мнимой частью – число  $y$ ; применяем обозначения  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Комплексные числа  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$  называются равными, если совпадают их действительные и мнимые части. Другими словами,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2; \\ y_1 = y_2. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Геометрически соотношение  $z_1 = z_2$  означает совпадение соответствующих точек комплексной плоскости.

Комплексные числа не сравниваются, т.е. во множестве  $\mathbb{C}$  не вводятся отношения "больше" и "меньше".

### 1.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1<sup>0</sup>. В параграфе 1.2 мы отождествили любое комплексное число  $z = x + yi$  с радиус-вектором точки  $(x, y)$ . В связи с этим операция сложения комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1i$  и  $z_2 = x_2 + y_2i$  вводится по аналогии с такой же операцией над векторами, которая, в свою очередь, выполняется *покоординатно*. Итак, полагаем по определению

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Другими словами, сложение комплексных чисел выполняется по такому же правилу, как над многочленами.

Сумма большого количества комплексных чисел находится аналогичным образом: если  $z_k = x_k + y_ki$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то

$$z = \sum_{k=1}^n z_k \text{ определяется в виде } z = \sum_{k=1}^n x_k + \left( \sum_{k=1}^n y_k \right) i.$$

Поскольку привычные свойства коммутативности и ассоциативности операции сложения справедливы для действительных чисел, они (эти свойства) на основании введенных определений будут сохраняться и для комплексных чисел:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1; \\ (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

2<sup>0</sup>. *Вычитание* комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению:

$$z = z_2 - z_1, \text{ если } z_2 = z + z_1.$$

Установим существование, единственность разности и способ ее нахождения. Пусть  $z = x + yi$ , тогда по определению равенства комплексных чисел соотношение

$$x_2 + y_2i = (x + yi) + (x_1 + y_1i)$$

будет означать, что

$$\begin{cases} x_2 = x + x_1; \\ y_2 = y + y_1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = x_2 - x_1; \\ y = y_2 - y_1. \end{cases}$$

Итак, действительная и мнимая части разности  $z = z_2 - z_1$  определены однозначным образом, при этом получена формула

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i.$$

Имеем аналогию с разностью векторов, вычитание которых выполнялось *покоординатно*. Можно также сказать, что вычитание производится по такому же правилу, как для многочленов.

*Алгебраическая сумма*  $n$  комплексных чисел ( $n > 2$ ) определяется путем выполнения действий в том порядке, в каком они записаны. Например,

$$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = ((z_1 - z_2) - z_3) + z_4.$$

Однако, и в этом случае действует ассоциативный закон (возможность группировки), так как этот закон справедлив для действительных и для мнимых частей соответствующих комплексных чисел. Так, в приведенном примере возможен и такой порядок действий:

$$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = (z_1 - z_2) + (z_4 - z_3).$$

**Пример:** Вычислить  $|z_1 + z_2 - z_3|$ , если

$$z_1 = -2i, \quad z_2 = 7 + 5i, \quad z_3 = 1 - 5i.$$

*Решение.* Имеем

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 - z_3 &= (z_1 + z_2) - z_3 = ((0 + 7) + (-2 + 5)i) - (1 - 5i) = \\ &= (7 + 3i) - (1 - 5i) = (7 - 1) + (3 + 5)i = 6 + 8i; \\ |z_1 + z_2 - z_3| &= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10. \end{aligned}$$

3<sup>0</sup>. Произведение двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1i$  и  $z_2 = x_2 + y_2i$  определим в виде

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \quad (1.3.1)$$

Имеем, в частности, квадрат комплексного числа  $z^2$  (т.е. произведение  $zz$ ) в виде  $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ ; следовательно,  $i^2 = 0 - 1 + 0i$ ,  $i^2 = -1$ .

В связи с таким свойством числа  $i$  употребляют запись  $i = \sqrt{-1}$ ; ясно, что  $i \notin \mathbf{R}$ ; теперь становится понятно, почему число  $i$  названо *мнимой* единицей. Заметим, что умножение (1.3.1) комплексных чисел выполняется по правилу умножения многочленов с заменой  $i^2$  на  $-1$ .

Легко проверить справедливость коммутативного и ассоциативного законов:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_2 z_1; \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3), \end{aligned}$$

а также дистрибутивного закона умножения относительно сложения:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Полезен следующий факт:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 + (xy - yx)i = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (1.3.2)$$

4°. Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Именно,

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \text{ если } z_1 = z z_2, \text{ где } z_2 \neq 0. \quad (1.3.3)$$

Получим формулу, по которой можно найти частное двух комплексных чисел,  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$ .

Если  $z = x + yi$ , то на основании определения (1.3.3) мы должны получить

$$x_1 + y_1 i = (x + yi)(x_2 + y_2 i),$$

т.е.

$$x_1 + y_1 i = (xx_2 - yy_2) + i(x_2 y + xy_2)$$

и, по определению равенства комплексных чисел, имеем

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1; \\ y_2 x + x_2 y = y_1. \end{cases}$$

Осталось найти решение  $(x, y)$  этой системы уравнений; умножив первое уравнение на  $y_2$ , второе на  $(-x_2)$  и сложив их, получим:

$$-(y_2^2 + x_2^2)y = x_1 y_2 - x_2 y_1, \text{ или } y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Аналогично находим:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

т.е.

$$z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \quad (1.3.4)$$

Формулой (1.3.4) устанавливается не только существование и единственность частного, но также указывается и способ его нахождения. Решая конкретные примеры, можно пользоваться способом одновременного умножения числителя и знаменателя дроби на число, сопряженное знаменателю. Согласно (1.3.2), имеем

$$z = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2},$$

и мы снова получили формулу (1.3.4).

5°. Выполняя сложение (вычитание), умножение и деление комплексных чисел, придерживаемся привычных свойств и порядка действий. Например:

$$\begin{aligned} (i-5)\left(2i + \frac{3}{2+i}\right) &= (i-5)\frac{2i(2+i)+3}{2+i} = (i-5)\frac{4i+2i^2+3}{2+i} = \\ &= \frac{(i-5)(4i+1)}{2+i} = \frac{-9-19i}{2+i} = \frac{-(9+19i)(2-i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-(37+29i)}{4+1} = -\frac{37}{5} - \frac{29}{5}i. \end{aligned}$$

#### 1.4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1°. Совместим стандартным образом прямоугольную и полярную системы координат: полярную ось направим по оси  $OX$ , полюс системы совмещаем с точкой  $O(0, 0)$ ; выбираем в обеих системах одинаковые единицы масштаба; ось  $OY$  направляем по лучу  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае прямоугольные координаты  $(x, y)$  и полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  одной и той же точки  $z$  связаны соотношениями (см. рис. 1.4.1):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

2°. Связь полярных и прямоугольных координат точки  $M$  может быть также представлена в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,  $\rho = |z|$  есть модуль числа  $z$ ; число  $\varphi$  назовем аргументом  $z$ . Обозначим через  $\operatorname{arg} z$  одно из возможных значений  $\varphi$ :  $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$ ; это значение назовем главным значением аргумента; иногда главное значение рассматриваем в интервале; совокупность всех значений  $\varphi$  имеет вид

$$\text{Очевидно, что } \operatorname{arg}(\pm iy) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ (случай } x = 0, y \neq 0),$$

Для точки  $z = 0$  значение аргумента не определено; очевидно, что  $|0| = 0$ .

3°. Умножение, возведение в натуральную степень (т.е. умножение числа  $z$  на себя  $n$  раз) и деление комплексных чисел удобно выполнять, записав эти числа в тригонометрической форме.

Установим формулы:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (1.4.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad \rho_2 \neq 0; \quad (1.4.3)$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4.4)$$

Иначе говоря: при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении – модули делятся, а аргументы вычитаются; при возведении в степень  $n \in \mathbf{N}$  – модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на  $n$ .

Доказательство (1.4.2). По правилу умножения комплексных чисел имеем

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)].$$

В круглых скобках записаны соответственно формулы для косинуса суммы и синуса суммы. Следовательно,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

что и требовалось.

Доказательство (1.4.3). Пусть  $z = \frac{z_1}{z_2}$ . По определению деления тогда  $z_1 = z z_2$ , а по формуле (1.4.2)

$$\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = \rho \rho_2 (\cos(\varphi + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_2)),$$

отсюда

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho \rho_2; \\ \varphi_1 = \varphi + \varphi_2 + 2\pi k, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \\ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Итак, частное  $z$  имеет модулем число  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ , а аргументом (с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ) разность  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Это и есть утверждение (1.4.3).

Наконец, последовательно выполняя умножение  $z$  (на себя)  $n$  раз, получаем по формуле (1.4.2):

$$z^n = z \cdot \dots \cdot z = \rho \cdot \rho \cdot \dots (\cos(\varphi + \varphi + \dots) + i \sin(\varphi + \varphi + \dots)) = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

и формула (1.4.4) доказана.

4°. Пример 1. Выполнить в тригонометрической форме следующие действия:

а)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; б)  $z_1^4$ , где  $z_1 = -3 + 3i$ ;  $z_2 = -6\sqrt{2}i$ .

*Решение.* а) Найдем модуль и аргумент каждого из чисел  $z_1$  и  $z_2$ . Имеем  $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{3}{-3} = -1$ .

Поскольку точка  $z_1$  расположена во 2-й четверти, то  $\varphi_1 = \arg z_1 = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ . Аналогично,

$|z_2| = \sqrt{0 + (-6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_2$  не существует, но по расположению точки  $z_2$  на оси  $OY$  (в нижней полуплоскости) видим, что  $\varphi_2 = \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$ . Следовательно, в тригонометрической форме (см. рис. 1.4.2)

$$z_1 = 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \quad z_2 = 6\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Теперь, согласно формуле (1.4.3),

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

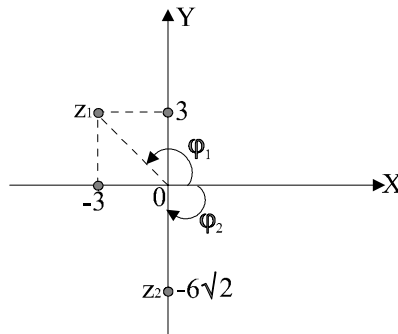


Рис. 1.4.2

Исключая период  $2\pi$  под знаком косинуса и синуса, имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = 0,5 \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

б) По формуле (1.4.4) получаем:

$$z_1^4 = (3\sqrt{2})^4 \left( \cos 4 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right); \quad z_1^4 = 324 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

В алгебраической форме  $z_1^4 = -324$ .

**Пример 2.** Выяснить геометрический смысл соотношений:

а)  $|z - z_0| = \rho$ ; б)  $|z - z_0| < \rho$ ; в)  $|z - z_0| > \rho$ ,

где  $\rho > 0$  и  $z_0$  – фиксированное комплексное число; г)  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ .

*Решение.* а) Записав  $z = x + yi$ ,  $z_0 = x_0 + y_0i$  и выполняя вычитание, имеем  $|z - z_0| = |(x - x_0) + (y - y_0)i| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Следовательно, равенство  $|z - z_0| = \rho$  означает, что  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ . Получили уравнение окружности радиуса  $\rho$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$ .

Итак, геометрический образ уравнения  $|z - z_0| = \rho$  – это все точки окружности с центром  $z_0$  радиуса  $\rho$ .

Аналогично  $|z - z_0| < \rho$  означает, что  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$ , т.е. геометрическим образом этого неравенства служит множество всех внутренних точек круга;  $|z - z_0| > \rho$  – множество всех точек, расположенных вне круга; центр круга и радиус – те же:  $z_0$  и  $\rho$  соответственно (рис. 1.4.3).

б) Так как  $\varphi = \arg z$  есть угол поворота оси  $OX$  до совмещения с точкой  $z$  ( $-\pi < \varphi \leq \pi$ ), то все точки  $z$ , обладающие свойством  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ , лежат на луче  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  (на этом луче исключена точка  $z = 0$ , аргумент которой не определен); см. рис. 1.4.3.

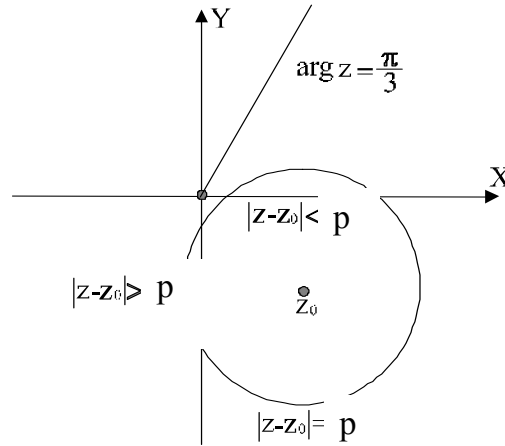


Рис. 1.4.3

### 1.5. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1<sup>0</sup>. Пусть  $n \in \{2, 3, \dots\}$ . Корнем  $n$ -й степени из числа  $z$  назовем число  $w = \sqrt[n]{z}$ , обладающее свойством  $w^n = z$ . Установим, что при всяком  $z \neq 0$  существует ровно  $n$  различных значений корня, которые имеют вид

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad (1.5.1)$$

здесь  $\rho$  и  $\varphi$  – соответственно, модуль и аргумент числа  $z$ , т.е.  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ; значение  $\sqrt[n]{\rho}$  понимается как *арифметический* корень из положительного числа  $\rho$ , так что  $\sqrt[n]{\rho} > 0$ .

2<sup>0</sup>. Итак, мы доказываем формулу (1.5.1).

Если  $w = |w|(\cos \Phi + i \sin \Phi)$  – тригонометрическая форма числа  $w$ , то, по определению,  $w^n = z$ , т.е. в силу (1.4.4),

$$|w|^n (\cos n\Phi + i \sin n\Phi) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Значит,  $|w|^n = \rho$ , откуда  $|w| = \sqrt[n]{\rho}$  (имеется в виду принятое во множестве действительных чисел извлечение арифметического корня). Аргументы  $n\Phi$  и  $\varphi$  равных комплексных чисел могут (находясь под знаком косинуса и синуса) отличаться лишь на величину периода  $T = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , так что

$$n\Phi = \varphi + 2\pi k, \text{ откуда } \Phi = \Phi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}; \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Покажем, что достаточно рассмотреть  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Для этого, прежде всего, выясним, как расположены точки (1.5.1) на комплексной плоскости. Во-первых, все они имеют один и тот же модуль, равный  $\sqrt[n]{\rho}$ , а значит, находятся на окружности с центром в начале координат радиуса  $\sqrt[n]{\rho}$ . Во-вторых, при  $k=0$  точка  $w_0$  имеет полярный угол  $\Phi_0 = \frac{\varphi}{n}$ , а полярный угол следующей точки  $w_1$  отличается на величину  $\frac{2\pi}{n} \cdot 1$ , т.е.  $\Phi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$ .

Далее,

$$\Phi_2 = \frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{n} = \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) + \frac{2\pi}{n} = \Phi_1 + \frac{2\pi}{n}, \dots, \Phi_{n-1} = \Phi_{n-2} + \frac{2\pi}{n}; \quad \Phi_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi, \dots$$

Таким образом, каждая следующая точка  $w_k$  получается из предыдущей  $w_{k-1}$  поворотом против часовой стрелки на величину  $\frac{2\pi}{n}$ , а точка  $w_n$  совпала с  $w_0$  (совершен поворот на  $2\pi$ ). С дальнейшим ростом  $k$

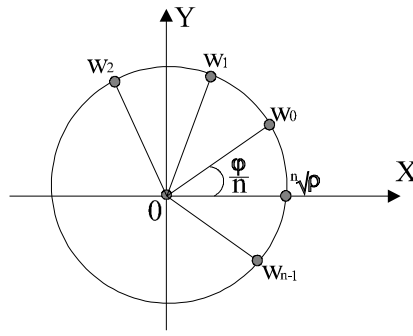


Рис. 1.5.1

опять получаем точки  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ . При отрицательных  $k$ , т.е.  $k = -1, -2, \dots$  имеем обход тех же точек по часовой стрелке, т.е. в обратном порядке:  $w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_0$ . Итак, только  $n$  различных точек получаемых, например при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , соответствуют операции извлечения корня  $n$ -ой степени; см. рис. 1.5.1. Формула (1.5.1) установлена. Заметим, что  $\sqrt[n]{0} = 0$  можно понимать как  $n$  совпадающих значений, равных нулю.

3<sup>0</sup>. Непосредственно из определения корня  $n$ -й степени вытекают привычные свойства соответствующей операции, например,

$$\sqrt[n]{z\eta} = \sqrt[n]{z}\sqrt[n]{\eta}; \quad \sqrt[n]{\frac{z}{t}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{t}}, \quad t \neq 0.$$

Эти равенства следует понимать как *совпадение множеств* значений выражений в левых и правых частях.

Пример 1. Вычислить  $\sqrt{a^2}$ , где  $a > 0$  – действительное число.

Решение. Запишем число  $a^2$  в тригонометрической форме:

$$a^2 = a^2(\cos 0 + i \sin 0).$$

По формуле (1.5.1)

$$\sqrt{a^2} = a \left( \cos \frac{0+2\pi k}{2} + i \sin \frac{0+2\pi k}{2} \right), \quad k = 0; 1.$$

Получаем  $\sqrt{a^2} = a$  при  $k = 0$ ;  $\sqrt{a^2} = a(\cos \pi + i \sin \pi) = -a$  при  $k = 1$ . Заметим, что во множестве действительных чисел рассматривалось лишь одно положительное значение (арифметическое значение) корня, а именно,  $\sqrt{a^2} = a$ .

Пример 2.  $\sqrt{-a^2} = \pm ai$ ,  $a > 0$ . Действительно,  $(ai)^2 = a^2 i^2 = -a$  и  $(-ai)^2 = a^2 i^2 = -a$ . Значит (по определению квадратного корня) оба значения  $\pm ai$  служат результатом извлечения корня. В силу п. 1<sup>0</sup> мы должны получить ровно два различных результата. Следовательно, других значений  $\sqrt{-a^2}$  нет.

Пример 3. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости значения  $w = \sqrt[3]{8-8\sqrt{3}i}$ .

Решение. Для  $z = 8-8\sqrt{3}i$  имеем  $|z| = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{8\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}$ , поэтому  $\varphi = \arg z = -\frac{\pi}{3}$ . По формуле (1.5.1) имеем

$$w_k = \sqrt[3]{16} \left( \cos \left( \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Следовательно (см. рис. 1.5.2),

$$w_0 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{9} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{9} \right) \right); \quad w_1 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9} \right);$$

$$w_2 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{9} + i \sin \frac{11\pi}{9} \right).$$

Поскольку мы условились считать (для любого  $w$ )  $-\pi < \arg w \leq \pi$ , то в случае  $w_2$  исключим под знаком тригонометрических функций период  $2\pi$ . Тогда

$$w_2 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{9} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{9} \right) \right).$$

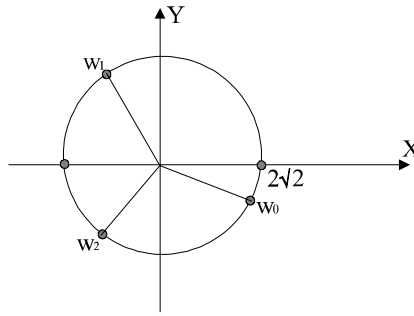


Рис. 1.5.2

4°. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$w^2 + d^2 = 0, \text{ где } d \in \mathbf{R}, d > 0.$$

Оно равносильно равенству  $w = \sqrt{-d^2}$  или, в свою очередь,  $w_{1,2} = \pm di$ , если воспользоваться результатом решения примера 2 в п. 3°.

5°. Теперь мы можем получить формулу для решений квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.5.2)$$

с произвольными коэффициентами ( $a \neq 0$ ). Выделяя полный квадрат, имеем

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0.$$

Рассмотрим только случай  $4ac - b^2 > 0$ , или, что то же самое,  $D = b^2 - 4ac < 0$ , так как при  $D \geq 0$  формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (1.5.3)$$

нам известна. При  $\alpha^2 = \frac{-D}{4a^2}$  в силу результата п. 4° получаем

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{-Di}}{2a}, \text{ или } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-Di}}{2a}. \quad (1.5.4)$$

Теперь мы можем решать (по формуле (1.5.4)) квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, или, что то же самое, пользоваться формулой (1.5.3) при любых значениях  $D$ .

Заметим, что запись  $\sqrt{D}$  (или  $\sqrt{-D}$  в (1.5.4)) понимается как арифметическое значение корня, так как двузначность операции извлечения корня уже учтена знаком  $\pm$ .

6°. П р и м е р 1. Решить уравнение  $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ .

Р е ш е н и е. Имеем квадратное уравнение относительно величины  $x^2$ :

$$(x^2)^2 + 10x^2 + 9 = 0.$$

Согласно (1.5.3)

$$(x^2)_1 = -9, \quad (x^2)_2 = -1.$$

В свою очередь, каждое из этих уравнений имеет по два корня:

$$x_{1,2} = \pm 3i, \quad x_{3,4} = \pm i.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение  $x^3 + 64 = 0$ .

Р е ш е н и е. Записав условие в виде  $x^3 + 4^3 = 0$ , получим по формуле суммы кубов

$$(x + 4)(x^2 + 4x + 16) = 0.$$

Имеем  $x_1 = -4$ , и остается найти решения квадратного уравнения  $x^2 + 4x + 16 = 0$ , для которого дискриминант  $D = -48 < 0$ . По формуле (1.5.4) получаем

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}i}{2} \text{ или } x_{3,4} = -2 \pm 2\sqrt{3}i.$$

7°. Итак, любое квадратное уравнение, согласно (1.5.3), имеет ровно два корня (при  $D = 0$  корни совпадают; в этом случае говорят, что корень  $x_1$  имеет кратность, равную двум). В силу примеров п. 6° можно предположить, что каждое ку-

бическое уравнение имеет ровно три корня, уравнение четвертой степени – ровно четыре корня и т.д. Кроме того, среди корней уравнения с действительными коэффициентами комплексные числа присутствуют сопряженными парами: вместе с числом вида  $z_1 = a + bi$  корнем служит и  $z_2 = a - bi$ .

Такая гипотеза оказывается верной. А именно, в курсе алгебры доказывается что:

а) каждое алгебраическое уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

имеет в  $\mathbb{C}$  ровно  $n$  корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность;

б) если коэффициенты уравнения  $a_k (k = 0, 1, \dots, n)$  – действительные числа, то комплексные числа присутствуют во множестве корней сопряженными парами.

Эти тезисы становятся более ясными после рассмотрения следующего примера.

**Пример.** Решить уравнение  $x^6 + 4x^4 + 4x^2 = 0$ .

**Решение.** Мы должны получить ровно шесть корней. Перепишем уравнение в виде

$$x^2(x^4 + 4x^2 + 4) = 0 \quad \text{или} \quad x^2(x^2 + 2)^2 = 0.$$

Уравнение  $x^2 = 0$  имеет два корня:  $x_1 = x_2 = 0$ . Аналогично, уравнение  $z^2 = 0$ , где  $z = x^2 + 2$  имеет корни  $z_1 = z_2 = 0$ ; в случае  $z_1 = 0$  или

$x^2 + 2 = 0$ , имеет  $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$ ; но точно такие же корни  $x_{5,6} = \pm\sqrt{2}i$  получаем в случае  $z_2 = 0$ . Таким образом, каждое из чисел  $0, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$  оказалось корнем кратности два.

## 1.6. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1°. Даны числа  $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}$ ,  $z_2 = -4i$ ,  $z_3 = 5i - 1$ .

Выполнить действия:

а)  $2z_1 - 4z_3 + i^3$ ; б)  $z_1 z_2$ ; в)  $\frac{z_2}{z_3 - i}$ ; г)  $2z_1 + \frac{2z_3}{z_2}$ ;

д)  $z_2^4 - z_2^2 - 4\bar{z}_1$ ; е)  $\frac{\bar{z}_3}{|z_3 + 6|} + 2iz_2$ .

Результаты изобразить на комплексной плоскости.

2°. Изобразить множества точек  $z$ , для которых:

а)  $|z + 3i| \leq 3$ ; б)  $|z + i - 1| > 1$ ; в)  $\operatorname{Re} \frac{2z}{i} < 0$ ;

г)  $\operatorname{Im} z^2 < 2$ ; д)  $|z| \leq |2\sqrt{3}i - 2|$ .

3°. Доказать равенства

а)  $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$ ; б)  $|\bar{z} + z|^2 + |\bar{z} - z|^2 = 4|z|^2$ .

4°. Найти действительные числа  $x$  и  $y$  из уравнений:

а)  $(5x + 2y)i - x + y = 1$ ; б)  $2x + 7y - (5 - 2x)i + 12 = 3yi$ .

5°. Записать в тригонометрической форме числа

$$z_1 = -9i, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -(1+i), \quad z_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

и выполнить затем указанные действия:

а)  $z_2^4$ ; б)  $z_1 z_2$ ; в)  $\frac{z_2 z_3}{z_1}$ ; г)  $\frac{z_4^2}{z_3}$ .

6°. Найти все значения:

а)  $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-i}{25}}$ ; б)  $\sqrt[3]{-8}$ ; в)  $\sqrt[4]{1}$ ; г)  $\sqrt[4]{i^3}$ .

7<sup>0</sup>. Решить уравнения и изобразить на комплексной плоскости множества решений:

а)  $z^2 + 4z + 53 = 0$ ; б)  $2z^2 - z - 1 = 0$ ; в)  $z^4 + i = 0$ ; г)  $z^4 + z^2 = 2$ ;

д)  $z^4 + 26z^2 + 25 = 0$ ; е)  $z^3 + 8i = 0$ ; ж)  $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ ; з)  $iz^4 + 1 = 0$ .

## Глава 2

### РЯДЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

#### 2.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1°. *Окрестностью*  $U_0$  точки  $z_0 = x_0 + y_0 i$  называется множество всех точек некоторого круга на комплексной плоскости с центром  $z_0$ . Если  $\varepsilon > 0$  – радиус этого круга, то употребляем также термин " $\varepsilon$  – окрестность" и обозначение  $U(z_0; \varepsilon)$ . Иными словами,

$$U_0 = U(z_0; \varepsilon) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Множество  $G$  точек комплексной плоскости называется *открытым*, если каждая его точка является *внутренней*, т.е. содержится в  $G$  вместе с некоторой окрестностью.

Например, кольцо, т.е. множество вида

$$U(a; \iota, R) = \{z: \iota < |z - a| < R\}, \quad (2.1.1)$$

где  $a$  – фиксировано,  $\iota, R > 0$ , является, очевидно открытым множеством.

Для сравнения заметим, что если в (2.1.1) неравенство записать в виде  $\iota \leq |z - a| < R$ , то свойство "открытости" нарушается, так как точки окружности  $|z - a| = \iota$  содержатся во множестве лишь с "частью" окрестности (см. рис. 2.1.1).

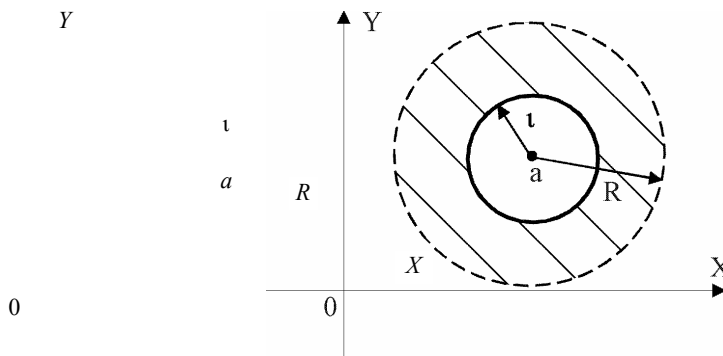


Рис. 2.1.1

Точки, обладающие подобными свойствами, называются *граничными*. Более точно, точка  $z_0$ , не принадлежащая  $G$ , такая, что любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек из  $G$ , называется *граничной* для открытого множества  $G$ .

2°. Множество  $G$  называется *связным*, если две его любые точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в  $G$ . Открытое связное множество  $G$  называется *областью*.

Множество, состоящее из области  $G$  и ее границы, называется *замкнутой областью*.

Как правило, мы будем рассматривать ограниченные области (замкнутые или нет), т.е. области, содержащиеся в некотором круге  $U(a; R)$ .

3°. **О п р е д е л е н и е.** Пусть  $G$  – некоторое множество комплексных чисел. Говорят, что на множестве  $G$  (области определения  $G$ ) задана *функция* вида  $w = f(z)$ , если каждому  $z \in G$  поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел  $w$ . В последнем случае мы говорим, что функция  $f$  *многозначна*.

Если, в частности, все значения  $w$  – действительные числа, то говорим о *действительнозначной функции комплексного переменного*. Если  $G$  – множество на "действительной оси" (оси абсцисс), т.е.  $z = x \in \mathbf{R}$ , то  $w = f(x)$  – *комплекснозначная функция действительного переменного*.

Так, функция вида  $w = \text{Arg } z, z \neq 0$  (т.е.  $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ) является многозначной (действительнозначной) функцией, так как  $w = w_n = \arg z + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ , и при каждом  $n$  мы получаем новое значение  $w_n$ , отличное от любого  $w_m, m \neq n$ .

Другая знакомая нам функция – это  $w = z^n, z \in \mathbf{C} (n = 1, 2, \dots)$ . Так как результат умножения определяется однозначным образом (в данном случае – умножения  $z$  на себя  $n$  раз), то указанная функция однозначна.

Многозначной (именно,  $n$ -значной) является и функция вида

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad \varphi = \arg z, \\ k = 0, 1, \dots, n-1; \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать, в основном, функции однозначные, если не оговорено противное.

4°. Поскольку  $w = f(z) = f(x + yi)$  определяется парами значений  $(x, y)$ , то можно говорить об  $f$  как функции двух действительных переменных, заданной на некотором множестве  $G$ . В то же время  $w = u + vi$ , тогда  $u = \operatorname{Re} f(x + yi) = u(x, y)$ ,  $v = \operatorname{Im} f(x + yi) = v(x, y)$  – две действительнoзначные функции действительных переменных  $x$  и  $y$ . Таким образом,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (2.1.2)$$

т.е. задание  $f(z)$  есть задание пары функций  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , и этим облегчаются многие формулировки и доказательства в теории функций комплексного переменного.

Например,  $w = z^2$  может быть представлено в виде (2.1.2) следующим образом:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

5°. Комплекснозначная функция вида  $w = f(n)$ ,  $n \in N$  называется *последовательностью комплексных чисел*. Множество ее значений имеет вид  $\{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ . Согласно (2.1.2)

$$w = f(n) = w_n = x_n + iy_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т.е. одновременно с  $f(n)$  задаются две последовательности действительных чисел  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ .

6°. Непрерывное отображение  $\gamma$  некоторого отрезка  $[\alpha, \beta]$  действительной оси во множество комплексных чисел называется *путем* (кривой)  $\gamma$ . Иначе говоря, путь – это комплекснозначная функция  $z = \gamma(t)$  действительного переменного, причем  $x(t) = \operatorname{Re} \gamma(t)$  и  $y(t) = \operatorname{Im} \gamma(t)$  – непрерывные на  $[\alpha, \beta]$ , действительнoзначные функции. Точки  $a = \gamma(\alpha)$  и  $b = \gamma(\beta)$  называются, соответственно, началом и концом пути; если  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ , то путь называется *замкнутым*.

Путь  $\gamma$  называется *гладким*, если в представлении  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  обладают на  $[\alpha, \beta]$  непрерывными производными, причем  $\gamma'(t) \neq 0$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ ; здесь  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

Путь  $\gamma$  называется *кусочно-гладким*, если  $\gamma(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  (в указанном выше смысле) и  $[\alpha, \beta]$  можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых  $\gamma(t)$  определяет гладкий путь.

7°. Область  $D$  на плоскости называется *односвязной*, если ее граница есть один (непрерывный) путь без самопересечений (возможно, замкнутый). Область, не являющаяся односвязной, называется *многосвязной*. Область называется *n-связной*, если ее граница состоит из  $n$  ( $n > 1$ ) непересекающихся (непрерывных) путей; некоторые из них могут вырождаться в точку.

## 2.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1°. Определение предела функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  (внутренней во множестве  $G$ , где определена  $w = f(z)$ ) вводится совершенно аналогично соответствующему понятию для функции действительного переменного. Именно, число  $w_0 = u_0 + iv_0$  есть *предел*  $w = f(z)$  в точке  $z_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что

$$|w - w_0| < \varepsilon \text{ как только } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Иными словами, для любой окрестности  $U(w_0; \varepsilon)$  найдется некоторая окрестность  $U(z_0; \delta)$ , такая что

$$w \in U(w_0; \varepsilon) \text{ как только } z \in U(z_0; \delta), \quad z \neq z_0.$$

Употребляется привычное обозначение:

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z). \quad (2.2.1)$$

2°. Соотношение (2.2.1) эквивалентно, очевидно, следующему:

$$\lim_{|z - z_0| \rightarrow 0} |f(z) - w_0| = 0. \quad (2.2.2)$$

Поскольку для любых действительных переменных  $u, v$  значения  $\sqrt{u^2 + v^2}$  стремятся к нулю тогда и только тогда, когда одновременно  $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0$ , то согласно определению модуля и соотношению (2.1.2) предельный переход вида (2.2.2) равносильен тому, что одновременно

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Другими словами, предельный переход совершается по отдельности в действительной и мнимой части функции  $w = f(z)$ . Отсюда вытекает, что простейшие свойства пределов (вынесение постоянного множителя за знак предела, предельный переход в сумме, произведении и т.п.) переносятся и на случай функций комплексного переменного.

3°. По аналогии с (2.2.2) говорят, что

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

(понятие "предела на бесконечности"), если

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z) - w_0| = 0.$$

В частности, для последовательности комплексных чисел  $\{w_n\}$  число  $w_0$  называется ее *пределом*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w_0| = 0 \quad (2.2.3)$$

или, что то же самое, одновременно

$$u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n; \quad v_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

4°. Говорят, что последовательность  $w_n$  имеет *бесконечный предел*, и записывают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty,$$

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = +\infty.$$

Изобразить соответствующее "значение" бесконечного предела невозможно, однако условно говоря, дополняют комплексную плоскость "бесконечно удаленной точкой", а ее "окрестностью" называют внешность круга  $|w| > R$  достаточно большого радиуса  $R > 0$ . Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется расширенной.

Аналогично, говорят, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

если

$$\lim_{|z - z_0| \rightarrow 0} |f(z)| = +\infty.$$

Запись

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

(бесконечный предел на бесконечности) означает, что

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

5°. Функция  $f(z)$  называется *непрерывной* в точке  $z_0$ , внутренней для области определения  $G$ , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.2.4)$$

Другими словами, непрерывность в точке  $z_0$  есть возможность предельного перехода под знаком функции при  $z \rightarrow z_0$ .

Согласно п. 2° для  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  непрерывность в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  означает, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0); \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

т.е. имеем непрерывность действительной части  $u$  и мнимой части  $v$  как функций от  $x$  и  $y$ .

6°. Как в случае функций действительного переменного, определению (2.2.4) можно придать иную форму. Если обозначить  $\Delta z = z - z_0$ ,  $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ , то непрерывность функции  $f$  в точке  $z_0$  означает, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0,$$

т.е. бесконечно-малому приращению аргумента (в точке  $z_0$ ) соответствует бесконечно малое приращение функции  $f$ .

7°. Функция  $f(z)$  называется *непрерывной в области*  $G$ , если она непрерывна в каждой точке  $z$  этой области.

Поскольку непрерывность  $f$  равносильна непрерывности ее действительной части  $u$  и мнимой  $v$ , то многие свойства непрерывных функций действительного переменного переносятся и на изучаемый случай. Так, вместе с  $f(z)$  и  $g(z)$  непрерывными будут (в их общей области непрерывности  $G$ )  $f(z) + g(z)$ ,  $f(z) \cdot g(z)$  и  $\frac{f(z)}{g(z)}$  (за исключением точек, в которых  $g(z) = 0$ ). Справедливо утверждение о непрерывности сложной функции и др.

8°. Понятия предела и непрерывности функции в точке  $z_0$  вводились в предположении, что  $z_0$  – внутренняя точка рассматриваемого множества  $G$ . Если же  $z_0$  – граничная точка, то в определении (2.2.2) потребуем:  $|z - z_0| \rightarrow 0$ ,  $z \in G$  (т.е. точка  $z$  приближается к  $z_0$  так, что при этом сохраняется условие  $z \in G$ ).

Функция  $w = f(z)$  называется *непрерывной в замкнутой области*  $\bar{G}$ , если  $f(z)$  определена в  $\bar{G}$  и для каждой точки  $z_0 \in \bar{G}$  (включая граничные точки) выполнено равенство (2.2.4); подразумевается, что точка  $z$  может стремиться к  $z_0$  (см. (2.2.4)) любым образом, но не покидая замкнутой области  $\bar{G}$ .

### 2.3. РЯДЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1°. Определение предела последовательности комплексных чисел, данное в п. 3° параграфа 2.2, позволяет построить теорию числовых рядов с комплексными членами  $w_n = u_n + iv_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Выражение вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + \dots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n \quad (2.3.1)$$

называется *числовым рядом*. Естественно его отождествить с пределом вида

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_1 + w_2 + \dots + w_n), \quad (2.3.2)$$

если последний существует. Более точно, если существует *число*  $S$ , определяемое как предел (2.3.2), то ряд (2.3.1) называется *сходящимся*, а  $S$  – его сумма. В противном случае ряд (2.3.1) называется *расходящимся*.

2°. Частичная сумма (сумма первых  $n$  членов) представима в виде

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + i(v_1 + v_2 + \dots + v_n), \quad (2.3.3)$$

и теперь вопросы сходимости ряда (2.3.1) сводятся к соответствующим исследованиям рядов с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (2.3.4)$$

Так,

а) одновременная сходимость (2.3.4) эквивалентна сходимости (2.3.1); при этом  $S = \tilde{S} + i\tilde{\tilde{S}}$ , где  $\tilde{S}$  и  $\tilde{\tilde{S}}$  соответствующие суммы рядов (2.3.4);

б) ряд (2.3.1) сходится (расходится) одновременно с любым своим остатком

$$\sum_{n=v}^{\infty} w_n, \quad v \in \mathbf{N} - \text{фиксировано};$$

в) если ряды с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} w'_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w''_n$$

одновременно сходятся и обладают, соответственно, суммами  $S'$  и  $S''$ , то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (w'_n + w''_n), \quad \text{а его сумма есть} \quad S' + S''.$$

Кроме того, для любого постоянного  $\lambda \in \mathbf{C}$  остается сходящимся и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda w'_n; \quad \text{его сумма есть} \quad \lambda S'.$$

Перечисленные простейшие свойства рядов хорошо известны читателю в случае рядов с действительными членами, а поэтому доказательства утверждений вытекают из представления (2.3.3) и результатов п. 3° параграфа 2.2.

3°. **Т е о р е м а** (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд (2.3.1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0. \quad (2.3.5)$$

Обратное утверждение неверно.

Доказательство этого утверждения проведем непосредственно (не переходя к действительным и мнимым частям). Так как, очевидно, соотношение  $S = \lim_{n \leftarrow \infty} S_n$  может быть записано и в виде  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$ , то, вычисляя для  $w_n = S_n - S_{n-1}$  предел разности, имеем

$$\lim_{n \leftarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось.

Ряд с общим членом  $w_n = \frac{1}{n} + i \cdot 0$  является известным нам расходящимся гармоническим рядом, и для таких  $w_n$  выполнено соотношение (2.3.5). Значит, утверждение, обратное сформулированному в теореме, неверно.

**С л е д с т в и е** (достаточный признак расходимости). Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| \neq 0 \quad (2.3.6)$$

(или если предел не существует), то ряд (2.3.1) расходится.

Действительно, в противном случае мы имели бы существование и равенство нулю предела вида (2.3.5), но тогда бы, согласно (2.2.3) последовательность  $|w_n| \rightarrow 0$ , что противоречит условию (2.3.6).

4°. **Т е о р е м а**. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|, \quad (2.3.7)$$

то сходится и ряд (2.3.1). Обратное утверждение неверно.

**Доказательство.** Поскольку

$$|u_n| \leq \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|,$$

то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  (по теореме сравнения рядов с положительными членами). Аналогично, сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ .

Следовательно, оба ряда (2.3.4) сходятся абсолютно. Отсюда и вытекает сходимость ряда (2.3.1); см. п. 2<sup>0</sup> настоящего параграфа.

То, что обратное утверждение неверно, демонстрируется на известном читателю примере ряда с общим членом

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + i \cdot 0,$$

который сходится, но ряд из модулей (гармонический) расходится.

Как и ранее, *сходимость ряда, вытекающую из сходимости ряда модулей*, называется *абсолютной*. Если же сходится (2.3.1), но (2.3.7) расходится, то сходимость (2.3.1) называется *условной*.

5<sup>0</sup>. Достаточными признаками сходимости ряда из модулей (знакоположительного ряда) могут служить, например, признаки:

а) Даламбера: пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}.$$

Тогда при  $D < 1$  ряд (2.3.7) сходится, а при  $D > 1$  – расходится.

б) Коши: пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|}.$$

Тогда при  $K < 1$  ряд (2.3.7) сходится, а при  $K > 1$  – расходится.

Напомним читателю, что в доказательстве утверждений а) и б) при  $D > 1$  или  $K > 1$  расходимость (2.3.7) вытекает из соотношения (2.3.6).

## 2.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1<sup>0</sup>. Пусть в области  $G$  задана бесконечная последовательность однозначных функций  $\{u_n(z)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \quad (2.4.1)$$

называется *функциональным рядом*. При каждом  $z = z_0 \in G$  имеем *числовой ряд* из комплексных чисел  $u_n(z_0)$ . Если получаемый числовой ряд сходится, то  $z_0$  называется его *точкой сходимости*, а если расходится – то *точкой расходимости*. На множестве  $G_0 \subset G$  всех точек сходимости ряда (2.4.1) задана тогда функция  $S = S(z)$ , называемая суммой ряда (2.4.1), где  $S(z_0)$  есть обозначение суммы ряда (2.4.1) в точке  $z_0$ .

2<sup>0</sup>. Уже из теории функциональных рядов действительного переменного нам известно, что привычные свойства конечных сумм функций могут не сохраняться при переходе к рядам. Как и в упомянутой теории, положение может быть "исправлено" требованием равномерной сходимости ряда.

Пусть  $S(z)$  есть сумма ряда (2.4.1) на замкнутой ограниченной области  $G$  и при каждом  $n$  существует наибольшее значение модуля отклонения  $S_n(z)$  от  $S(z)$

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(z) - S(z)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ , то ряд (2.4.1) называется *равномерно сходящимся* на  $G$  к сумме  $S(z)$ .

Сохраняется достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости: если существует числовая последовательность  $\{\alpha_n\}$ , такая что для всех  $z \in G$ ,  $n = 1, 2, \dots$  имеют место оценки  $|u_n(z)| \leq \alpha_n$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  – сходящийся, то ряд (2.4.1) равномерно сходится на  $G$ ; в этом случае он называется *мажорируемым* на  $G$ .

Из свойств равномерно сходящихся на  $G$  рядов отметим, что сумма  $S(z)$  непрерывна, если непрерывны все  $u_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

3°. Пусть  $\{z^n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – последовательность степенных функций,  $\{\alpha_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  – последовательность комплексных чисел.

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (2.4.2)$$

называется *степенным*; для (2.4.2) употребляем также обозначение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке  $z_0 = 0$ , так как все его частичные суммы  $S_n(z_0) = a_0$ , и, следовательно, предел последовательности  $\{S_n(z_0)\}$  существует и равен  $a_0$ . Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

**Т е о р е м а А б е л я.** Если степенной ряд (2.4.2) сходится в некоторой точке  $z_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится в круге  $U(0; |z_0|) = \{z: |z| < |z_0|\}$ . Если же  $z'_0$  – точка расходимости, то ряд (2.4.2) расходится при всех  $z$  таких, что  $|z| > |z'_0|$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

1. Ряд из модулей для (2.4.2) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n. \quad (2.4.3)$$

Общий член ряда (2.4.3) можно представить следующим образом:

$$u_n(z) = |a_n| \cdot |z|^n = |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n, \quad (2.4.4)$$

где  $z_0 \neq 0$  – точка сходимости ряда (2.4.2). Поскольку в этой точке выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z_0^n| = 0,$$

то для всех  $n$  существует постоянная  $M > 0$  такая, что

$$|a_n z_0^n| \leq M.$$

При условии  $|z| < |z_0|$  имеем для  $q = \left| \frac{z}{z_0} \right|$ , что  $0 \leq q < 1$ . Следовательно, в силу (2.4.4),  $0 \leq u_n(z) \leq M q^n$ ,  $0 \leq q < 1$ , и ряд

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

является сходящимся (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). По теореме сравнения знакоположительных рядов тогда сходится и ряд (2.4.3). Значит, в круге  $U(0; |z_0|)$  ряд (2.4.2) сходится абсолютно, что и утверждалось.

2. В случае  $|z| > |z'_0|$  ряд (2.4.2) не может сходиться в точке  $z$ . Действительно, имеем  $z'_0 \in U(0; |z|)$ , и, если (2.4.2) сходится в точке  $z$ , то по первой части теоремы Абеля, ряд сходится и в точке  $z'_0$ . Но это противоречит условию. Итак, во всех точках  $z$ , таких, что  $|z| > |z'_0|$ , ряд (2.4.2) расходится. Теорема полностью доказана.

4°. Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости  $z_0$  степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости (если такая имеется). Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние  $R$ , такое что при  $|z| < R$  (т.е. в каждом таком круге) имеет место абсолютная сходимость, а при  $|z| > R$  (вне круга) – расходимость ряда (2.4.2). Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда, область  $U(0, R)$  – его кругом сходимости, см. рис. 2.4.1.

При всяком  $0 < \rho < R$  ряд (2.4.2) будет сходиться и равномерно в круге  $|z| \leq \rho$ . Действительно, взяв точку  $\tilde{z}$ , такую, что  $|\tilde{z}| = \rho$ , имеем абсолютную сходимость в точке  $\tilde{z}$ , т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \rho^n.$$

В то же время, для членов (2.4.2) имеем оценку

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \cdot |z|^n \leq |a_n| \rho^n.$$

Y

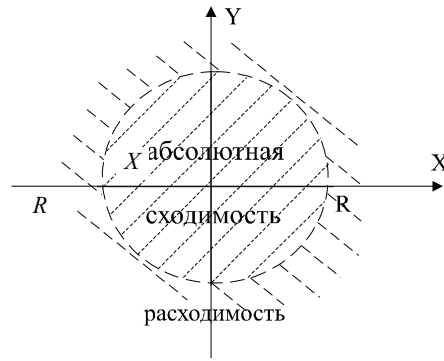


Рис. 2.4.1

Согласно признаку Вейерштрасса, получаем равномерную сходимость при  $|z| \leq \rho$ . В частности (так как непрерывны все степенные функции  $u_n(z) = z^n$ ), непрерывной в круге сходимости будет сумма ряда (2.4.2).

5°. Радиус сходимости  $R$  можно найти по одной из формул:

$$R = \frac{1}{D} \text{ или } R = \frac{1}{K}, \quad (2.4.5)$$

если существует соответствующее "число Даламбера"

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

или "число Коши"

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Формулы (2.4.5) остаются справедливыми, если  $D = 0$  или  $z \in G$  — тогда  $R = \infty$ , т.е. областью сходимости ряда является вся комплексная плоскость. Если же  $D = +\infty$  ( $K = +\infty$ ), то  $R = 0$ , т.е. "областью" сходимости является единственная точка  $z_0 = 0$ . Примеры такого рода см. ниже.

Докажем, например, вторую из формул (2.4.5). Согласно признаку Коши, ряд (2.4.3) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z|^n} < 1, \text{ т.е. } |z| \cdot K < 1, \quad (2.4.6)$$

откуда получаем при  $|z| < \frac{1}{K}$  сходимость ряда (2.4.3), а значит и абсолютную сходимость ряда (2.4.2). В то же время при  $|z| > \frac{1}{K}$  согласно признаку Коши расходится не только ряд из модулей (2.4.3), но и сам ряд (2.4.2); об этом упоминалось в п. 5° параграфа 2.3. Итак, именно число  $R = \frac{1}{K}$  оказалось радиусом сходимости согласно определению  $R$  в п. 4°. Отметим также, что при  $K = 0$  условие (2.4.6) выполнено при всех  $z$  (т.е.  $R = \infty$ ), а при  $K = \infty$  условие (2.4.6) не выполнено при любом  $z \neq 0$ ; точка же  $z_0 = 0$ , как упоминалось, служит точкой сходимости любого степенного ряда ( $R = 0$ ). Утверждение п. 5° полностью доказано.

6°. Рассмотрим (для любого фиксированного  $\mathfrak{Z}_0$ ) ряд по степеням  $z - \mathfrak{Z}_0$ :

$$a_0 + a_1(z - \mathfrak{Z}_0) + a_2(z - \mathfrak{Z}_0)^2 + \dots + a_n(z - \mathfrak{Z}_0)^n + \dots, \quad (2.4.7)$$

или, коротко

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \mathfrak{Z}_0)^n.$$

Очевидно, что в точке  $\mathfrak{Z}_0$  ряд (2.4.7) сходится и его сумма  $S = a_0$ . Заменой переменных  $\mathfrak{Z} = z - \mathfrak{Z}_0$  получаем ряд вида (2.4.2) и, следовательно, теорема Абеля и все ее указанные выше следствия переносятся на случай (2.4.7) с соответствующим изменением в формулировках: речь теперь следует вести о круге сходимости с центром  $\mathfrak{Z}_0$ . Так, например, круг сходимости

$$|\mathfrak{Z}| < \frac{1}{K} \text{ есть } U\left(\mathfrak{Z}_0, \frac{1}{K}\right) = \left\{z: |z - \mathfrak{Z}_0| < \frac{1}{K}\right\} \text{ и т.д.}$$

7°. П р и м е р 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (z+i)^n}{n^2+1}. \quad (2.4.8)$$

*Решение.* Имеем ряд по степеням  $z - (-i)$ , тогда его круг сходимости  $U(-i; R)$  будет найден, если найдем радиус сходимости  $R$ . Воспользуемся формулой  $R = \frac{1}{D}$ , где для  $a_n = \frac{i^n}{n^2+1}$

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i^{n+1}|}{(n+1)^2+1} : \frac{|i^n|}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i^{n+1}|}{|i^n|} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |i| \cdot \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right)} = 1. \end{aligned}$$

Итак,  $R = 1$ , т.е. при  $|z+i| < 1$  ряд абсолютно сходится, а при  $|z+i| > 1$  расходится. На окружности  $|z+i| = 1$  проведем отдельное исследование. Для этого рассмотрим ряд из модулей для (2.4.8). Так как  $|i| = 1$ , то при  $|z+i| = 1$  получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

который оказывается сходящимся. Действительно, например, по интегральному признаку Коши для  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  непрерывной и убывающей на  $[1, +\infty)$  имеем

$$\tau = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg \Big|_1^{\infty} = \arctg(\infty) - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

т.е. получили сходящимся несобственный интеграл  $\tau$ , а значит и числовой ряд. Таким образом, и на окружности  $|z+i| = 1$  ряд (2.4.8) сходится абсолютно. Окончательно, получаем областью абсолютной сходимости ряда замкнутый круг вида  $\{z: |z+i| \leq 1\}$ .

**Пример 2.** Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

абсолютно сходится во всей комплексной плоскости.

*Решение.* Действительно,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

и, следовательно,  $R = \frac{1}{D} = \infty$ .

**Пример 3.** Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

обладает единственной точкой сходимости  $z = 0$ .

*Решение.* Действительно,  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , и, следовательно,  $R = 0$ .

8<sup>0</sup>. Более глубокие свойства степенных рядов и их обобщения будут рассмотрены ниже, но для этого нам потребуются основы дифференциально-интегрального исчисления функций комплексного переменного. Однако уже сейчас мы готовы ввести в рассмотрение некоторые из основных (еще не рассмотренных) элементарных функций.

## 2.5. ФУНКЦИИ $e^z$ , $\sin z$ , $\cos z$

1<sup>0</sup>. За основу определений возьмем известные разложения функций действительного переменного  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  в степенные ряды. Формально заменив в них  $x$  на  $z$ , положим по определению:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots; \quad (2.5.1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; \quad (2.5.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (2.5.3)$$

Каждый из указанных рядов абсолютно сходится во всей комплексной плоскости, так как "число Даламбера" всякий раз равно нулю, и, следовательно, радиус сходимости  $R = \infty$ . Убедимся в этом, например, в случае (2.5.3): здесь  $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ , а поэтому

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

что и утверждалось.

Итак, при всех  $z$  определены суммы рядов (2.5.1) – (2.5.3). В частности, для  $z = x + i \cdot 0$  (на действительной оси) имеем знакомые нам трансцендентные функции действительного переменного.

2°. Имеет место следующая *формула Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (2.5.4)$$

устанавливающая неожиданную связь между показательной и тригонометрическими функциями. Для доказательства (2.5.4) достаточно установить, что совпадают члены соответствующих рядов. Подставим  $iz$  вместо  $z$  в общий член (2.5.1); имеем:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \dots + \frac{i^n z^n}{n!} + \dots \quad (2.5.5)$$

Если теперь все члены ряда (2.5.2) умножить на  $i$  и сложить затем соответствующие члены рядов полученного и (2.5.3), то (см. п. 2° параграфа (2.3)) будем иметь ряд, сходящийся во всей комплексной плоскости:

$$\cos z + i \sin z = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \dots + \left( (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} + (-1)^m i \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) + \dots \quad (2.5.6)$$

В силу очевидного равенства  $(i)^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m$  имеем общий член ряда (2.5.6) в виде

$$\frac{(iz)^{2m}}{(2m)!} + \frac{(iz)^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

что и представляет собою сумму двух членов вида  $\frac{i^n z^n}{n!}$ , когда  $n$  пробегает последовательно четные ( $n = 2m$ ) и нечетные ( $n = 2m+1$ ) значения. Формула Эйлера доказана, так как члены, а значит и суммы рядов (2.5.5) и (2.5.6) совпали.

3°. Поскольку формула (2.5.4) справедлива при всех  $z$ , то подставив в нее  $(-z)$  вместо  $z$ , получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad (2.5.7)$$

при этом четность косинуса ( $\cos(-z) = \cos z$ ) и нечетность синуса ( $\sin(-z) = -\sin z$ ) вытекают из определений (2.5.2) и (2.5.3).

Складывая и вычитая равенства (2.5.4) и (2.5.7), мы получаем:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2.5.8)$$

4°. Свойство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad (2.5.9)$$

справедливое в случае действительных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , сохраняется и в общем случае. Доказательство (2.5.9) основано на перемножении степенных рядов для  $e^{z_1}$  и  $e^{z_2}$  по некоторому естественному правилу, которое мы здесь не рассматриваем.

5°. Сохраняются также *привычные формулы* для тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2; \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2; \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

их доказательство основано на соотношениях (2.5.8) и (2.5.9) и может быть предоставлено читателю.

Справедливы формулы приведения:

$$\begin{aligned} \cos(z + \pi) &= -\cos z; \quad \sin(z + \pi) = -\sin z; \\ \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin z; \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \end{aligned}$$

и т.п. Например, в силу (2.5.10), где  $z_2 = \frac{\pi}{2}$ , и известных значений  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , имеем:

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos \frac{\pi}{2} - \sin z \sin \frac{\pi}{2} = -\sin z.$$

Обе функции  $\sin z$  и  $\cos z$  имеют период  $2\pi$ ; в силу (2.5.4) этим же периодом обладает и  $e^{iz}$ .

Сохраняется основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(для доказательства достаточно взять  $z_1 = z$ ,  $z_2 = -z$  в (2.5.10)) и все другие известные из тригонометрии формулы для синуса и косинуса. Однако, при переходе к комплексному аргументу может нарушаться привычная ограниченность единицей модулей значений  $\sin z$  и  $\cos z$ . Например, согласно (2.5.8)

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{1}{2} \left( e + \frac{1}{e} \right)$$

– действительное число, большее единицы.

6<sup>0</sup>. По определению полагаем

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

во всех точках  $z$ , где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль.

*Гиперболические* синус и косинус определяются в виде

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Нетрудно проверить соотношения:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz; \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz; \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

## 2.6. ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИИ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1<sup>0</sup>. *Логарифмом* (натуральным логарифмом) числа  $z$  называется число  $w$ , обладающее свойством  $e^w = z$ , где  $z \neq 0$ . Установим существование и найдем формулу для вычисления логарифма.

Положим  $w = u + iv$ , тогда согласно (2.5.9) и (2.5.4)

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v).$$

Если  $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , то равенство  $e^w = z$  означает, что

$$e^u (\cos v + i \sin v) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Модули равных комплексных чисел тоже равны:

$$e^u = |z|, \text{ откуда } u = \ln |z|$$

(имеется в виду "обычный" логарифм действительного числа); что же касается аргументов, то они могут отличаться на  $2\pi k$ :

$$v = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Следовательно,

$$w = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k), \text{ или, коротко, } w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где  $\varphi = \arg z$ . Обозначая логарифм символом  $\operatorname{Ln} z$  (употребление заглавной буквы означает многозначность результата), мы получили, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \{0, \pm 1, \dots\}.$$

Функция вида  $w = \operatorname{Ln} z$  называется логарифмической, она определена при всех  $z \neq 0$  и многозначна. При  $k = 0$  получаем так называемое главное значение логарифма:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

2<sup>0</sup>. Имеют место следующие обобщения известных нам свойств логарифмов на случай комплексной переменной:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

Доказательства вытекают из уже установленных выше свойств модуля и аргумента произведения и частного. Например

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \operatorname{Ln}(|z_1| \cdot |z_2| (\cos(\Phi_1 + \Phi_2) + i \sin(\Phi_1 + \Phi_2))) = \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\Phi_1 + \Phi_2) = (\ln|z_1| + i\Phi_1) + (\ln|z_2| + i\Phi_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \end{aligned}$$

здесь обозначены  $\Phi_1 = \operatorname{Arg} z_1$ ,  $\Phi_2 = \operatorname{Arg} z_2$ .

3<sup>0</sup>. В основу определения показательной функции положим известное (для действительного переменного) свойство

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0.$$

Положим по определению для любых комплексных  $a \neq 0$  и  $z$

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Эта функция также оказывается многозначной в силу многозначности логарифма.

4<sup>0</sup>. П р и м е р ы. Вычислить а)  $\operatorname{Ln}(-1)$ ; б)  $\operatorname{Ln}(2\sqrt{3}i - 2)$ ; в)  $i^{-i}$ .

Р е ш е н и е. а) Так как  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ , то

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(1 + 2k), \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

б) Запишем  $z = 2\sqrt{3}i - 2$  в тригонометрической форме. Так как  $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$ ,  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , то  $\varphi$  –

угол второй четверти, именно  $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ . Следовательно,

$$\operatorname{Ln}(2\sqrt{3}i - 2) = \ln 4 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = 2\ln 2 + i\pi\left(\frac{2}{3} + 2k\right), \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

в)  $i^{-i} = e^{-i \operatorname{Ln} i}$  по определению показательной функции. При этом  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ , значит

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)i.$$

Теперь  $-i \operatorname{Ln} i = \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$ , а тогда

$$i^{-i} = e^{\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

5<sup>0</sup>. Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу. Именно, если  $z = \sin w$ , то число  $w$  называется арксинусом числа  $z$ ; обозначение:

$$w = \operatorname{Arc} \sin z.$$

Если рассмотреть  $z$  как переменную величину, то речь уже идет о функции вида  $w = \operatorname{Arc} \sin z$ . Аналогично, если  $z = \cos w$ , то получаем арккосинус

$$w = \operatorname{Arccos} z;$$

если  $z = \operatorname{tg} w$ , то

$$w = \operatorname{Arctg} z;$$

для  $z = \operatorname{ctg} w$  имеем

$$w = \operatorname{Arctg} z$$

(арктангенс и арккотангенс, соответственно).

6<sup>0</sup>. Получим формулы для вычисления значений этих функций и убедимся в их многозначности.

Так, если  $z = \sin w$ , то (см. (2.5.8))

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}, \quad \text{откуда } e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0.$$

Положим  $e^{iw} = f$ , тогда получено квадратное уравнение

$$f^2 - 2izf - 1 = 0$$

с корнями

$$f = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

(символом  $\sqrt{1 - z^2}$  уже предусмотрены *два* отличающиеся знаком значения квадратного корня). Итак,

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}, \text{ т.е. } iw = \text{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Выражая отсюда  $w$ , и принимая во внимание, что  $\frac{1}{i} = -i$ , получаем

$$\text{Arcsin} z = -i \text{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Если  $z$  – действительное число, то  $\zeta = \sqrt{1 - z^2} + iz$  имеет модуль  $\sqrt{(1 - z^2) + z^2} = 1$  и тогда

$$\text{Arcsin} z = -i(\ln|\zeta| + i \text{Arg}\zeta) = \text{Arg}\zeta,$$

т.е. значения  $\text{Arcsin} z$  также – действительные числа.

Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, позволяют утверждать, что:

$$\text{Arccos} z = -i \text{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$\text{Arctg} z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz};$$

$$\text{Arcctg} z = \frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

7<sup>0</sup>. П р и м е р. Вычислить: а)  $\text{Arcsin} 2$ ; б)  $\text{Arctg} \sqrt{3}$ .

Р е ш е н и е:

$$\text{а) } \text{Arcsin} 2 = -i \text{Ln}\left(2i + \sqrt{-3}\right) = -i \text{Ln}\left(2i \pm \sqrt{3}i\right) = -i \text{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i;$$

здесь  $\pm \sqrt{3}$  – значения уже арифметического корня из действительного числа. Поскольку  $(2 \pm \sqrt{3})i$  имеют аргументом  $\Phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , то имеем две серии ответов:

$$-i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \text{ и } -i \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \text{Arctg} \sqrt{3} &= \frac{-i}{2} \text{Ln} \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \\ &= -\frac{i}{2} \text{Ln}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right). \end{aligned}$$

Поскольку  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  имеет  $|z| = 1$ ,  $\text{Arg} z = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , то

$$\text{Arctg} \sqrt{3} = -\frac{i}{2} \left( \ln|\zeta| + 2\pi\left(\frac{1}{3} + k\right)i \right) = \pi\left(\frac{1}{3} + k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Одно из возможных значений арктангенса числа  $\sqrt{3}$ , именно, значение  $\frac{\pi}{3}$ , нам было известно ранее.

## 2.7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

1<sup>0</sup>. Выше было определено действие возведение комплексных чисел в натуральную степень. Следовательно, для всех  $z \in \mathbf{C}$  определена *степенная* функция  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

*Линейной функцией* комплексного переменного  $z$  называется функция вида

$$w = az + b, \text{ где } a, b \in \mathbf{C} \text{ – фиксированы.}$$

Обе эти функции являются частными случаями *многочлена*  $n$ -й степени

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ где } a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

коэффициенты  $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$  – фиксированные комплексные числа.

2<sup>0</sup>. При всех  $z \neq 0$  определена функция вида  $w = \frac{1}{z}$ , которая является частным случаем *дробно-линейной* функции

$$w = \frac{az+b}{cz+d}; \quad z \neq -\frac{d}{c}; \quad c \neq 0.$$

Еще более общий случай – *рациональная функция*

$$R_{m,n}(z) = \frac{P_m(z)}{P_n(z)},$$

определенная во всех тех точках, где  $P_n(z) \neq 0$ .

3<sup>0</sup>. При всех  $z \in \mathbb{C}$  определена  $n$ -значная функция вида

$$w = \sqrt[n]{z},$$

а также (в параграфе 2.5) однозначные функции вида  $w = e^z$ ,  $w = \sin z$ ,  $w = \operatorname{sh} z$ ,  $w = \operatorname{ch} z$ . Рассматривались (на соответствующих областях определения)  $w = \operatorname{tg} z$ ,  $w = \operatorname{ctg} z$ . Многозначными (бесконечнозначными) являются

$$w = \operatorname{Ln} z; \quad z \neq 0; \quad w = \operatorname{Arcsin} z; \quad w = \operatorname{Arccos} z; \quad w = \operatorname{Arctg} z; \quad w = \operatorname{Arcctg} z.$$

4<sup>0</sup>. Всякая функция, полученная из перечисленных *основных элементарных* путем выполнения над ними конечного количества арифметических действий, а также взятия конечного числа суперпозиций (функции от функции) называется *элементарной*.

Отметим без доказательства, что всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения. В случае многозначных функций (многозначность обусловлена значениями целого параметра  $k$ ) речь идет о непрерывности "каждой ветви", т.е. однозначной функции, получаемой при фиксированном значении параметра  $k$  (см. соответствующие определения  $\sqrt[n]{z}$ ,  $\operatorname{Ln} z$ ,  $\operatorname{Arcsin} z$ , ...).

5<sup>0</sup>. Особого разговора заслуживает описание тех геометрических образов, которые возникают при отображениях, осуществляемых основными элементарными функциями. Мы остановимся на кратком описании нескольких простейших случаев.

а) *Линейная функция*  $w = az + b$ . В случае  $b = 0$  и действительного значения  $a = r > 0$  мы имеем в плоскости  $XOY$  *гомотетию*  $w = rz$  с *центром в начале координат и коэффициентом*  $r$  (перемещение точки  $z$  вдоль луча  $Oz$  на расстояние  $r|z|$ ). В случае комплексного  $a$ , имеющего показательную форму  $a = re^{i\varphi}$ , умножение  $e^{i\varphi}z$  есть изменение аргумента каждого  $z$  на величину  $\varphi$ , т.е. *преобразование поворота* (вокруг начала координат) на угол  $\varphi$  каждого луча  $Oz$ . Дальнейшее умножение на  $r > 0$  есть описанная выше гомотетия. Итак, действие отображения  $w = re^{i\varphi}z$  – это композиция преобразования поворота на угол  $\varphi$  комплексной плоскости и гомотетии с коэффициентом  $r$ .

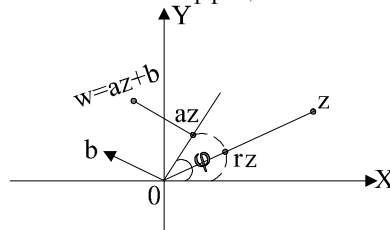


Рис. 2.7.1

Наконец, в общем случае  $w = az + b$  вслед за описанной композицией гомотетии и поворота выполняется, очевидно, сдвиг (параллельный перенос) комплексной плоскости на радиус-вектор точки  $b$ , см. рис. 2.7.1, на котором точке  $z$  поставлена в соответствие точка  $w = az + b$  путем выполнения, последовательно, преобразований:  $z \mapsto rz$  ( $0 < r < 1$ );  $rz \mapsto az$  ( $a = re^{i\varphi}$ );  $az \mapsto az + b$ .

б) *Степенная функция*  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $z = \rho e^{i\varphi}$ , то  $w = \rho^n e^{in\varphi}$ . Для каждого фиксированного  $z \neq 0$  имеем  $n\varphi = \varphi + (n-1)\varphi$ , т.е. имеем последовательное выполнение поворота луча  $Oz$  на угол  $(n-1)\varphi$  относительно точки  $O$  и преобразование в  $\rho^n$  раз (растяжение при  $\rho > 1$ , сжатие при  $0 < \rho < 1$ ) отрезка  $Oz'$ , где  $z' = e^{i\varphi}$ .

Для  $w = \sqrt[n]{z}$ , где  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $z \neq 0$ , имеем  $w = w_k = \sqrt[n]{\rho} (\cos \psi_k + i \sin \psi_k)$ , т.е.  $w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\psi_k}$ , где  $\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Для всякого  $z \neq 0$  и фиксированного  $k$  теперь отображение  $w_k$  есть последовательное выполнение поворота на угол  $\frac{1-n}{n}\varphi + \frac{2\pi k}{n}$  (так как  $\psi_k = \varphi + \frac{1-n}{n}\varphi + \frac{2\pi k}{n}$ ) луча  $Oz$  и преобразование отрезка  $Oz'$  (где  $z' = e^{i\psi_k}$ ) в  $\sqrt[n]{\rho}$  раз.

в) *Дробно-линейная функция.* Начнем с рассмотрения функции  $w = \frac{1}{z}$ . При каждом  $z \neq 0$ ,  $z = \rho e^{i\varphi}$ , имеем  $w = \frac{1}{\rho e^{i\varphi}}$ , т.е.  $w = \frac{1}{\rho} e^{i\psi}$ , где  $\psi = -\varphi$ . Таким образом, имеем последовательно преобразование луча  $Oz$  в симметричный относительно полярной оси луч  $Oz'$  ( $|z'| = 1$ ,  $\arg z' = -\varphi$ ) и перемещение точки  $z'$  вдоль этого луча на расстояние  $\frac{1}{\rho}$  от точки  $O$ .

Покажем, что каждая окружность  $|z| = r$ ,  $r > 0$ , преобразуется функцией  $w = \frac{1}{z}$  в окружность радиуса  $\frac{1}{r}$  с тем же центром. Действительно, для каждой точки  $z$  на этой окружности имеем  $z = r e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  пробегает значения от  $-\pi$  до  $\pi$ ; теперь  $w = \frac{1}{r} e^{i\psi}$ , где  $\psi = -\varphi$  принимает все значения в интервале  $[-\pi, \pi]$ . Итак, получена окружность с центром в начале координат радиуса  $\frac{1}{r}$ , что и утверждалось. Заметим, что в геометрии описанное преобразование называется инверсией.

Отметим (без доказательства), что любая другая окружность, не проходящая через начало координат, функцией  $w = \frac{1}{z}$ , преобразуется также в некоторую окружность, а проходящая через начало координат – в некоторую прямую.

Как оказывается, прямые, не проходящие через начало координат, также преобразуются в некоторые окружности, а проходящие через начало координат – в некоторые прямые.

Рассмотрим теперь общий случай

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0. \quad (2.7.1)$$

Преобразуем дробь к виду

$$\frac{a(cz + d) + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}.$$

Следовательно, к отображению (2.7.1) можно прийти путем последовательного выполнения следующих изученных преобразований:

$$t = cz + d \quad (\text{линейная функция}), \quad T = \frac{1}{t} \quad (\text{инверсия}),$$

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} T \quad (\text{линейная функция}).$$

г) *Показательная функция*  $w = e^z$ . Если  $z = x + yi$ , то  $w = e^x e^{iy}$  или  $w = e^x (\cos y + i \sin y)$ . Последнее представление можно понимать как тригонометрическую форму записи  $w$ . Таким образом, каждая точка  $z$  преобразуется в точку (число)  $w$  с модулем  $\rho = e^x$ , и аргументом (одним из значений аргумента), равным  $y$ .

Геометрические образы стандартных линий (областей), получаемые посредством перечисленных и других отображений (функций) изучаются в более подробных курсах.

## 2.8. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} z^{2n}}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z-i)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i+1)^{n-1}}{n \sqrt{n+1}};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} z^{2n-1}; \quad \text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{n \ln^4 n}.$$

2. Вычислить значения:

$$\text{а) } e^{i\pi}; \quad \text{б) } e^{i-1}; \quad \text{в) } \sin \frac{\pi i}{2}; \quad \text{г) } \cos^2 \frac{2}{i}; \quad \text{д) } \operatorname{ch}(-3i); \quad \text{е) } \operatorname{sh} i^3;$$

$$\text{ж) } \operatorname{tg}(\sqrt{3} - i).$$

3. Найти:

$$\text{а) } \operatorname{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right); \quad \text{б) } \operatorname{Ln} 5(4i-3); \quad \text{в) } -i \operatorname{Ln}(-e); \quad \text{г) } i^{1+i}; \quad \text{д) } 3^{-i};$$

$$\text{е) } 2^{-1}.$$

# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 3.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1<sup>0</sup>. Определение производной формально не отличается от случая функций действительного переменного. Однако, на самом деле, условие дифференцируемости функций комплексного переменного является более ограничительным в сравнении с упомянутым случаем, что будет ясно из дальнейшего.

Пусть однозначная функция  $w = f(z)$  определена в точке  $z = x + yi$  и некоторой ее окрестности. Пусть  $x$  и  $y$  получают, соответственно, приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Тогда  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  – соответствующее приращение переменной  $z$ . При переходе от точки  $z$  к точке  $z + \Delta z$  (значения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  предполагаем столь малыми, что точка  $z + \Delta z$  расположена в той же окрестности) значение  $w = f(z)$  получает некоторое приращение  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть существует предел вида

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (3.1.1)$$

Он называется *производной* функции  $f(z)$  в точке  $z$  и обозначается  $f'(z)$  либо  $w'$ ,  $\frac{dw}{dz}$ ,  $\frac{df}{dz}$ . Функция же  $f(z)$  называется *дифференцируемой* в точке  $z$ .

Заметим, что в случае функции действительного переменного  $\varphi(x)$  существование производной есть существование предела  $\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ , когда  $\Delta x$  приближается к нулю вдоль оси абсцисс. В случае же (3.1.1)  $\Delta z$  приближается к нулю в комплексной плоскости по *любому* пути. Это и является причиной появления некоторых новых дополнительных свойств дифференцируемых функций в сравнении со случаем функций действительного переменного.

2<sup>0</sup>. Из свойств пределов и определения (3.1.1) вытекает, что дифференцируемость  $f(z)$  в точке  $z$  эквивалентна равенству

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) = \alpha(z, \Delta z),$$

где  $\alpha(z, \Delta z) \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Следовательно, существование производной равносильно соотношению

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z. \quad (3.1.2)$$

Выражение  $d w = f'(z)\Delta z$  называется *дифференциалом*  $f(z)$  в точке  $z$ .

Если  $\Delta z \rightarrow 0$ , то из (3.1.2) вытекает, что  $\Delta w \rightarrow 0$ , а это означает: дифференцируемость в точке  $z$  влечет за собою *непрерывность*  $f(z)$  в той же точке.

3<sup>0</sup>. Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной  $f'(z_0) \neq 0$ , считая для определенности, что  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$  и некоторой ее окрестности  $U_0$ . Если  $W_0$  – образ этой окрестности (при отображении функцией  $f$ ), то для любой кривой  $\gamma \subset U_0$  ее образ  $\Gamma \subset W_0$ ; обозначим  $w_0 = f(z_0)$ .

Пусть  $z \rightarrow z_0$  вдоль кривой  $\gamma$ , тогда (в силу непрерывности  $w = f(z)$ , см. п. 2<sup>0</sup>)  $w \rightarrow w_0$  вдоль  $\Gamma$ . Комплексные числа  $\Delta z$  и  $\Delta w$  изображаются векторами секущих к кривым  $\gamma$  и  $\Gamma$  соответственно; следовательно,  $\arg \Delta z$  и  $\arg \Delta w$  – углы наклона этих векторов к соответствующим осям абсцисс. Поскольку при делении аргументы комплексных чисел вычитаются, то согласно (3.1.1)

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg \left( \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w) - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta z) = \Phi - \varphi,$$

где  $\Phi$  и  $\varphi$  – углы наклона (к осям абсцисс) уже соответствующих *касательных* (касательная – это предельное положение секущей). Итак,  $\alpha = \arg f'(z_0)$  – угол, на который относительно точки 0 повернулась касательная (к произвольной кривой  $\gamma$  в точке  $z_0$ ) при отображении  $w = f(z)$ .

В определении (3.1.1)

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}, \quad \text{т.е. } |\Delta w| \sim \text{const} \cdot |\Delta z| \quad (f'(z_0) \neq 0),$$

где  $\text{const}$  и есть  $|f'(z_0)|$ . Следовательно, бесконечно малое расстояние между точками  $z_0$  и  $z = z_0 + \Delta z$  преобразуются в бесконечно малое расстояние между  $w_0$  и  $w = w_0 + \Delta w$ , так что отношение этих расстояний (при произвольности пути, по которому точка  $z$  приближается к  $z_0$ ) остается постоянным.

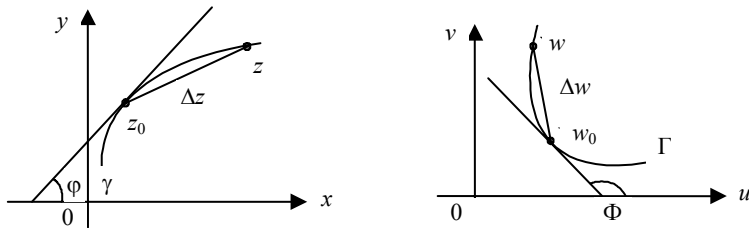


Рис. 3.1.1

Итак, в данной точке  $z_0$  отображение  $f$  обладает постоянством угла поворота касательных и постоянством коэффициента растяжения (сжатия); см. рис. 3.1.1.

Отображение с такими свойствами называется *конформным*.

### 3.2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1<sup>0</sup>. Из определения (3.1.1) производной и привычных свойств пределов (сохраняющихся при переходе к случаю функций комплексного переменного) вытекают и привычные правила дифференцирования:

а) если  $f(z) = C$ , где  $C = \text{const}$  (постоянное комплексное число), то  $f'(z) = 0$ ;

б)  $(Cf(z))' = Cf'(z)$ ,  $C = \text{const}$ ;

в)  $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$ ;

г)  $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ ;

д)  $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$  в точках, где  $g(z) \neq 0$ .

2<sup>0</sup>. Справедливо правило дифференцирования сложной функции:

$$(\varphi(f(z)))' = \varphi'(f(z)) f'(z).$$

Если  $w = f(z)$  осуществляет взаимно-однозначное соответствие области  $G$  (в комплексной плоскости точек  $z$ ) на  $\tilde{G}$  (в комплексной плоскости точек  $w$ ), то определено (однозначное) обратное соответствие  $z = \varphi(w)$ , называемое обратной функцией. Справедлива формула

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

3<sup>0</sup>. Сохраняется и таблица производных, приведем некоторые из формул:

1)  $z' = 1$ ;

2)  $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ ;

3)  $(\sin z)' = \cos z$ ;

4)  $(\cos z)' = -\sin z$ ;

5)  $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$ ;

6)  $(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$ ;

7)  $(e^z)' = e^z$ ;

8)  $(a^z)' = a^z \operatorname{Ln} a$ ;

9)  $(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ ;

$$10) (\operatorname{Arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}.$$

Здесь производные многозначных функций понимаются как производные, вычисленные при каждом фиксированном  $k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Эти формулы могут быть выведены в точности так же, как в случае функций действительного переменного. Однако могут быть использованы и определения  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  в виде степенных рядов, а также связи (между собою) функций комплексных переменных. Например, почленное дифференцирование степенного ряда для  $e^z$  приводит к результату:

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \right)' = \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + n \frac{z^{n-1}}{n!} + \dots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^z. \end{aligned}$$

Или:  $(a^z)' = (e^{z \operatorname{Lna}})' = e^{z \operatorname{Lna}} (z \operatorname{Lna})' = a^z \operatorname{Lna}$  и т.д.

### 3.3. УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

1°. Пусть  $z = x + iy$ , и  $w = f(z)$  определена в точке  $z$  и в некоторой ее окрестности. Запишем  $f(z)$  в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Необходимое условие дифференцируемости  $f$  в точке  $z$  содержится в следующем утверждении.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z$ . Тогда существуют частные производные функций  $u$  и  $v$  по обоим переменным в точке  $(x, y)$ , причем в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.3.1)$$

Соотношения (3.3.1) называются условиями Коши-Римана-Эйлера-Даламбера (чаще говорят: условия Коши-Римана).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть существует  $f'(z)$ , определяемая как предел вида (3.1.1). В параграфе 3.1. отмечалось (см. п. 1°), что характер стремления к нулю величины  $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$  может быть произвольным. Выберем, в частности, случаи

1)  $\Delta y = 0$ , т.е.  $\Delta z = \Delta x$ , тогда  $\Delta z \rightarrow 0$  означает, что  $\Delta x \rightarrow 0$ ;

2)  $\Delta x = 0$ , т.е.  $\Delta z = i \Delta y$ , тогда  $\Delta z \rightarrow 0$  одновременно с  $\Delta y \rightarrow 0$ .

В обоих случаях переход от точки  $z$  к точке  $z + \Delta z$  вызывает приращение  $\Delta w = \Delta u(x, y) + i \Delta v(x, y)$ . В первом случае каждое из приращений  $\Delta u$  и  $\Delta v$  есть приращение по переменной  $x$ , следовательно,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u + i \Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.3.2)$$

При этом само существование  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$  вытекает из существования пределов действительной и мнимой части (при  $\Delta z \rightarrow 0$ ) функции ("разностного отношения")  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ , тогда как сама эта функция имеет предел по условию теоремы.

Аналогично, во втором случае,  $\Delta u = \Delta_y u$ ,  $\Delta v = \Delta_y v$ , т.е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u + i \Delta_y v}{i \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_y v}{\Delta y} + \frac{i \Delta_y u}{i^2 \Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.3.3)$$

Правые части соотношений (3.3.2) и (3.3.3) совпадают, так как выражают собою одну и ту же  $f'(z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

По определению равенства комплексных чисел имеем отсюда соотношения (3.3.1), что и требовалось доказать.

2°. З а м е ч а н и е 1. Как известно, дифференцируемость в точке  $(x, y)$  функций  $u$  и  $v$  (как функций от двух переменных), есть условие более жесткое, чем существование частных производных по обоим переменным. Она (дифференцируемость) означает, что полные приращения  $\Delta u$  и  $\Delta v$  могут быть представлены в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y; \quad (3.3.4)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y, \quad (3.3.5)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  – являются бесконечно малыми (стремятся к нулю) при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ .

В результате более детального рассмотрения можно было бы доказать, что для дифференцируемой в точке  $z$  функции  $f$  не только существуют указанные в (3.3.1) частные производные, но функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $(x, y)$ .

З а м е ч а н и е 2. Как установлено выше,  $f'(z)$  можно вычислить по любой из указанных в (3.3.2), (3.3.3) формул, например,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так, для

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

имеем  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Значит,

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i (e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z,$$

и мы получили еще одно доказательство формулы 7 таблицы производных.

3°. Достаточное условие дифференцируемости  $f(z)$  в точке  $z$  содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а 2. Если  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $(x, y)$  и выполнены условия Коши–Римана (3.3.1), то  $f'(z)$  существует в точке  $z = x + iy$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}.$$

Следует установить, что существует его предел при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Согласно условию теоремы  $\Delta u$  и  $\Delta v$  можно представить в виде (3.3.4) и (3.3.5), соответственно. Поэтому

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + (\alpha_1 + i \beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i \beta_2) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}. \quad (3.3.6)$$

Заметим, что

$$\left| \frac{(\alpha_1 + i \beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i \beta_2) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} \right| \leq |\alpha_1 + i \beta_1| \cdot \frac{|\Delta x|}{|\Delta x + i \Delta y|} + |\alpha_2 + i \beta_2| \cdot \frac{|\Delta y|}{|\Delta x + i \Delta y|}. \quad (3.3.7)$$

В правой части (3.3.7)

$$|\Delta x| \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}; \quad |\Delta y| \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

и

$$|\Delta x + i \Delta y| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Значит правая часть не превосходит бесконечно малой величины

$$|\alpha_1 + i \beta_1| + |\alpha_2 + i \beta_2|,$$

а тогда выражение под знаком модуля в левой части (3.3.7) есть "комплексная" бесконечно малая, которую обозначим через  $\gamma$ :  $\gamma \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Далее, заменим  $\frac{\partial v}{\partial y}$  на  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  на  $\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$  в числителе дроби (3.3.6):

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right)}{\Delta x + i \Delta y} + \gamma = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma.\end{aligned}$$

Значит при  $\Delta z \rightarrow 0$  (а тогда  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , и, следовательно,  $\gamma \rightarrow 0$ )

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

т.е. существует предел вида (3.1.1); именно, он равен  $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ . Существование  $f'(z)$  доказано.

4°. Согласно теоремам 1 и 2 замечанию 1 п. 2°, дифференцируемость  $u, v$  в точке  $(x, y)$  и выполнимость условий Коши–Римана (3.3.1) необходимы и достаточны для существования производной  $f'(z)$ .

5°. О п р е д е л е н и е. Функция  $w = f(z)$ , дифференцируемая в точке  $z_0$  и некоторой ее окрестности, называется *аналитической (или голоморфной) в точке  $z_0$* .

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области  $G$ , называется *аналитической (голоморфной) в этой области*.

Точки  $z$  комплексной плоскости, в которых однозначная  $f(z)$  является аналитической, называются *правильными точками* этой функции, а все остальные точки (в частности, те, где  $f(z)$  не определена) – *особыми* для  $f(z)$ .

Согласно п. 4° критерием аналитичности  $f(z)$  в данной точке  $z$  (в данной области  $G$ ) является дифференцируемость  $u, v$  и выполнимость условий Коши–Римана (3.3.1) в этой точке и некоторой ее окрестности (в области  $G$ ).

П р и м е р 1. Докажем, что  $w = z^2$  аналитична во всей комплексной плоскости. Действительно,

$$w = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \text{ т.е. } u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Условия (3.3.1) выполнены, очевидно, при всех  $x$  и  $y$ , т.е. во всей плоскости. Следовательно,  $w = z^2$  аналитична во всей комплексной плоскости.

2. Рассмотрим  $w = \bar{z}^2$ . Имеем:

$$w = (x - yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi, \text{ т.е. } u = x^2 - y^2, \quad v = -2xy.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

Проверяем условия Коши–Римана (3.3.1):

$$\begin{cases} 2x = -2x; \\ -2y = 2y, \end{cases} \text{ отсюда получаем } x = y = 0.$$

Итак, в единственной точке  $z = 0$  условия Коши–Римана выполнены, и, следовательно, в этой точке  $w = \bar{z}^2$  имеет производную. Однако, функция ни в одной точке не аналитична (точка дифференцируемости – единственная, и не существует ее окрестности, где дифференцируемость сохраняется).

6°. Пользуясь условиями Коши–Римана, вычислим якобиан  $J$  конформного отображения, осуществляемого заданием аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Имеем  $J = u'_x v'_y - u'_y v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z)|^2$ . Итак,  $J = |f'(z)|^2$ .

### 3.4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ИЛИ МНИМОЙ ЧАСТИ

1°. В различных вопросах математики и ее приложениях рассматривается так называемое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0.$$

Всякая функция  $\sigma = \sigma(x, y)$ , удовлетворяющая этому уравнению, называется гармонической.

Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  – функция, аналитическая в некоторой области  $G$ . Докажем, что в этом случае  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  – гармонические функции. Следует отметить, что из дальнейшего рассмотрения будет следовать существование и непрерывность в  $G$  всех частных производных второго порядка функций  $u$  и  $v$  (будет доказано, что аналитическую функцию  $f$  в области  $G$  можно дифференцировать сколь угодно много раз). Поэтому тождества (условия Коши-Римана, выполненные в области  $G$ )

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4.1)$$

можно продифференцировать – первое по  $x$ , а второе по  $y$ , при этом смешанные частные производные второго порядка оказываются равными. Имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Следовательно,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , а тогда  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

Если теперь первое из тождеств (3.4.1) продифференцировать по  $y$ , а второе по  $x$  и сложить (почленно), то будем иметь

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

2°. Пусть теперь известна действительная часть  $u = u(x, y)$  аналитической функции  $w = f(z)$ . Тогда, зная частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , мы из условий Коши-Римана (3.4.1) сможем найти и  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Теперь функцию  $v(x, y)$  по ее полному дифференциалу можно восстановить в виде криволинейного интеграла по произвольной траектории интегрирования, расположенной в области  $G$  (этот факт был доказан в интегральном исчислении):

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C, \quad (3.4.2)$$

где  $(x_0, y_0)$  – любая фиксированная точка в области  $G$ ;  $C$  – произвольная постоянная.

Аналогично, если известна мнимая часть  $v = v(x, y)$  аналитической функции  $f(z)$ , то из условий Коши-Римана мы определяем  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ; следовательно,

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + C.$$

3°. П р и м е р. Найти аналитическую функцию  $f(z)$ , действительная часть которой имеет вид

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2(x - y).$$

Р е ш е н и е. Поскольку  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то достаточно определить  $v(x, y)$  по формуле (3.4.2). Согласно условиям Коши-Римана (3.4.1) найдем для этого частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} &= (x^2 - y^2 + 2(x - y))'_x = 2x + 2; \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} &= -(x^2 - y^2 + 2(x - y))'_y = 2y + 2. \end{aligned}$$

Так как найденные выражения определены (непрерывны как функции от  $x$  и  $y$ ) во всей комплексной плоскости, то в (3.4.2) можно выбрать, например,  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ . Значит

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2Y + 2)dX + (2X + 2)dY + C. \quad (3.4.3)$$

Траекторию интегрирования ONM выберем, как показано на рис. 3.4.1; координаты точек:  $O(0,0)$ ;  $N(x,0)$ ;  $M(x,y)$ . Интеграл (3.4.3) запишем в виде суммы двух: по отрезку  $ON$  (на котором  $y = 0$ , и, следовательно,  $dY = 0$ ) и  $NM$  (на котором  $X = x$  постоянен, а значит  $dX = 0$ ):

$$v(x, y) = \int_0^x (0+2)dX + \int_0^y (2x+2)dY + C = 2x + (2x+2)Y \Big|_0^y + C =$$

$$= 2x + 2xy + 2y + C.$$

Следовательно,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2(x-y) + (2x+2xy+2y)i + Ci =$$

$$= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 2(x-y+i(x+y)) + Ci =$$

$$= (x+iy)^2 + 2(x+iy+i(x+iy)) + Ci = z^2 + 2(z+iz) + Ci.$$

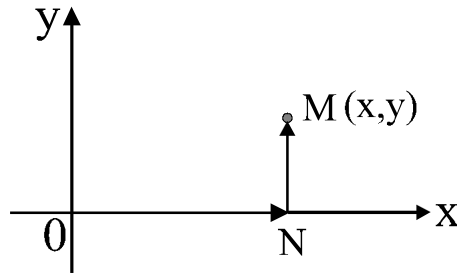


Рис. 3.4.1

### 3.5. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1°. Понятие интеграла функции  $w = f(z)$  по линии  $L$  вводится аналогично понятию криволинейного интеграла функции действительного переменного.

Пусть дуга  $\cup AB$  линии  $L$  задается параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta;$$

при этом точка  $M(x, y)$  совершает движение из положения  $A$  в положение  $B$  при изменении  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$ . Будем считать, что  $x'(t)$  и  $y'(t)$  существуют и непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Иными словами, дуга  $\cup AB$  задается с помощью уравнения

$$z = z(t), \text{ где } z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta;$$

при этом  $z'(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ .

Пусть, далее,  $f(z)$  непрерывна в открытой области  $G$  и  $\cup AB \subset G$ . Разобьем произвольным образом эту дугу на части точками  $z_0, z_1, \dots, z_n$  в направлении от  $A$  к  $B$ , при этом  $z_0$  совпадает с точкой  $A$ ,  $z_n$  с точкой  $B$ . На каждой из частичных дуг  $\cup z_{k-1} z_k$  произвольным образом выберем по точке  $\eta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и составим сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta z_k, \quad (3.5.1)$$

где  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$  — вектор, идущий из точки  $z_{k-1}$  в точку  $z_k$  (см. рис. 3.5.1). Обозначим через  $s$  наибольшую из длин этих векторов (хорд):  $s = \max_k |\Delta z_k|$ .

Сумма (3.5.1) называется *интегральной*, а предел вида

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta z_k \quad (3.5.2)$$

— *интегралом* от функции  $f(z)$  по дуге  $\cup AB$ ; он обозначается символом  $\int_{\cup AB} f(z) dz$ .

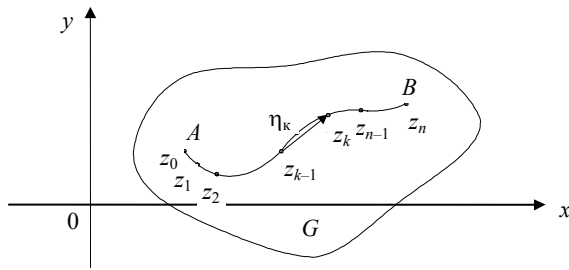


Рис. 3.5.1

Можно доказать, что при сформулированных выше условиях на функцию  $f(z)$  и дугу линии  $L$  предел (3.5.2) существует и не зависит от способа разбиения  $\cup AB$  на части точками  $z_k$  и от выбора "промежуточных" точек  $\eta_k$ .

2<sup>0</sup>. Из определения п. 1<sup>0</sup> вытекают привычные свойства интеграла:

$$1) \int_{\cup AB} (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_{\cup AB} f_1(z) dz + \int_{\cup AB} f_2(z) dz;$$

$$2) \int_{\cup AB} \lambda f(z) dz = \lambda \int_{\cup AB} f(z) dz, \text{ где } \lambda = \text{const};$$

$$3) \int_{\cup AB} f(z) dz = - \int_{\cup BA} f(z) dz,$$

где  $\cup BA$  – та же самая дуга, но с противоположным направлением обхода (от точки  $B$  к точке  $A$ );

4) если  $C$  – произвольная точка на  $\cup AB$ , то

$$\int_{\cup AB} f(z) dz = \int_{\cup AC} f(z) dz + \int_{\cup CB} f(z) dz;$$

$$5) \int_{\cup AB} dz = Z - z_0,$$

где  $z_0$  и  $Z$  – комплексные числа, изображаемые, соответственно, точками  $A$  и  $B$ ;

$$6) \left| \int_{\cup AB} f(z) dz \right| \leq M \ell,$$

где  $M$  – любая постоянная, определяемая условием  $|f(z)| \leq M, z \in \cup AB$ ;  $\ell$  – длина  $L$ .

Докажем, например, свойство 5). Имеем для  $f(z) = 1$  интегральную сумму (3.5.1) в виде

$$\sum_{k=1}^n \Delta z_k = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_{n-1} - z_{n-2} + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = Z - z_0,$$

а тогда и предел (3.5.2) от постоянной  $Z - z_0$  равен  $Z - z_0$ . Свойство 5) установлено.

3<sup>0</sup>. Вычисление интеграла (3.5.2) сводится к вычислению определенного интеграла комплексной функции действительной переменной  $t$ :

$$\int_{\cup AB} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.5.3)$$

Действительно, произвольное слагаемое в интегральной сумме (3.5.1) имеет вид

$$f(\eta_k) \Delta z_k = f(\eta_k) (\Delta x_k + i \Delta y_k),$$

при этом приращения  $\Delta x_k$  и  $\Delta y_k$  функций  $x(t)$  и  $y(t)$  (при изменении  $z$  от  $z_{k-1}$  до  $z_k$ ) могут быть приближенно представлены в виде дифференциалов:

$$\Delta x_k \approx x'(t_k) \Delta t_k; \quad \Delta y_k \approx y'(t_k) \Delta t_k;$$

здесь  $t_k$  – аргумент функции  $z(t)$  такой что  $z_k = z(t_k)$  и  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ .

Значение  $f(\eta_k)$ , ввиду непрерывности  $f$ , можно приближенно заменить на  $f(z_k) = f(z(t_k))$ , если  $|\Delta z_k|$  достаточно мало; в свою очередь, это достигается (по причине непрерывности  $z(t)$ ) выбором достаточно малых  $\Delta t_k$ . Итак,

$$f(\eta_k) \Delta z_k \approx f(z(t_k)) (x'(t_k) + i y'(t_k)) \Delta t_k = f(z(t_k)) z'(t_k) \Delta t_k.$$

Следовательно, при  $\max |\Delta t_k| \rightarrow 0$ , поведение интегральных сумм (3.5.1) и

$$\sum_{k=1}^n f(z(t_k)) z'(t_k) \Delta t_k \quad (3.5.4)$$

совпадает; сумма же (3.5.4) является интегральной для определенного интеграла в правой части (3.5.3). Такова схема доказательства (3.5.3).

4<sup>0</sup>. Формальная подстановка

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{и} \quad dz = dx + i dy$$

и вычисление произведения

$$f(z)dz = u(x, y)dx - v(x, y)dy + i(v(x, y)dx + u(x, y)dy)$$

приводят нас также к формуле

$$\int_{\cup AB} f(z)dz = \int_{\cup AB} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\cup AB} v(x, y)dx + u(x, y)dy, \quad (3.5.5)$$

доказательство которой (подобно п. 3<sup>0</sup>) производится сравнением интегральных сумм для криволинейных интегралов в правой части (3.5.5) с суммой (3.5.1).

5<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Вычислить интегралы

$$\text{а) } J_1 = \int_L z \operatorname{Im} z dz$$

вдоль отрезка прямой от точки  $z_1 = 1 + i$  до  $z_2 = 2$  (рис. 3.5.2);

$$\text{б) } J_2 = \int_L |z| dz$$

вдоль дуги окружности  $|z| = 1$ , обходимой против часовой стрелки от точки  $z_1 = 1$  до  $z_2 = i$  (рис. 3.5.3).

*Р е ш е н и е.* а) Для точки  $z_1$  имеем  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 1$ ; для  $z_2$  имеем  $x_2 = 2$ ,  $y_2 = 0$ . Запишем уравнение прямой, соединяющей эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1}, \quad \text{откуда} \quad y = 2 - x.$$

Следовательно,  $z = x + iy$  можно записать в виде

$$z = x + i(2 - x), \quad 1 \leq x \leq 2; \quad \text{тогда} \quad \operatorname{Im} z = 2 - x; \quad dz = dx - i dx.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_1^2 (x + i(2 - x))(2 - x)(1 - i) dx = (1 - i) \int_1^2 (2x - x^2 + i(x - 2)^2) dx = \\ &= (1 - i) \left( x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{i}{3} (x - 2)^3 \right) \Big|_1^2 = (1 - i) \left( 4 - \frac{8}{3} + 0 - \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{i}{3} \right) \right) = \\ &= (1 - i) \frac{2 + i}{3} = \frac{3 - i}{3}. \end{aligned}$$

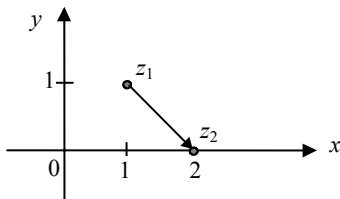


Рис. 3.5.2

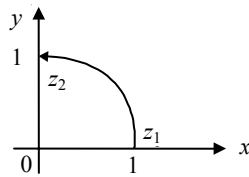


Рис. 3.5.3

б) Окружность  $|z| = 1$  имеет центр в начале координат и радиус  $r = 1$ , поэтому ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad z = \cos t + i \sin t.$$

При этом  $dz = (-\sin t + i \cos t) dt$ . Подставляя  $|z| = 1$  и учитывая что  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  на дуге  $\cup z_1 z_2$ , получаем

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\sin t + i \cos t) dt = (\cos t + i \sin t) \Big|_0^{\pi/2} = (0 + i) - (1 + 0) = i - 1.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$J = \oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz,$$

где  $n$  – любое целое число; вычисление ведется вдоль окружности  $|z-z_0|=R$  ( $z_0$  и  $R>0$  – данные числа) в направлении обхода против часовой стрелки.

*Решение.* Имеем окружность с центром в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  радиуса  $R$ , следовательно,

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos t; \\ y - y_0 = R \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Иначе говоря,  $z - z_0 = R(\cos t + i \sin t)$  или  $z = z_0 + Re^{it}$ ; тогда  $dz = iRe^{it} dt$ . При  $n \neq -1$  имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n \cdot iRe^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = iR^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{i(n+1)2\pi} - 1) = \frac{R^{n+1}}{n+1} (\cos 2(n+1)\pi + i \sin 2(n+1)\pi - 1) = 0. \end{aligned}$$

Если  $n = -1$ , то

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it} dt}{Re^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Итак,

$$\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \ n - \text{целое}; \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

### 3.6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

<sup>10</sup>. Пусть  $L$  – замкнутый контур, целиком расположенный в области  $G$ . Будем считать, что  $L$  задан уравнением  $z = z(t)$  с непрерывной  $z'(t)$ , т.е. контур гладкий или хотя бы кусочно-гладкий.

**Теорема Коши.** Пусть  $f$  аналитична в  $G$ , и контур  $L$  ограничивает односвязную область  $D \subset G$ . Тогда

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Эту теорему легко доказать при дополнительном предположении, что  $f'(z)$  – непрерывна. В силу формул (3.3.2) и (3.3.3) тогда будут непрерывными в  $G$  все частные производные первого порядка функций  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  и  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ . При этих предположениях к каждому из криволинейных интегралов в представлении (см. (3.5.5))

$$\oint_L f(z) dz = \oint_L u(x, y) dx + (-v(x, y)) dy + i \oint_L v(x, y) dx + u(x, y) dy \quad (3.6.1)$$

можно применить формулу Грина:

$$\oint_L u dx + (-v) dy = \iint_D \left( \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.6.2)$$

$$\oint_L v dx + u dy = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy; \quad (3.6.3)$$

обход контура  $L$  в криволинейных интегралах происходит против часовой стрелки.

Согласно условиям Коши–Римана (3.4.1) интеграл в правой части (3.6.3) равен нулю, и это же верно для двойного интеграла в (3.6.2), так как

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Следовательно, равны нулю и оба криволинейных интеграла; они остаются нулевыми, если изменить направление обхода  $L$  на противоположное.

Теперь, в силу равенства (3.6.1), получаем утверждение теоремы.

2°. Заметим, что свойство непрерывности  $f'(z)$  вытекает из аналитичности  $f(z)$ , что будет доказано в дальнейшем. Однако, доказательство будет опираться на теорему Коши, а тогда сама она должна быть установлена иными (гораздо более объемными) рассуждениями. Их суть состоит в следующем.

а) Если  $\Delta$  – треугольник, лежащий в достаточно малой окрестности точки  $z_0$ , то в силу аналитичности  $f(z)$  для малого  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad z \in \Delta,$$

откуда

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z, z_0)(z - z_0),$$

где  $|\alpha(z, z_0)| < \varepsilon$ . При интегрировании по  $z \in \Delta$  последнего равенства имеем

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta} \alpha(z, z_0)(z - z_0) dz \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon,$$

так как интегралы остальных слагаемых обратятся в ноль (см. рассуждения п. 1°). Ввиду произвольности  $\varepsilon$  интеграл по контуру  $\Delta$  равен нулю.

б) Далее, устанавливается, что интеграл уже по всякому треугольнику равен нулю (иное предположение приводит к противоречию с п. а)).

в) Результат для треугольного контура переносится на случай произвольной замкнутой ломанной, а затем и на случай произвольной гладкой (кусочно-гладкой)  $L$ .

3°. Заметим также, что теорема Коши оказывается справедливой и в случае, когда  $f(z)$  остается аналитической в области  $D$ , а на ее границе  $L$  является лишь непрерывной.

4°. Теорема Коши в общем случае может быть сформулирована в терминах интегрирования по так называемым гомотопным путям. Суть утверждения в том, что для аналитической в области функции интеграл остается неизменным, если путь интегрирования непрерывно деформируется внутри области так, что его концы остаются неподвижными.

Для более точной формулировки рассмотрим в области  $D$  два пути: а)  $\gamma_0 = \gamma_0(t)$  и  $\gamma_1 = \gamma_1(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  с общими концами  $\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha) = a$ ; б)  $\gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta) = b$ .

Пусть существует непрерывная функция двух переменных  $\gamma = \gamma(s, t)$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  с областью значений в  $D$ , такая что при всех  $s$  и  $t$

$$\gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t); \quad \gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t); \quad \gamma(s, \alpha) \equiv a; \quad \gamma(s, \beta) \equiv b.$$

Тогда пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  называются гомотопными в  $D$ . Заметим, что при изменении параметра  $s$  получаем семейство непрерывным образом деформирующихся путей, которые как бы связывают фиксированные пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

В применении к замкнутым путям определение гомотопности имеет следующий вид. Два замкнутых пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  называются гомотопными в  $D$ , если указанная непрерывная функция  $\gamma = \gamma(s, t)$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  обладает свойствами

$$\gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t); \quad \gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t); \quad \gamma(s, \alpha) \equiv \gamma(s, \beta).$$

Наконец, говорят, что замкнутый путь  $\gamma$  гомотопен нулю (точке) в области  $D$ , если в условиях последнего определения  $\gamma(1, t) \equiv \text{const}$ . Это означает, что замкнутый путь  $\gamma$  непрерывной деформацией внутри  $D$  может быть стянут в точку. Ясно, что в односвязной области каждый замкнутый путь гомотопен нулю и что два любые пути с общими концами гомотопны друг другу.

Теорема Коши в общей формулировке имеет следующий вид.

Пусть функция  $f = f(z)$  аналитична в  $D$  и пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  (кусочно-гладкие) гомотопны друг другу как пути с общими концами или как замкнутые пути. Тогда

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Поскольку в односвязной области каждый замкнутый путь  $\gamma_1$  гомотопен нулю, то получаем приведенное выше в п. 1 утверждение теоремы Коши о том, что интеграл аналитической в односвязной области  $D$  функции по всякому замкнутому пути  $\gamma_0$  равен нулю.

### 3.7. ТЕОРЕМА КОШИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

1°. Пусть контуры  $L_1, L_2, \dots, L_n$  и  $L$  задаются также, как и в параграфе 3.6, являются замкнутыми и расположены в области  $G$ . Предположим далее, что все  $L_j$  находятся внутри  $L$ , ограничивают односвязные области и на каждом из  $L_j$  и  $L$  направление обхода выбрано против часовой стрелки.

Т е о р е м а. Если  $f(z)$  аналитична в области  $G$ , то

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz + \oint_{L_2} f(z) dz + \dots + \oint_{L_n} f(z) dz. \quad (3.7.1)$$

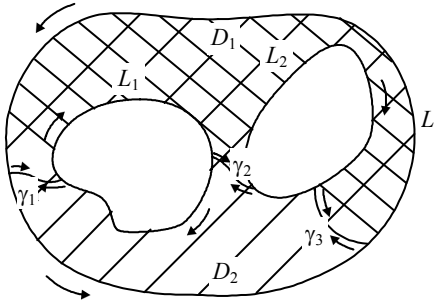


Рис. 3.7.1

**Доказательство.** Рассуждения проведем для случая  $n = 2$ , (см. рис. 3.7.1). Соединим контуры  $L, L_1, L_2$  гладкими кривыми  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . При этом область  $D$ , ограниченная линией  $L$ , оказалась разбитой на две односвязные области  $D_1$  и  $D_2$  с границами  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , обходимыми в положительном направлении (т.е. в том направлении, при котором области  $D_1$  (при обходе  $\Gamma'$ ) и  $D_2$  (обход  $\Gamma''$ ) остаются слева). По теореме Коши для односвязной области

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0; \quad \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0,$$

следовательно,

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0, \quad \text{т.е.} \quad \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} f(z) dz = 0.$$

Но объединение границ  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  состоит из  $L$  (обходимой против часовой стрелки),  $L_1$  и  $L_2$  (обход — по часовой стрелке) и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , обходимых дважды в противоположных направлениях, что показано на рисунке. Следовательно (свойство 4 п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5),

$$\oint_{-L_1} f(z) dz + \oint_{-L_2} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \oint_L f(z) dz = 0, \quad (3.7.2)$$

где знак "-" перед обозначением контура указывает на обход по часовой стрелке. Согласно свойству 3) п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5 интегралы по  $-\gamma_1$  и  $\gamma_1$  отличаются только знаком и поэтому взаимно уничтожаются; то же самое верно для интегралов и по  $-\gamma_2$  и  $\gamma_2$ . Теперь, меняя направление обхода по  $-L_1$  и  $-L_2$  получаем (3.7.2) в виде

$$-\oint_{L_1} f(z) dz - \oint_{L_2} f(z) dz + \oint_L f(z) dz = 0,$$

а это и есть утверждение теоремы при  $n = 2$ . Общий случай  $n \geq 2$  доказывается точно также: записываем равенство типа (3.7.2), содержащее интегралы по всем  $-L_j, -\gamma_j$  и  $L$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), откуда и вытекает (3.7.1).

2<sup>0</sup>. Если сохраняются предположения п. 1<sup>0</sup> для границ двусвязной области  $L$  (внешней) и  $\ell$  (внутренней), то важным следствием теоремы является (см. рис. 3.7.2) равенство

$$\int_L f(z) dz = \int_{\ell} f(z) dz.$$

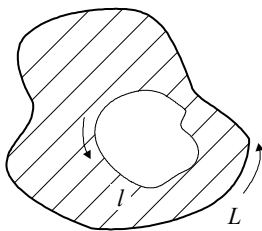


Рис. 3.7.2

### 3.8. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

1<sup>0</sup>. Докажем следующее утверждение. Пусть  $f(z)$  непрерывна в области  $G$ .

Интеграл по всякому замкнутому контуру  $L$ , расположенному в области  $G$ , равен нулю, тогда и только тогда, когда интеграл по любой дуге (расположенной в  $G$ ) зависит только от положения начальной и конечной точек дуги.

Действительно, пусть

$$\oint_L f(z) dz = 0 \text{ для любого } L \subset G.$$

Выберем произвольную дугу  $\gamma_1$ , соединяющую точки  $z_0$  и  $z$ . Всякая другая дуга  $\gamma_2$ , соединяющая эти же точки, образует вместе с  $\gamma_1$  замкнутый контур (см. рис. 3.8.1), поэтому

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = 0,$$

где знак "-" перед  $\gamma_2$  означает путь от  $z$  к  $z_0$ .

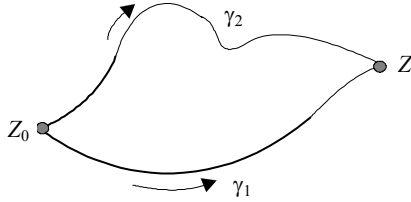


Рис. 3.8.1

Меняя направление на  $\gamma_2$ , имеем

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \text{ или } \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz,$$

т.е. независимо от пути интегрирования  $\int_{\cup z_0 z} f(z) dz$  — один и тот же.

В указанном случае этот интеграл удобнее обозначить в виде

$$\int_{z_0}^z f(z) dz.$$

Обратно, если  $L$  — произвольный замкнутый контур в  $G$ , то в случае независимости интеграла от пути, соединяющего любые  $z_0$  и  $z$  имеем

$$\oint_L f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz + \int_z^{z_0} f(z) dz.$$

Последние два интеграла можно вычислить (согласно предположению) вдоль отрезка прямой, соединяющего  $z_0$  и  $z$ , а тогда они отличаются лишь знаком. Значит  $\oint_L f(z) dz = 0$ .

2°. В частности, из теоремы Коши вытекает, что интеграл аналитической функции вдоль любой дуги, соединяющей  $z_0$  и  $z$ , зависит лишь от положения  $z_0$  и  $z$ ;  $z_0$  и  $z$  и упомянутые дуги предполагаются расположенными в области аналитичности функции  $f$ .

3°. Т е о р е м а. В предположениях п. 2° функция

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

является аналитической в  $G$  и

$$\Phi'(z) = f(z). \quad (3.8.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть  $z$  — произвольна,  $z \in G$ . В силу независимости интеграла от пути (см. п. 2°) для любого приращения  $\Delta z$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} &= \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(s) ds. \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

В последнем интеграле траекторией интегрирования можно выбрать отрезок прямой, соединяющей  $z$  и  $z + \Delta z$ . В этом случае (свойство 5 пункта 2° параграфа 3.5)

$$\int_z^{z+\Delta z} ds = \Delta z.$$

Оценим, используя (3.8.2) и свойство 6 п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5, следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds - f(z) \Delta z \right| = \\ &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds - f(z) \int_z^{z+\Delta z} ds \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} (f(s) - f(z)) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \cdot (\max |f(s) - f(z)|) \cdot |\Delta z| \leq \max |f(s) - f(z)|; \end{aligned}$$

здесь наибольшее значение модуля разности значений функции берется по всем  $s \in [z, z + \Delta z]$ , а так как  $f$  аналитична (а значит и непрерывна), то указанное значение можно сделать меньшим любого  $\varepsilon > 0$  для достаточно малых  $|\Delta z|$ . По определению предела это означает, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = f(z).$$

Последнее соотношение равносильно (3.8.1). Ввиду произвольности  $z \in G$  имеем, в частности, аналитичность  $\Phi(z)$  в  $G$ . Теорема доказана.

4<sup>0</sup>. Утверждение теоремы п. 3<sup>0</sup> означает, что "интеграл с переменным верхним пределом"

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds \quad (3.8.3)$$

есть первообразная для  $f(z)$ . Для другой первообразной  $F(z)$  имеем

$$(\Phi(z) - F(z))' = f(z) - f(z) = 0,$$

откуда действительная и мнимая части  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  разности  $\Phi(z) - F(z)$  обладает свойством (см. (3.3.2))

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Из условий Коши–Римана будет вытекать также, что

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Следовательно полные дифференциалы  $dU = 0$ ,  $dV = 0$ , откуда постоянными оказываются  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$ . Вместе с ними постоянна и разность  $\Phi(z) - F(z)$ . Таким образом,

$$\Phi(z) = F(z) + C, \quad (3.8.4)$$

где  $C$  – некоторое постоянное комплексное число.

5<sup>0</sup>. Имеет место формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_{z_0}^z f(s) ds = F(z) - F(z_0), \quad (3.8.5)$$

где  $F(z)$  – любая первообразная аналитической функции  $f$ .

Действительно, при  $z = z_0$  в (3.8.4) получаем

$$0 = F(z_0) + C, \text{ т.е. } C = -F(z_0).$$

Теперь, согласно (3.8.4), получаем

$$\Phi(z) = F(z) - F(z_0).$$

Вспоминая определение (3.8.3), приходим к формуле (3.8.5).

6<sup>0</sup>. Условия голоморфности функции  $f(z)$  можно сформулировать в терминах так называемых дифференциальных форм, т.е. выражений вида  $\omega = f \cdot dz$ .

Форма  $\omega$  называется замкнутой, если в рассматриваемой области  $D$  ее дифференциал  $d\omega$  равен нулю и точной, если существует такая функция  $F$ , что во всех точках  $F' = f$ .

Как оказывается, из голоморфности  $f(z)$  в данной области  $D$  вытекает ее замкнутость: достаточно записав  $\omega = f dz$  в виде  $(u + iv)(dx + i dy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy)$  вычислить, пользуясь условиями Коши-Римана,  $d\omega = \omega'_x dx + \omega'_y dy$ , чтобы убедиться в том, что  $d\omega = 0$  всюду в  $D$ . Верно и обратное, так что голоморфность в  $D$  функции  $f(z)$  равносильна замкнутости соответствующей дифференциальной формы.

Существование же первообразной голоморфной функции (которое имеет место во всякой односвязной области), означает для соответствующей дифференциальной формы, что она точна (точна «глобально»).

Таким образом, всякая замкнутая в односвязной области дифференциальная форма (указанного вида) глобально точна.

### 3.9. ФОРМУЛА КОШИ

1<sup>0</sup>. Пусть функция  $f(z)$  однозначна и аналитична в области  $G$ ,  $L$  – контур, ограничивающий односвязную область  $D$ , целиком лежащий в  $G$  и обходимый против часовой стрелки; характер линии  $L$  описан в п. 1<sup>0</sup> параграфа 3.6. Тогда для любой точки  $z_0$ , лежащей в  $D$  (т.е. расположенной внутри  $L$ ) имеет место следующая интегральная формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (3.9.1)$$

Доказательство (3.9.1). Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем в  $D$  окружность  $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$  столь малого радиуса  $\rho$ , чтобы

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon; \quad (3.9.2)$$

это возможно, так как  $f(z)$ , будучи аналитической, является и непрерывной в  $D$ . Обозначим через  $\gamma$  указанную окружность, выберем на ней направление обхода против часовой стрелки и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 1 \quad (3.9.3)$$

согласно примеру 2 п. 5<sup>0</sup> параграфа 3.5. Теперь по теореме Коши для двухсвязной области (п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.7) имеем

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (3.9.4)$$

Указанная теорема применима, поскольку  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$  аналитична вместе с  $f(z)$  в области  $D$ , из которой исключена точка  $z_0$ , так что, в частности,  $\varphi(z)$  аналитична в области между контурами  $\gamma$  и  $L$  и на самих этих контурах.

Оценим разность между интегралом (3.9.1) и  $f(z_0)$ , воспользовавшись (3.9.3) и (3.9.4):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right|. \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

Оценивая модуль интеграла (свойство 6 п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5), имеем правую часть (3.9.5) не превосходящей

$$\frac{1}{2\pi |i|} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi \rho = \varepsilon,$$

поскольку имеет место неравенство (3.9.2) и соотношение  $|z - z_0| = \rho$  на окружности  $\gamma$ . Теперь

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| < \varepsilon,$$

и, в силу произвольности  $\varepsilon$ , имеем левую часть полученного неравенства равной нулю. Следовательно, формула (3.9.1) доказана.

2<sup>0</sup>. В предположениях п. 1<sup>0</sup> в любой точке  $z_0$  производная  $f'(z)$  также оказывается аналитической функцией и имеет место формула

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}. \quad (3.9.6)$$

Действительно, "разностное отношение" в силу (3.9.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h} \left( \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-(z_0+h))} - \oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \oint_L ((z-z_0)-(z-z_0-h)) \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)} dz,\end{aligned}\quad (3.9.7)$$

где через  $h$  обозначено произвольное приращение  $\Delta z$  с достаточно малым значением  $|h|$ .

Переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$  (предельный переход под знаком интеграла может быть аккуратно обоснован), получаем формулу (3.9.6). Поскольку  $z_0$  может быть заменена на любую точку  $\tilde{z}_0$  (из достаточно малой окрестности точки  $z_0$ ), то  $f(z)$  аналитична в точке  $z_0$ .

3°. Рассуждения п. 2° можно повторить для  $f''(z_0), f'''(z_0)$  и т.д. Следовательно, для любого  $n$  в каждой точке  $z_0 \in D$  существует производная  $f^{(n)}(z_0)$  и для нее справедливо соотношение

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.9.8)$$

Формулу (3.9.8) можно получить формально дифференцированием по  $z_0$  соотношения (3.9.1)  $n$  раз под знаком интеграла.

4°. **Т е о р е м а М о р е р а**. Если функция  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $G$  и интеграл от  $f(z)$  по любому замкнутому контуру равен нулю, то  $f(z)$  аналитична в  $G$ .

Это утверждение является обратным по отношению к установленному ранее свойству, что интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции – равен нулю. Выше мы установили, что функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

является аналитической (при условиях теоремы этот интеграл не зависит от пути, соединяющего точки  $z_0$  и  $z$ ), причем доказательство сохранилось бы, если  $f(z)$  требовать лишь непрерывной в  $G$ ; далее, было установлено, что  $F'(z) = f(z)$ . Согласно результату п. 3° аналитической будет и  $F'(z)$ , совпадающая с  $f(z)$ , а это и есть доказываемый результат.

5°. Неожиданной, на первый взгляд, является следующая

**Т е о р е м а Л и у в и л л я**. Пусть функция  $f(z)$  аналитична во всей комплексной плоскости и существует постоянная  $M$  такая, что для всех  $z$  выполнено неравенство  $|f(z)| \leq M$ . Тогда  $f(z)$  тождественно равна постоянной.

Другими словами, аналитическая во всей плоскости функция, отличная от постоянной, не может быть ограничена по модулю; так, например, можно указать точки, в которых  $|\sin z|$  сколь угодно велик.

**Д о к а з а т е л ь с т в о**. В силу аналитичности  $f'(z)$  (вместе с  $f(z)$ ) во всей плоскости имеем:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds, \quad (3.9.9)$$

где  $\gamma_R$  – окружность с центром в точке  $z$ , сколь угодно большого радиуса  $R$ , обходимая в направлении против часовой стрелки.

На этой окружности  $|s-z| = R$ , следовательно,

$$\left| \frac{f(s)}{(s-z)^2} \right| \leq \frac{M}{R^2};$$

тогда интеграл (3.9.9) имеет оценку

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R},$$

где  $2\pi R$  – длина окружности  $\gamma_R$ . Но  $M = \text{const}$ ,  $R$  – сколь угодно велико, тогда  $|f'(z)| = 0$  при всех  $z$ . Отсюда легко следует (см. рассуждения п. 4° параграфа 3.8), что  $f(z)$  – постоянна, что и утверждалось.

6°. Важным приложением теоремы Лиувилля является так называемая *основная теорема алгебры*: всякое уравнение вида

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0, \quad (n=1, 2, \dots)$$

имеет хотя бы один корень.

Действительно, предположим противное. Тогда знаменатель дроби

$$f(z) = \frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} \quad (3.9.10)$$

всегда отличен от нуля, а значит (вычислением производной) убеждаемся, что  $f(z)$  аналитична во всей плоскости. Далее, очевидно, что (см. п. 3<sup>0</sup> параграфа 2.2)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}} = 0,$$

т.е.  $|f(z)| < 1$  для достаточно больших  $|z|$ , например, в области, где  $|z| > R$  с достаточно большим  $R$ . В круге  $|z| \leq R$  модуль  $f(z)$  также ограничен, так как  $f(z)$  непрерывна в круге. Получается, что аналитическая  $f(z)$  имеет ограниченный модуль, а тогда, по теореме Лиувилля,  $f(z) = \text{const}$ . Но это противоречит ее определению (3.9.10). Следовательно, теорема доказана.

7<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Вычислить  $J = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + iz} dz$  вдоль окружности:

а)  $|z| = \frac{1}{2}$ ; б)  $|z - 2| = 1$ ; в)  $|z + i| = \frac{1}{2}$ .

Направление обхода – против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. а) Запишем интеграл в виде

$$J = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)} dz = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}(z+i)^{-1}}{z-0} dz.$$

Поскольку внутри окружности  $|z| = 1/2$  содержится точка  $z_0 = 0$  и не содержится  $z = -i$  (см. рис. 3.9.1), то для функции  $f(z) = e^{\pi z}(z+i)^{-1}$  применима интегральная формула Коши в виде

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

В нашем случае  $J = 2\pi i e^{\pi \cdot 0}(0+i)^{-1} = 2\pi$ .

б)  $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)}$  является аналитической в круге  $|z - 2| \leq 1$ , так как нули знаменателя  $z_0 = 0$  и  $z_1 = -i$  лежат вне этого круга (рис. 3.9.1). По теореме Коши (для односвязной области) имеем тогда  $J = 0$ .

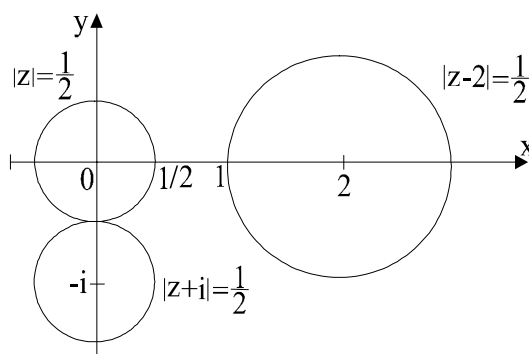


Рис. 3.9.1

в)  $f(z) = e^{\pi z} \cdot z^{-1}$  является аналитической в круге  $|z + i| = \frac{1}{2}$  с центром  $(-i)$  радиуса  $R = \frac{1}{2}$ . Тогда по формуле Коши

$$J = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z} \cdot z^{-1}}{z - (-i)} dz = 2\pi i e^{-\pi i} (-i)^{-1} = -2\pi (\cos \pi - i \sin \pi) = 2\pi.$$

П р и м е р 2. Вычислить

$$J = \oint_{\gamma} \left( \frac{z}{z - 3i} \right)^3 dz$$

вдоль окружности  $|z - 3i| = 3$ , обходимой в направлении против часовой стрелки.

*Решение.* Запишем интеграл в таком виде, чтобы была применима формула п. 3<sup>0</sup>

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (3.9.11)$$

В нашем случае

$$J = \oint_{\gamma} \frac{z^3}{(z - 3i)^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{2!} (z^3)'' \Big|_{z=3i},$$

так как  $f(z) = z^3$ ,  $n = 2$ ,  $z_0 = 3i$ . Вычисляя правую часть полученного равенства, имеем

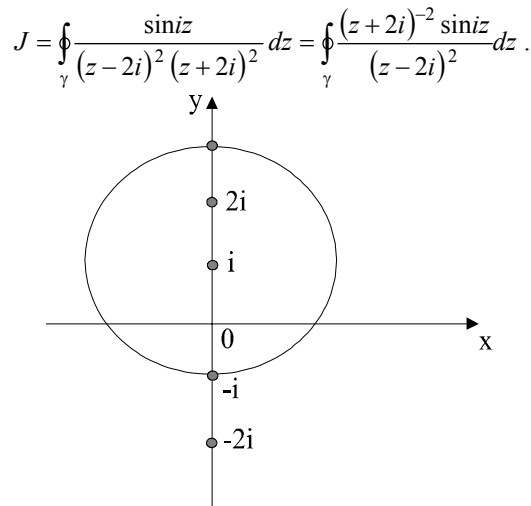
$$J = \frac{2\pi i}{2} \cdot 6z \Big|_{z=3i} = \pi i \cdot 18i = -18\pi.$$

**Пример 3.** Вычислить

$$J = \oint_{\gamma} \frac{\sin iz \, dz}{(z^2 + 4)^2},$$

$\gamma$  – окружность  $|z - i| = 2$ , обходимая против часовой стрелки.

*Решение.* Приведем интеграл  $J$  к виду (3.9.6). Для этого заметим, что  $z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z - 2i)(z + 2i)$ , и в круге  $|z - i| \leq 2$  содержится лишь одна из двух точек (именно  $z = 2i$ ), в которой знаменатель обращается в ноль (см. рис. 3.9.2). Теперь



**Рис. 3.9.2**

Применим формулу (3.9.11) с  $f(z) = (z + 2i)^{-2} \sin iz$ ,  $z_0 = 2i$ ,  $n = 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \left( (z + 2i)^{-2} \sin iz \right)' \Big|_{z=2i} = \\ &= 2\pi i \left( -2(z + 2i)^{-3} \sin iz + i(z + 2i)^{-2} \cos iz \right) \Big|_{z=2i} = \\ &= 2\pi i \left( -2(4i)^{-3} \sin(-2) + i(4i)^{-2} \cos(-2) \right) = 2\pi i \left( \frac{2\sin 2}{-64i} + \frac{i\cos 2}{-16} \right) = \\ &= 2\pi i \left( \frac{i\sin 2}{32} - \frac{i\cos 2}{16} \right) = \frac{\pi}{16} (2\cos 2 - \sin 2). \end{aligned}$$

8<sup>0</sup>. Рассмотрим произвольный гладкий (или кусочно-гладкий и необязательно замкнутый) путь  $L$ , функцию  $f(z)$ , непрерывную на  $L$  и произвольную точку  $z$ , не лежащую на  $L$ . Интеграл вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(s)}{s - z} ds \quad (3.9.12)$$

называется *интегралом типа Коши*. Очевидно, что интеграл, записанный в правой части равенства (3.9.1), является частным случаем (3.9.12).

Интеграл вида (3.9.12) определяет однозначную функцию  $\Phi(z)$  во всякой области  $D$ , не содержащей ни одной точки пути  $L$ . Можно доказать, что эта функция в области  $D$  обладает производными любого порядка, причем  $n$ -я производная может быть найдена путем формального  $n$ -кратного дифференцирования выражения под знаком интеграла:

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds.$$

### 3.10. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1<sup>0</sup>. Найти точки, в которых данная  $w = f(z)$ :

- а) дифференцируема;  
б) аналитична:

1)  $w = e^{1-2z}$ ; 2)  $w = \frac{\cos z}{2}$ ; 3)  $w = \bar{z}^2 - z + 1$ ;

4)  $w = \frac{\bar{z}}{z}$ ; 5)  $w = z(|z| - 1)$ ; 6)  $w = \operatorname{Re} z^2$ .

2<sup>0</sup>. Найти аналитическую функцию  $w = f(z)$ , для которой

- а) действительная часть равна  $u(x, y) = 4x^2 - 4y^2$ ;  
б) мнимая часть равна  $v(x, y) = 3e^{2x} \sin 2y$ .

3<sup>0</sup>. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  при отображении  $w = f(z)$  в точке  $z_0$ , если

1)  $w = z^2 - 1 + i$ ,  $z_0 = 1$ ; 2)  $w = i - e^z$ ,  $z_0 = -i\pi$ .

4<sup>0</sup>. Вычислить интеграл:

1)  $\int_L z \operatorname{Im}(z-i) dz$  вдоль линии  $z = x + ix^2$  от точки  $z_1 = 1 + i$  до точки  $z_2 = -1 + i$ ;

2)  $\int_L z |z| dz$  вдоль дуги окружности  $z = 2e^{i\varphi}$  в направлении против часовой стрелки от точки  $z_1 = 2$  до точки  $z_2 = 2i$ ;

3)  $\int_L (1 - z^2) dz$  вдоль отрезка прямой, соединяющей точки:

а)  $z_1 = i - 1$  и  $z_2 = 1 - i$ ; б)  $z_1 = -2$  и  $z_2 = 4i$ ;

4)  $\int_L (z - 2\operatorname{Re} z) dz$  вдоль ломанной, соединяющей точки  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ ,  $z_3 = 2i$ .

5<sup>0</sup>. Вычислить интеграл по замкнутому контуру  $L$  в направлении против часовой стрелки:

1)  $\oint_L \frac{\sin iz}{z - \frac{\pi i}{2}} dz$ ;  $L$  — окружность  $|z| = 2$ ;

2)  $\oint_L \frac{ze^{-z}}{z^2 + 1} dz$ ;  $L$  — окружность: а)  $|z - i| = 1$ ; б)  $|z + 1| = 1$ ;  
в)  $|z - 3i| = 1$ ;

3)  $\oint_L \frac{\cos(z-i)}{(z-i)^3} dz$ ;  $L$  — окружность  $2|z| = 3$ ;

4)  $\oint_L \frac{z+i}{z(z-2)^2} dz$ ;  $L$  — окружность  $|z-2| = 1,9$ ;

5)  $\oint_L \frac{e^{i\pi z}}{(z^2 - 1)^2} dz$ ;  $L$  — окружность  $|z+2| = 2$ .

# Глава 4

## РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

### 4.1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА

1°. Рассмотрим ряд по степеням разности  $(z - z_0)$ , где  $z_0$  – данное комплексное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \dots + C_n (z - z_0)^n + \dots \quad (4.1.1)$$

Выше (в параграфе 2.4) установлено, что *областью сходимости* (4.1.1) является некоторый круг  $|z - z_0| < R$ ; исключим из рассмотрения тривиальный случай  $R = 0$  (случай единственной точки сходимости). Тогда при любом  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$ , степенной ряд (4.1.1) равномерно сходится (и даже мажорируем) в замкнутом круге  $\bar{U}(z_0, \rho)$ , состоящем из точек  $z$ , таких, что  $|z - z_0| \leq \rho$  (см. пп. 4°, 6° параграфа 2.4).

Если функция  $\varphi(z)$  равномерно по модулю ограничена, т.е. если существует  $M = \text{const}$ , такая, что  $|\varphi(z)| \leq M$  при  $z \in \bar{U}(z_0, \rho)$ , то ряд

$$C_0 \varphi(z) + C_1 \varphi(z) (z - z_0) + \dots + C_n \varphi(z) (z - z_0)^n + \dots \quad (4.1.2)$$

остается мажорируемым в том же круге. Действительно, пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

является мажорантным (т.е. сходящимся и таким, что  $|C_n (z - z_0)|^n \leq a_n$ ; читателю рекомендуется уточнить вид последовательности  $a_n$ ) для (4.1.1), тогда мажорантным для (4.1.2) оказывается, очевидно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M a_n.$$

2°. Установим возможность *почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов* и (при дополнительных предположениях о  $\varphi(z)$ ) рядов вида (4.1.2) в круге сходимости. Эта возможность будет вытекать, как частный случай, из следующих утверждений.

3°. **Т е о р е м а 1.** Пусть члены равномерно сходящегося в круге  $\bar{U}(z_0, \rho)$  ряда

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (4.1.3)$$

непрерывны и  $L$  – некоторая дуга, расположенная в этом круге. Тогда, если  $f(z)$  – сумма ряда (4.1.3), то возможно почленное интегрирование по дуге  $L$ :

$$\int_L f(z) dz = \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz + \dots \quad (4.1.4)$$

Заметим, что утверждение теоремы уже включает в себя сходимость ряда (4.1.4); дуга  $L$  (по которой производится интегрирование), как и выше (в главе 3) предполагается параметрически заданной ( $z = z(t)$ ) и гладкой (либо кусочно-гладкой).

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится также, как в случае соответствующего свойства для рядов из функций действительного переменного. Во-первых (как отмечалось в п. 2° параграфа 2.4),  $f(z)$  – непрерывна в указанном выше круге, т.е. интеграл от нее (вдоль  $L$ ) существует. Во-вторых, достаточно доказать (по определению сходимости ряда), что разность

$$\int_L f(z) dz - \left( \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz \right)$$

является при  $n \rightarrow \infty$  бесконечно малой последовательностью. Действительно, модуль этой разности обладает оценкой

$$\begin{aligned} \left| \int_L f(z) dz - \int_L (f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)) dz \right| &= \\ &= \left| \int_L (f(z) - S_n(z)) dz \right| \leq \left( \max_{z \in L} |f(z) - S_n(z)| \right) \ell, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

где  $S_n(z)$  – частная сумма ряда (4.1.3);  $\ell$  – длина дуги  $L$ .

Ввиду равномерной сходимости (см. п. 2<sup>0</sup> параграфа 2.4) ряда (4.1.3) правая часть (4.1.5) стремится к нулю (при  $n \rightarrow \infty$ ), чем и доказано соотношение (4.1.4).

В частности, если  $\varphi(z)$  непрерывна в круге  $\bar{U}(z_0; \rho)$  (а значит, и ограничена по модулю), то мажорируемый (и, следовательно, равномерно сходящийся к своей сумме) ряд (4.1.2) допускает почленное интегрирование.

4<sup>0</sup>. Т е о р е м а 2. Если члены ряда (4.1.3) аналитичны в круге  $\bar{U}(z_0; \rho)$  и ряд равномерно сходится к сумме  $f(z)$  в этом круге, то и  $f(z)$  аналитична для всех  $z \in \bar{U}(z_0; \rho)$ .

Схема доказательства теоремы для случая произвольной точки  $z \in U(z_0; \rho)$  состоит в следующем:

а) пусть  $\gamma$  – некоторая окружность с центром в точке  $z$ , целиком лежащая внутри  $\bar{U}(z_0; \rho)$ , тогда

$$\frac{f(s)}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(s)}{s-z}, \quad s \in \gamma,$$

причем члены ряда аналитичны (как функции от  $s$ ) вместе с  $f_n(s)$ ;

б) согласно теореме 1 возможно почленное интегрирование ряда по окружности  $\gamma$  (обход – в направлении против часовой стрелки):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(s)ds}{s-z} \right)$$

или, согласно интегральной формуле Коши,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

а тогда сумма ряда (4.1.3)  $f(z)$  оказывается совпадающей с интегралом "типа Коши":

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{s-z};$$

в) этот интеграл представляет собой аналитическую в  $\bar{U}(z_0; \rho)$  функцию (подобное утверждение обсуждалось выше), т.е.  $f(z)$ , ввиду произвольности  $z$ , аналитична в указанном круге.

В частности, сумма степенного ряда (4.1.1) аналитична в круге сходимости.

## 4.2. РЯД ТЕЙЛОРА

1<sup>0</sup>. Пусть  $w = f(z)$  однозначна и аналитична в круге  $G$  с центром в некоторой точке  $z_0$ . Поставим задачу: разложить  $f(z)$  в ряд по степеням разности  $(z - z_0)$ .

Подобная задача для функций действительной переменной при некоторых условиях на функцию (помимо дифференцируемости сколь угодно много раз) решалась в виде ряда Тейлора. В случае аналитической  $f(z)$  интегральная формула Коши позволяет "напрямую" получать аналог тейлоровского ряда.

2<sup>0</sup>. При условиях п. 1<sup>0</sup> для любой  $z \in G$  имеет место разложение

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots, \quad (4.2.1)$$

что будет доказано ниже, в п. 4<sup>0</sup>.

3<sup>0</sup>. Другая форма (4.2.1) оказывается следующей:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad (4.2.2)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}}; \quad (4.2.3)$$

$\gamma$  – любая окружность с центром в точке  $z_0$ , обходимая против часовой стрелки и целиком лежащая в области  $G$ .

Разложения (4.2.1) и (4.2.2) эквивалентны, так как коэффициенты при  $(z-z_0)^n$ , записываемые в виде  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ , совпадают с правой частью (4.2.3):

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}}$$

ввиду формулы (3.9.8) для  $f^{(n)}(z_0)$ .

4<sup>0</sup>. Итак, достаточно доказать (4.2.2). Так как  $f(z)$  аналитична в  $G$ , то по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} ds, \quad (4.2.4)$$

где  $z$  – произвольная точка в области  $G$ , а окружность  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$  проведена так, что  $z$  расположена внутри ее.

При таком выборе контура интегрирования (см. рис. 4.2.1)

$$|z - z_0| < |s - z_0|,$$

т.е.  $q = \frac{z-z_0}{s-z_0}$  обладает свойством  $|q| < 1$ .

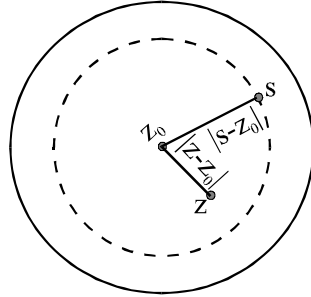


Рис. 4.2.1

Теперь

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

является сходящимся рядом как сумма геометрической прогрессии (сходимость при  $|q| < 1$  доказывается в точности так же, как для случая прогрессии с действительными членами). Под знаком интеграла (4.2.4) получается ряд (по степеням  $\frac{z-z_0}{s-z_0}$ ), сходящийся при каждом  $z$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z_0} \left( 1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(s-z_0)^2} + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^n} + \dots \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z_0} ds + \frac{1}{2\pi i} (z-z_0) \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^2} ds + \frac{1}{2\pi i} (z-z_0)^2 \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^3} ds + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} (z-z_0)^n \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds + \dots \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Почленное интегрирование возможно в силу теоремы 1, условия которой выполнены, так как:

- $f(s)$  аналитична в  $G$ , следовательно, существует постоянная  $M$ , такая что  $|f(s)| \leq M$  на  $\gamma$ ;
- $|s - z_0| = r = \text{const}$ , где  $r$  – радиус выбранной окружности  $\gamma$ ;
- ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(s)}{s-z_0} \left( \frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n$$

имеет тогда в качестве мажорантного сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} |q|^n,$$

где  $q = \frac{z-z_0}{s-z_0}$ , так что  $|q| < 1$ .

Разложение (4.2.5) теперь совпадает с утверждением (4.2.2), если учесть определение (4.2.3) коэффициентов  $C_n$ .

Следовательно, соотношения (4.2.1) и (4.2.2) доказаны. Заметим, что контур интегрирования в доказательстве мы выбрали так, чтобы точка  $z$  была заключена внутри его, однако, по теореме Коши для многосвязной области (см. параграф 3.7), в качестве  $\gamma$  можно выбрать *любую* окружность с центром в  $z_0$ , лежащую в  $G$ .

5<sup>0</sup>. При  $z_0 = 0$  (4.2.1) называется рядом Маклорена:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots$$

В частности, равенства (2.5.1), (2.5.2), (2.5.3), выведенные ранее как *определения* соответствующих элементарных функций, могут теперь быть истолкованы как *разложения* в ряды Маклорена. Список подобных разложений можно дополнить. Например,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad |z| < 1.$$

6°. Пусть теперь  $f(z)$  аналитична в произвольной точке  $z_0$ . Ее можно выбрать в качестве центра круга (достаточно малого радиуса), в котором  $f(z)$  остается аналитичной, а затем разложить  $f(z)$  в ряд Тейлора (4.2.1). Говорят, что (4.2.1) есть разложение  $f(z)$  в окрестности  $z_0$ .

Если  $f(z_0) = 0$ , то разложение в окрестности  $z_0$ , записанное в форме (4.2.2), имеет вид

$$f(z) = C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots + C_n(z-z_0)^n + \dots, \quad (4.2.6)$$

так как  $C_0 = f(z_0) = 0$ . Может случиться так, что  $C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1} = 0$ , но  $C_n \neq 0$ , т.е.

$$f(z) = C_n(z-z_0)^n + C_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots \quad (4.2.7)$$

В этом случае точку  $z_0$  называют *нулем  $n$ -го порядка* функции  $f(z)$ , а при  $n=1$  (случай (4.2.6)) – *простым нулем*. Итак (см. (4.2.1)), если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \text{ но } f^{(n)}(z_0) \neq 0,$$

то  $z = z_0$  является нулем  $n$ -го порядка для  $f(z)$ .

7°. **Т е о р е м а.** Пусть  $f(z)$  аналитична в точке  $z_0$ . Эта точка является нулем  $n$ -го порядка для  $f(z)$  тогда и только тогда, когда существует аналитическая (в точке  $z_0$ ) функция  $\varphi(z)$ , такая, что  $\varphi(z_0) \neq 0$  и

$$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z). \quad (4.2.8)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $z_0$  – нуль  $n$ -го порядка, то согласно (4.2.7)

$$f(z) = (z-z_0)^n (C_n + C_{n+1}(z-z_0) + \dots), \quad (4.2.9)$$

причем степенной ряд

$$C_n + C_{n+1}(z-z_0) + \dots$$

служит остатком для (4.2.2), а значит имеет тот же круг сходимости. Следовательно, его сумма  $\varphi(z)$  аналитична в указанном круге, причем

$$\varphi(z_0) = C_n + 0 + 0 + \dots = C_n \neq 0.$$

Тогда равенство (4.2.9) принимает вид (4.2.8), где  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Докажем обратное утверждение. Пусть  $f(z)$  представима в виде (4.2.8), где  $\varphi(z)$  аналитична в точке  $z_0$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Разложим  $\varphi(z)$  в ряд (4.2.2) в окрестности точки  $z_0$ :

$$\varphi(z) = \tilde{C}_0 + \tilde{C}_1(z-z_0) + \dots, \text{ где } \tilde{C}_0 \neq 0 \text{ (так как } \varphi(z_0) \neq 0 \text{)}.$$

В силу (4.2.8) в указанной окрестности

$$f(z) = \tilde{C}_0(z-z_0)^n + \tilde{C}_1(z-z_0)^{n+1} + \dots; \quad \tilde{C}_0 \neq 0.$$

Следовательно,  $f(z)$  имеет разложение вида (4.2.7). Переобозначив коэффициенты в виде  $C_n = \tilde{C}_0$ ,  $C_{n+1} = \tilde{C}_1$ , ..., получаем (4.2.7), где  $C_n \neq 0$ , т.е.  $z_0$  оказалась нулем  $n$ -го порядка для  $f(z)$ , что и есть обратное утверждение. Теорема полностью доказана.

8°. **П р и м е р.** Найти нули функции

$$f(z) = (z^2 + 1)^3 e^{-\pi z}.$$

**Р е ш е н и е.** Так как

$$z^2 + 1 = z^2 - (i)^2 = (z-i)(z+i),$$

то

$$f(z) = (z-i)^3 \left( (z+i)^3 e^{-\pi z} \right)$$

и в то же время

$$f(z) = (z+i)^3 \left( (z-i)^3 e^{-\pi z} \right).$$

В первом случае  $z_0 = i$  является нулем 3-го порядка для  $f(z)$ , поскольку при  $\varphi(z) = (z+i)^3 e^{-\pi z}$  имеем:

$$\varphi(i) = (2i)^3 e^{-\pi i} = -8i (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = 8i \neq 0.$$

Во втором случае имеем  $z_0 = -i$  нулем 3-го порядка для  $f(z)$ . Здесь

$$\varphi(z) = (z-i)^3 e^{-\pi z}$$

и

$$\varphi(-i) = (-2i)^3 e^{\pi i} = -8i \neq 0.$$

Итак,  $f(z)$  имеет нулями 3-го порядка точки  $i$  и  $-i$ .

### 4.3. РЯД ЛОРАНА

1<sup>0</sup>. Рассмотрим ряд вида

$$\begin{aligned} \dots + \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots \\ + C_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

содержащий как неотрицательные, так и отрицательные степени разности  $z-z_0$ ,  $z \neq z_0$ . Если (4.3.1) записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \quad (4.3.2)$$

то первый из рядов можно рассматривать как степенной:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} w^n, \text{ где } w = \frac{1}{z-z_0}.$$

В своем круге сходимости  $|w| < R$ ,  $R \neq 0$ , его сумма есть некоторая однозначная аналитическая функция  $\varphi(w) = \varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ .

Будучи суперпозицией аналитических функций,  $\varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$  как функция от  $z$  (где  $z \neq z_0$ ) также аналитична при  $|w| = \frac{1}{|z-z_0|} < R$ . Итак, для  $|z-z_0| > \frac{1}{R}$ , имеем:  $\varphi$  аналитична во "внешности" круга  $\bar{U}(z_0; R_1)$ ; не исключен и случай  $R_1 = 0$  (если  $R = \infty$ ). Точно так же, второй ряд в (4.3.2) сходится при  $|z-z_0| < R_2$  с некоторым  $R_2$ ; пусть  $R_2 > 0$ . Сумма этого ряда есть некоторая (аналитическая в этом круге) функция  $\psi(z)$ .

Если  $R_1 < R_2$ , то существует общая область, в которой сходятся оба ряда в (4.3.2), т.е. оказывается, что (4.3.1) имеет областью сходимости некоторое кольцо с центром в точке  $z_0$ :  $R_1 < |z-z_0| < R_2$  (рис. 4.3.1); функция

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \psi(z).$$

Теперь возникает обратная задача: пусть  $f(z)$  однозначна и аналитична в некотором кольце  $R_1 < |z-z_0| < R_2$ . Можно ли ее разложить в степенной ряд вида (4.3.1) и, если можно, то каковы коэффициенты этого ряда?

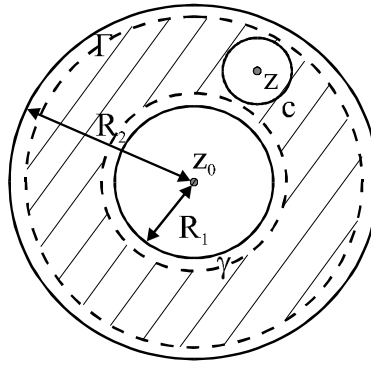


Рис. 4.3.1

3°. Рассуждения, приводящие к разложению  $f(z)$  в ряд (4.3.1), будут носить тот же характер, что в параграфе 4.2. Проведем внутри кольца окружности  $\gamma$  и  $\Gamma$  с центром в точке  $z_0$  так, чтобы  $z$  оказалась внутренней точкой в новом кольце (т.е. между  $\gamma$  и  $\Gamma$ ); пусть  $c$  – окружность (с центром в точке  $z$ ) столь малого радиуса, что также расположена между  $\gamma$  и  $\Gamma$ . Теперь по теореме Коши для многосвязной области (ограниченной  $c$ ,  $\gamma$  и  $\Gamma$ ) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds,$$

если теорему применить к аналитической функции  $\frac{f(s)}{s-z}$ .

По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)}{s-z} ds = f(z),$$

следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds - \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds \right). \quad (4.3.3)$$

Представим дробь  $\frac{1}{s-z}$  на окружности  $\Gamma$  в виде

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} = \frac{1}{s-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n,$$

так как при  $q = \frac{z-z_0}{s-z_0}$  имеем на  $\Gamma$   $|q| < 1$ , а значит

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Подобным образом на  $\gamma$ :

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z-z_0} \left( -\frac{1}{1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}} \right) = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{s-z_0}{z-z_0} \right)^m,$$

так как  $q = \frac{s-z_0}{z-z_0}$  обладает свойством  $|q| < 1$  на  $\gamma$ .

Почленно интегрируя в (4.3.3) полученные ряды (обоснование почленного интегрирования было приведено в параграфе 4.2), получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \right) \cdot (z-z_0)^n +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{-m}} ds \right) \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}. \quad (4.3.4)$$

Если во второй сумме изменить нумерацию по формуле  $n = m + 1$  и обозначить

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{n+1}} ds; \quad C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{-n+1}} ds,$$

то приходим к доказываемому разложению вида (4.3.2). При вычислениях  $C_n$  контуром интегрирования (согласно теореме Коши для двусвязной области) может быть выбрана любая окружность  $\ell$  (с центром в точке  $z_0$ ), расположенная целиком в данном кольце (вместо ранее рассмотренных контуров  $\gamma$  и  $\Gamma$ ).

Итак, согласно (4.3.4)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad (4.3.5)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{n+1}} ds; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3.6)$$

4°. Поставленная задача решена:  $f(z)$ , аналитичная в указанном кольце, может быть представлена в виде суммы ряда (4.3.5), называемой *рядом Лорана*; коэффициенты ряда вычисляются по формулам (4.3.6).

Впрочем, иногда можно применить другие, более простые приемы. Продемонстрируем их на примерах.

5°. **Пример 1.** Функцию  $f(z) = \frac{1}{z+2}$  разложить в ряд по степеням  $(z-1)$ .

**Решение.** Центром кольца (или колец), в которых будет происходить разложение, должна быть, согласно условию, точка  $z_0 = 1$ . Особой точкой является  $z_1 = -2$ , лежащая на окружности с центром  $z_0$  радиуса  $R = 3$  (см. рис. 4.3.1), т.е. на окружности  $|z-1| = 3$ .

Следовательно, предстоит вести рассмотрение для  $|z-1| < 3$  и  $|z-1| > 3$  отдельно. В каждом случае воспользуемся суммой бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - \dots + (-1)^n q^n + \dots; \quad |q| < 1.$$

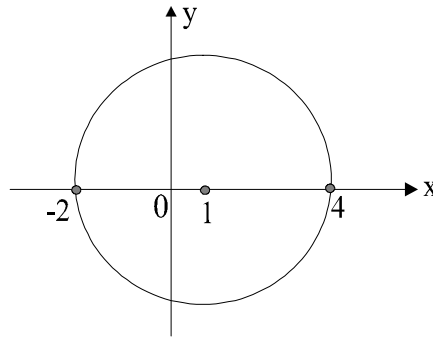


Рис. 4.3.1

В первом случае представим

$$f(z) = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}.$$

Здесь  $|q| = \left| \frac{z-1}{3} \right| < 1$  для  $|z-1| < 3$ ; следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{3} \cdot \left( 1 - \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{3^2} - \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^n} + \dots \right).$$

Во втором случае

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}$$

для  $|q| = \left| \frac{3}{z-1} \right| < 1$  (а это верно при  $|z-1| > 3$ ) имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \left( 1 - \frac{3}{z-1} + \frac{3^2}{(z-1)^2} - \dots + (-1)^n \frac{3^n}{(z-1)^n} + \dots \right).$$

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{3} - \frac{z-1}{3^2} + \frac{(z-1)^2}{3^3} - \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}} + \dots \quad \text{в круге } |z-1| < 3;$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{3^2}{(z-1)^3} - \dots + (-1)^n \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \dots \quad \text{для } |z-1| > 3.$$

**Пример 2.**  $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z}$  разложить по степеням  $z$ .

**Решение.** Функция  $f(z)$  аналитична при всех  $z \neq 0$ , т.е. для  $|z| > 0$ . В этой области воспользуемся разложением Маклорена функции  $\cos w$  (см. (2.5.3)) при  $w = \frac{1}{z}$ :

$$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{2n}} + \dots$$

Почленно умножая на  $z^3$ , получаем разложение

$$f(z) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!z} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{2n-3}} + \dots; \quad |z| > 0.$$

#### 4.4. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

1°. Особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$ , т.е. точка, в которой  $f(z)$  не аналитична, называется *изолированной*, если в некоторой окрестности  $z_0$  не существует других особых точек для  $f(z)$ . Другими словами,  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности точки  $z_0$ , но не в самой этой точке.

Окрестностью точки  $z_0$  служит "кольцо" вида  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ , для которого  $R_1 = 0$ . Разложение Лорана  $f(z)$  в этом "кольце" называем *рядом Лорана в окрестности данной изолированной особой точки*.

Будем называть ряд

$$C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots \quad (4.4.1)$$

*правильной* частью, а ряд

$$\frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots \quad (4.4.2)$$

— *главной* частью ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \quad (4.4.3)$$

Возможны также случаи:

а) Ряд Лорана (4.4.3) состоит из своей правильной части, т.е.

$$C_{-1} = C_{-2} = \dots = C_{-n} = \dots = 0.$$

Тогда точку  $z_0$  называем *устранимой* особой точкой (из дальнейших рассуждений станет ясно, почему выбран такой термин).

б) Главная часть ряда Лорана содержит только конечное число ненулевых членов, например, она имеет вид

$$\frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad \text{т.е. } C_{-(n+1)} = C_{-(n+2)} = \dots = 0.$$

В этом случае точку  $z_0$  называем *полюсом  $n$ -го порядка*; в частности, при  $n=1$  — *простым полюсом*.

в) если главная часть (4.4.2) имеет бесконечное количество ненулевых членов, то точка  $z_0$  называется *существенно особой*.

2°. Рассмотрим случай а). Имеет место

**Т е о р е м а 1.** Если в некоторой окрестности особой точки  $z_0$  функция  $f(z)$  ограничена, т.е. существует постоянная  $M$ , такая, что  $|f(z)| < M$  во всех точках этой окрестности, то  $z_0$  – устранимая особая точка.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточно доказать, что  $C_{-n} = 0$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ . Имеем согласно (4.3.6) для произвольной окружности  $\ell$  с центром в точке  $z_0$  радиуса  $\rho$  (столь малого, что окружность  $\ell$  целиком расположена в указанной окрестности), что

$$|C_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{\rho^{-n+1}} \cdot 2\pi\rho = M\rho^n,$$

если повторить рассуждения п. 5<sup>0</sup> параграфа 3.9. В силу произвольной малости  $\rho$  все  $C_{-n} = 0$ , что и утверждалось.

Итак, в окрестности устранимой особой точки  $z_0$

$$f(z) = C_0 + C_1(z-z_0) + \dots + C_n(z-z_0)^n + \dots \quad (4.4.4)$$

Если в точке  $z_0$  доопределить функцию  $f(z)$  суммой этого ряда при  $z = z_0$ , т.е. положить  $f(z_0) = C_0$ , то (4.4.4) как сумма степенного ряда в круге  $|z-z_0| < R$  будет аналитична (в том числе, аналитична и в точке  $z_0$ ). Тем самым мы как бы устранили "особенность" в точке  $z_0$ , сделав эту точку правильной.

Например, при  $z \neq 0$  из соотношения (2.5.2) получаем

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots,$$

т.е. точка  $z = 0$  является особой и устранимой. Достаточно положить  $\frac{\sin z}{z} = 1$  при  $z = 0$ , чтобы эта точка стала правильной.

3<sup>0</sup>. Рассмотрим случай б).

**Т е о р е м а 2.** Точка  $z_0$  тогда и только тогда является полюсом  $n$ -го порядка, когда существует аналитическая в точке  $z_0$  функция  $\varphi(z)$ , такая что  $\varphi(z_0) \neq 0$  и

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}. \quad (4.4.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $z_0$  – полюс  $n$ -го порядка, тогда (по определению)

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad C_{-n} \neq 0;$$

другими словами,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \left( C_{-n} + (z-z_0)C_{-n+1} + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \right. \\ \left. + (z-z_0)^n \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \right). \quad (4.4.6)$$

По условию (так как  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  аналитична), правильная часть ряда Лорана – сходящийся (в окрестности точки  $z_0$ ) степенной ряд, сумму которого можно считать аналитичной и в точке  $z_0$ , доопределив ее значением  $C_0$  (см. п. 2<sup>0</sup>). Следовательно, сумма, записанная в скобках в (4.4.6), – это некоторая аналитическая функция  $\varphi(z)$ , т.е. мы пришли к (4.4.5); при этом  $\varphi(z_0) = C_{-n} \neq 0$ .

Обратно, пусть  $f(z)$  имеет вид (4.4.5) и  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Разложив  $\varphi(z)$  в ряд вида (4.2.2), имеем

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \{ C_0 + C_1(z-z_0) + \dots + C_n(z-z_0)^n + C_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots \} = \\ = \frac{C_0}{(z-z_0)^n} + \frac{C_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + C_n + C_{n+1}(z-z_0) + \dots,$$

где  $C_0 = \varphi(z_0) \neq 0$ . Таким образом, в полученном разложении Лорана коэффициент  $C_0$  перед  $\frac{1}{(z-z_0)^n}$  отличен от нуля, т.е.

$z_0$  оказывается полюсом  $n$ -го порядка. Теорема полностью доказана.

Согласно (4.4.5),  $z = z_0$  – полюс  $n$ -го порядка для  $f(z)$  тогда и только тогда, когда эта точка является нулем  $n$ -го порядка для функции  $\frac{1}{f(z)}$ .

**Т е о р е м а 3.** Точка  $z = z_0$  является полюсом ( $n$ -го порядка) функции  $f(z)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно формуле (4.4.5) в точке  $z_0$ , являющейся полюсом  $n$ -го порядка

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\varphi(z)|}{|z - z_0|^n} = +\infty,$$

так как  $\varphi(z_0)$  существует в силу аналитичности  $\varphi$  в точке  $z_0$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Обратно, если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty, \text{ то } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0,$$

а тогда точка  $z_0$  являются нулем (некоторого  $n$ -го порядка) для

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}, \text{ т.е. } (z - z_0)^n \varphi(z) = \frac{1}{f(z)},$$

где  $\varphi(z)$  аналитична в точке  $z_0$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$  (см. соотношение (4.2.8)).

Теперь

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z) (z - z_0)^n},$$

где  $\frac{1}{\varphi(z)}$  аналитична в точке  $z_0$  так как  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Следовательно,  $f(z)$  имеем вид (4.4.5), а тогда, по теореме 2,  $z = z_0$  – полюс  $n$ -го порядка. Теорема 3 доказана.

4<sup>0</sup>. Рассмотрим, наконец, случай в) существенно особой точки  $z = z_0$ . Поведение  $f(z)$  в ее окрестности описывается следующей теоремой Сохоцкого-Вейерштрасса.

**Т е о р е м а 4.** Для любого  $\varepsilon > 0$  и любого комплексного числа  $B$  в каждой окрестности точки  $z_0$  найдется хотя бы одна точка  $z$ , такая что

$$|f(z) - B| < \varepsilon.$$

Смысл теоремы состоит в том, что в достаточно малых окрестностях существенно особой точки  $f(z)$  может принять значение, сколь угодно близкое к наперед заданному произвольному числу  $B$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим противное: для заданных  $B$  и  $\varepsilon > 0$  найдется такая окрестность  $U$  точки  $z_0$ , что

$$|f(z) - B| \geq \varepsilon \text{ при всех } z \in U.$$

Но тогда функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - B} \quad (4.4.7)$$

определена и ограничена в указанной окрестности точки  $z_0$ , так как

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - B|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, согласно теореме 1, точка  $z_0$  является устранимой особой точкой для  $g(z)$ . Тогда при  $z \neq z_0$   $g(z)$  есть сумма степенного ряда (4.4.4), т.е. равна некоторой аналитической функции. При этом не исключено, что первые несколько коэффициентов  $C_0, C_1, \dots$  в (4.4.4) равны нулю, т.е.

$$g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \text{ при некотором } m = 0, 1, \dots; \varphi(z_0) \neq 0.$$

Согласно определению (4.4.7)

$$f(z) = B + \frac{1}{g(z)} = B + \frac{1}{(z - z_0)^m \varphi(z)}. \quad (4.4.8)$$

Функция  $\frac{1}{\varphi(z)}$  является аналитичной в окрестности точки  $z_0$ . Действительно, вместе с  $\varphi(z_0) \neq 0$  все значения  $\varphi(z)$  из достаточно малой окрестности  $z_0$  остаются ненулевыми, поскольку  $\varphi(z)$  аналитична, а значит и непрерывна в этой окрестности. Согласно соотношению (4.4.8) для  $m=0$   $f(z)$  ограничена в окрестности точки  $z_0$ , т.е.  $z_0$  – устранимая особая точка; для  $m \neq 0$  (4.4.8) означает, что  $z_0$  – полюс  $m$ -го порядка. В обоих случаях получаем противоречие с условием теоремы.

Значит, утверждение теоремы 4 установлено.

В иной форме теорема Сохоцкого-Вейерштрасса звучит так: если  $z_0$  – существенно – особая точка функции  $f(z)$ , то для любого комплексного числа  $B$  найдется последовательность точек  $z_k$ , такая, что  $z_k \rightarrow z_0$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = B.$$

Найдется также и последовательность  $z_k \rightarrow z_0$ , такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(z_k)| = +\infty.$$

5<sup>0</sup>. П р и м е р. Определить характер каждой особой точки функции:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^3}; \text{ б) } f(z) = \operatorname{tg} z; \text{ в) } f(z) = \frac{1}{e^z - e}; \text{ г) } f(z) = \ln \frac{z+1}{z}.$$

Р е ш е н и е. а) Запишем  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - (2i)^2)^3} = \frac{z}{(z-2i)^3(z+2i)^3}.$$

Изолированными особыми точками являются  $z_1 = 2i$  и  $z_2 = -2i$ . Рассмотрим случай  $z_1$ :

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)^3} \cdot \frac{z}{(z+2i)^3} = \frac{\varphi(z)}{(z-2i)^3}, \text{ где } \varphi(z) = \frac{z}{(z+2i)^3}.$$

В точке  $z_1 = 2i$  функция  $\varphi(z)$  аналитична, при этом  $\varphi(z_1) = \frac{2i}{(4i)^3} = -\frac{1}{32} \neq 0$ . Теперь, согласно теореме 2 (см. (4.4.5)) видим, что  $z_1 = 2i$  – полюс третьего порядка.

Аналогично,

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^3} \cdot \psi(z), \text{ где } \psi(z) = \frac{z}{(z-2i)^3}$$

– аналитична в точке  $z_2 = -2i$  и  $\psi(-2i) \neq 0$ ; таким образом и точка  $z_2 = -2i$  – полюс третьего порядка.

б)  $f(z) = \operatorname{tg} z$  достаточно рассмотреть при  $|z| \leq \pi$  в силу периодичности тангенса. Поскольку  $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ , и  $\cos z = 0$

при  $z = \pm \frac{\pi}{2}$ , то следует определить "кратность" указанных нулей. Так как  $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ , то согласно разложению (2.5.2) имеем

$$\begin{aligned} \cos z &= \left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - z\right) \cdot \varphi(z), \text{ где } \varphi(z) = 1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{2} - z\right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

при этом  $\varphi(z)$  аналитична для  $z_0 = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi(z_0) = 1 \neq 0$ .

Значит,

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} \cdot \frac{\sin z}{\varphi(z)}, \text{ где } \psi(z_0) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

для аналитической в точке  $z_0 = \frac{\pi}{2}$  функции  $\psi(z) = \frac{\sin z}{\varphi(z)}$ , так что  $\operatorname{tg} z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} \psi(z)$ .

В силу (4.4.5)  $z = \frac{\pi}{2}$  является простым полюсом для  $f(z)$ ; точно так же, из представления  $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$  получаем, что  $z = -\frac{\pi}{2}$  – простой полюс. С учетом периодичности  $f(z)$  (период  $T = \pi$ ) все точки вида  $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – простые полюсы для  $f(z) = \operatorname{tg} z$ .

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{e^{z-1} - 1}, \text{ где согласно (2.5.1)}$$

$$e^{z-1} - 1 = \left(1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(z-1)^n}{n!} + \dots\right) - 1 = (z-1) \left(1 + \frac{z-1}{2!} + \dots\right);$$

из этого представления вытекает, что

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-1},$$

где  $\varphi(z) = \frac{1}{e\left(1 + \frac{z-1}{2!} + \dots\right)}$  – аналитична в точке  $z = 1$  и  $\varphi(1) = \frac{1}{e} \neq 0$ . Следовательно,  $z = 1$  – простой полюс функции  $f(z)$ .

г) Запишем  $f(z)$  в виде  $f(z) = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$ . Воспользовавшись разложением Маклорена (п. 5<sup>0</sup> параграфа 4.2) логарифмической функции для аргумента  $\frac{1}{z}$  (вместо  $z$ ) имеем

$$\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)z^{n+1}} + \dots$$

Теперь мы видим, что  $z = 0$  – существенно особая точка для  $f(z)$ .

6<sup>0</sup>. В связи с возможностью представления функций степенными рядами выделяют классы целых и мероморфных функций.

Рассмотрим функцию  $f(z)$ , однозначную и аналитическую в любой окрестности нуля. Как нам известно (параграф 4.2), ее можно представить в виде суммы ряда по целым неотрицательным степеням  $z$ . Возможны случаи:

а) коэффициенты ряда (4.2.2)  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = \dots = 0$ , значения  $f(z)$  при всех  $z$  совпадают с  $C_0$ ; в этом случае  $f(z) \equiv \operatorname{const}$ ;

б) среди коэффициентов ряда (4.2.2) – лишь конечное число ненулевых; в этом случае  $f(z)$  есть многочлен  $P_n(z)$  не-  
которой степени  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

в) среди коэффициентов ряда (4.2.2) – бесконечное множество отличных от нуля чисел; в этом случае  $f(z)$  называют *целой трансцендентной функцией*.

Ясно, что случай а) соответствует тому, что для  $f(1/z)$  точка  $z = 0$  является устранимой особой точкой, случай б) – тому что для  $f(1/z)$  эта точка есть полюс  $n$ -го порядка; в случае в) имеем дело с существенно особой точкой.

Если функцию  $f(z)$  можно представить в виде частного двух целых функций

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

(где  $\psi(z)$  не равна нулю тождественно), то  $f(z)$  называется *мероморфной функцией*. В частности, мероморфными являются функции целые (случай  $\psi(z) \equiv 1$ ) и рациональные (частные двух многочленов).

Особыми точками мероморфной функцией  $f(z)$  могут быть, очевидно, только нули функции  $\psi(z)$ , которые оказываются полюсами для  $f(z)$ ; число полюсов может оказаться и бесконечным: так, например, функция  $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$  имеет полюсами все нули функции  $\cos z$ , количество которых бесконечно.

Можно доказать, что мероморфная функция, обладающая конечным количеством полюсов, представима в виде суммы целой и рациональной функций.

#### 4.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1<sup>0</sup>. Разложить данную функцию  $f(z)$  в ряд Тейлора в окрестности данной точки  $z_0$ , пользуясь стандартными разложениями:

$$\text{а) } f(z) = (z+2)e^z; \quad z_0 = -2;$$

б)  $f(z) = \sin z$ ;  $z_0 = \frac{\pi}{4}$ ;

в)  $f(z) = \ln(z+2)$ ;  $z_0 = -1$ .

2<sup>0</sup>. Найти нули функции и определить порядок каждого из них:

а)  $f(z) = (z^2 + 9)^2 (z^4 - 1)$ ; б)  $f(z) = (1 - e^z)z^2$ ;

в)  $f(z) = \sin z \cos z$ ; г)  $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}$ .

3<sup>0</sup>. Разложить в ряд Лорана данную функцию  $f(z)$  в окрестности данной точки  $z_0$ :

а)  $f(z) = \frac{1}{z+6}$ ;  $z_0 = 4$ ; б)  $f(z) = \frac{1}{i-z}$ ;  $z_0 = 2i$ ;

в)  $f(z) = \sin \frac{\pi}{z-1}$ ;  $z_0 = 1$ ; г)  $f(z) = z^3 \ln \frac{2z-1}{2z}$ ;  $z_0 = 0$ ;

д)  $f(z) = (z+1)^3 \cos \frac{1}{z+1}$ ;  $z_0 = -1$ .

4<sup>0</sup>. Найти изолированные особые точки данных функций и указать их характер (для полюсов – указать их порядок):

а)  $f(z) = \frac{1}{\sin 2z}$ ; б)  $f(z) = e^{\frac{1}{i+z}}$ ; в)  $f(z) = \frac{z+3}{(z^2 + iz)^3}$ ;

г)  $f(z) = \frac{\pi}{1 - \cos z}$ ; д)  $f(z) = \frac{z}{(z^2 + i)^4}$ .

### 5.1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ

1°. Пусть  $z = z_0$  – *правильная или изолированная особая точка* однозначной функции  $f(z)$ . Тогда  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Выберем произвольную окружность  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$ , целиком расположенную в указанной окрестности и направление обхода против часовой стрелки на  $\gamma$ .

Величину

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad (5.1.1)$$

назовем *вычетом* функции  $f(z)$  относительно точки  $z_0$  и обозначим в виде  $\text{Выч}[f(z); z_0]$ . При сформулированных условиях интеграл (5.1.1) существует и, в силу теоремы Коши для многосвязной (именно, двусвязной) области (см. (3.7.3)), не зависит от выбора контура интегрирования  $\gamma$ , расположенного в указанной окрестности точки  $z_0$ .

2°. В разложении  $f(z)$  в окрестности  $z_0$  в ряд Лорана

$$C_{-1} = \text{Выч}[f(z); z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Тогда для правильной или устранимой особой точки  $z_0$  имеем всегда  $\text{Выч}[f(z); z_0] = 0$ . Обратное, вообще говоря, неверно, так как в случае полюса или существенно особой точки  $z_0$  может оказаться  $C_{-1} \neq 0$ .

3°. **Пример 1.** Найти  $\text{Выч}\left[z \cos \frac{1}{z^2}; 0\right]$ .

*Решение.* Используем разложение (2.5.3), взяв в качестве аргумента  $\frac{1}{z^2}$ :

$$\cos \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{4!z^8} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{4n}} + \dots,$$

тогда в окрестности точки  $z_0 = 0$

$$z \cos \frac{1}{z^2} = z - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z^7} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{4n-1}} + \dots$$

Теперь мы видим, что  $z_0 = 0$  – существенно особая точка данной функции, но член, содержащий  $\frac{1}{z}$  (случай  $n = -1$ ) в ее разложении отсутствует, т.е.  $C_{-1} = 0$ . Значит, искомый вычет равен нулю.

**Пример 2.** Найти  $\text{Выч}\left[\frac{1}{z+i}; i\right]$ .

*Решение.* Так как в точке  $z_0 = i$  функция  $f(z) = \frac{1}{z+i}$  – аналитична, ( $f(i) = \frac{1}{2i}$  и в круге  $|z-i| < 2$  не содержится особых точек для  $f(z)$ ; читателю рекомендуется сделать рисунок), то искомый вычет равен нулю.

4°. Пусть  $\Gamma$  – замкнутый контур, гладкий или кусочно-гладкий, обходимый против часовой стрелки и ограничивающий односвязную область  $D$ , а функция  $f(z)$  однозначна и аналитична на  $\Gamma$ , а также в области  $D$  за исключением  $n$  изолированных особых точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Следующий результат называется *основной теоремой о вычетах*.

**Т е о р е м а.** Имеет место равенство:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}[f(z); z_k].$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим  $n$  окружностей  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) с центрами в особых точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  столь малых радиусов, что каждый из полученных кругов содержит ровно одну особую точку (свой центр). Обход на каждой из них выбирается против часовой стрелки (рис. 5.1.1). В силу теоремы Коши для составного контура имеем

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$$

или

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}[f(z); z_k],$$

что и утверждалось.

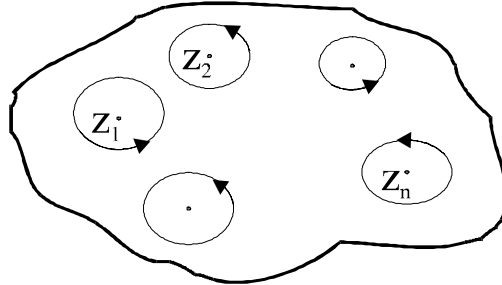


Рис. 5.1.1

## 5.2. ВЫЧЕТ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛЮСА

1°. Пусть  $z = z_0$  — *простой полюс*. Докажем, что

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (5.2.1)$$

Так как в окрестности точки  $z_0$

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z),$$

где  $\varphi(z)$  — сумма степенного ряда, являющегося правильной частью ряда Лорана, то

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = C_{-1} = (z - z_0) f(z) - (z - z_0) \varphi(z). \quad (5.2.2)$$

При этом предел  $\varphi(z)$  при  $z \rightarrow z_0$  существует (именно, он равен  $\varphi(z_0)$ ), так как  $\varphi(z)$  как сумма степенного ряда аналитична, а значит и непрерывна в точке  $z_0$ . Но тогда

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \lim_{z \rightarrow z_0} C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \varphi(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) - 0 \cdot \varphi(z_0). \end{aligned}$$

Согласно (5.2.2) теперь получаем формулу (5.2.1).

2°. Если  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  аналитичны в точке  $z_0$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$  и  $z_0$  является *нулем первого порядка* для  $\psi(z)$ , то имеет место соотношение

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (5.2.3)$$

Действительно, согласно формуле (5.2.1)

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}}, \quad (5.2.4)$$

поскольку  $\psi(z_0) = 0$ . Предел числителя дроби в (5.2.4) равен  $\varphi(z_0)$ , предел знаменателя

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \psi'(z_0)$$

по определению производной. Следовательно,

$$\text{Выч} [f(z); z_0] = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

что и утверждалось.

3<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Найти Выч  $[\text{ctg} z; 0]$ .

*Р е ш е н и е.* Так как  $\text{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$  и точка  $z = 0$  – простой полюс для  $\sin z$ , причем  $\cos 0 = 1$ , то по формуле (5.2.3) имеем

$$\text{Выч} [\text{ctg} z; 0] = \frac{\cos z}{(\sin z)'} \Big|_{z=0} = \frac{\cos z}{\cos z} \Big|_{z=0} = 1.$$

П р и м е р 2. Вычислить

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 16} dz,$$

где  $\gamma$  – окружность  $|z| = 5$ , обходимая против часовой стрелки.

*Р е ш е н и е.* Так как функция  $e^{\pi z}$  аналитична при всех  $z$ ,

$$z^2 + 16 = (z - 4i)(z + 4i),$$

то

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z - 4i)(z + 4i)}$$

имеет два простых полюса в круге  $|z| \leq 5$ :  $z_1 = 4i$ ,  $z_2 = -4i$ . Мы намерены использовать основную теорему о вычетах, поэтому определяем (на основании (5.2.3))

$$\begin{aligned} \text{Выч} [f(z), 4i] &= \text{Выч} \left[ \frac{e^{\pi z}}{z + 4i}, 4i \right] = \frac{e^{\pi z}}{(z + 4i)'} \Big|_{z=4i} = \frac{e^{\pi z}}{z + 4i} \Big|_{z=4i} = \\ &= \frac{e^{4\pi i}}{8i} = \frac{1}{8} \cdot \frac{i}{i^2} (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = -\frac{i}{8}; \\ \text{Выч} [f(z), -4i] &= \text{Выч} \left[ \frac{e^{\pi z}}{z - 4i}, -4i \right] = \frac{e^{\pi z}}{(z - 4i)'} \Big|_{z=-4i} = -\frac{1}{8i} e^{-4\pi i} = \frac{i}{8}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 16} dz = 2\pi i (\text{Выч} [f(z), 4i] + \text{Выч} [f(z), -4i]) = 2\pi i \left( -\frac{i}{8} + \frac{i}{8} \right) = 0.$$

4<sup>0</sup>. Рассуждения, использовавшие в п. 1<sup>0</sup>, можно применить и для нахождения вычета функции  $f(z)$ , аналитичной в окрестности точки  $z_0$ , относительно полюса  $n$ -го порядка  $z = z_0$ . В окрестности этой точки

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{C_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z),$$

где сумма  $\varphi(z)$  правильной части ряда Лорана является аналитической в точке  $z_0$ . Умножив обе части последнего равенства на  $(z - z_0)^n$ , имеем

$$\begin{aligned} (z - z_0)^n f(z) &= C_{-n} + C_{-(n-1)}(z - z_0) + \dots + C_{-2}(z - z_0)^{n-2} + \\ &\quad + C_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \varphi(z) \cdot (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

При  $z \neq z_0$  в указанной окрестности точки  $z_0$  равны между собой и производные обеих частей равенства:

$$\begin{aligned} \left( (z - z_0)^n f(z) \right)' &= C_{-(n-1)} + \dots + C_{-2}(n-2)(z - z_0)^{n-3} + \\ &\quad + C_{-1}(n-1)(z - z_0)^{n-2} + \left( \varphi(z) (z - z_0)^n \right)'. \end{aligned}$$

Дифференцируя второй, третий, ..., и наконец,  $(n-1)$  раз, получаем, что коэффициент перед  $C_{-1}$  становится равным  $(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1 = (n-1)!$ , а остальные члены, содержавшие множители  $(z-z_0)^k$ ,  $k=1, 2, \dots, n-2$  в равенстве (5.2.5), обращаются в ноль, так как  $k < n-1$ . Следовательно,

$$\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)} = 0 + (n-1)!C_{-1} + \left(\varphi(z)(z-z_0)^n\right)^{(n-1)}. \quad (5.2.6)$$

Последнее слагаемое содержит множитель  $(z-z_0)^n$ , поэтому дифференцирование  $(n-1)$  раз члена  $\varphi(z)(z-z_0)^n$  превратит его в сумму произведений, каждое из которых содержит множитель  $(z-z_0)^k$ ,  $k=1, \dots, n$ . Если теперь перейти к пределу при  $z \rightarrow z_0$  в (5.2.6), то, согласно последнему рассуждению, имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\varphi(z) \cdot (z-z_0)^n\right)^{(n-1)} = 0,$$

а тогда из равенства (5.2.6) получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)} = (n-1)!C_{-1},$$

откуда

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)}. \quad (5.2.7)$$

Формулу (5.2.7) можно рассматривать как обобщение (5.2.1) на случай полюса  $n$ -го порядка,  $n=2, 3, \dots$

5°. П р и м е р. Найти  $\text{Выч}\left[\left(\frac{z-i}{z^2-1}\right)^3; -1\right]$ .

Р е ш е н и е. Имеем

$$f(z) = \frac{(z-i)^3}{(z-1)^3(z+1)^3},$$

поэтому точка  $z_0 = -1$  является полюсом 3-го порядка. По формуле (5.2.7) получаем при  $n=3$ :

$$\begin{aligned} \text{Выч}\left[\left(\frac{z-i}{z^2-1}\right)^3, -1\right] &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1)^3 \cdot \frac{(z-i)^3}{(z-1)^3(z+1)^3}\right)'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z-i)^3}{(z-1)^3}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\left(\frac{(z-i)^3}{(z-1)^3}\right)'\right)' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{3(z-i)^2(z-1)^3 - 3(z-i)^3(z-1)^2}{(z-1)^6}\right)' = \\ &= \frac{3}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z-i)^2(z-1)^2(z-1-z+i)}{(z-1)^6}\right)' = \\ &= \frac{3(i-1)}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z-i)^2}{(z-1)^4}\right)' = \frac{3(i-1)}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2(z-i)(z-1)^4 - 4(z-i)^2(z-1)^3}{(z-1)^8} = \\ &= 3(i-1) \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z-i)(-z-1+2i)}{(z-1)^5} = 3(i-1) \cdot \frac{-(1+i) \cdot 2i}{-32} = -\frac{3}{8}i. \end{aligned}$$

6°. Рассмотрим функцию  $f(z)$ , аналитическую в односвязной области  $D$  и простой замкнутый контур  $L$ , гладкий или кусочно-гладкий, целиком расположенный в  $D$ , в каждой точке которого  $f(z)$  отлична от нуля. При этих условиях функция  $f(z)$  может иметь внутри лишь конечное число нулей (как оказывается, в противном случае предельная точка множества нулей тогда бы оказалась на контуре  $L$ , что противоречило бы условию  $f(z) \neq 0$  на  $L$ ). Интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (5.2.8)$$

(направление обхода контура – против часовой стрелки) называется *логарифмическим вычетом* функции  $f(z)$  относительно контура  $L$ ; название объясняется тем, что подынтегральная функция в (5.2.8) есть производная от  $\text{Ln } f(z)$ .

Докажем следующее утверждение. Если точка  $a$  – нуль кратности  $k$  функции  $f(z)$ , то  $a$  – простой полюс функции  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  и  $\text{Выч} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)}, a \right] = k$ .

Во-первых, по определению нуля кратности  $k$  имеем  $f(z)$  в виде  $f(z) = (z-a)^k \phi(z)$ ,  $\phi(a) \neq 0$ , а поэтому

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1} \phi(z) + (z-a)^k \phi'(z)}{(z-a)^k \phi(z)} = \frac{k + (z-a) \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}}{z-a},$$

при этом значение числителя последней дроби в точке  $a$  есть число  $k$ . По формуле (5.2.3) вычисления вычета относительно простого полюса имеем значение  $\text{Выч} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)}, a \right]$  равным  $\frac{k}{1}$ , что и утверждалось.

Если теперь интеграл (5.2.8) представить по основной теореме о вычетах, то он окажется равным сумме (состоящей из  $n$  слагаемых) значений всех  $k_i$ , где  $k_i$  есть кратность соответствующего нуля  $z = z_i$  функции  $f(z)$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Итак, число нулей  $N$  функции  $f(z)$  внутри контура  $L$  (с учетом их кратности) есть логарифмический вычет функции относительно этого контура.

7°. Полученный в предыдущем пункте результат

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L d \text{Ln } f(z) = N$$

может быть записан в виде

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \left( \left| \ln f(z) \right| + i \text{Arg } f(z) \right) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_L d \left| \ln f(z) \right| + i \int_L d \text{Arg } f(z) \right). \quad (5.2.9)$$

Первый из слагаемых интегралов (5.2.9) равен нулю (интеграл от дифференциала однозначной действительнзначной функции по замкнутому контуру), а второй – есть приращение (полная вариация) аргумента  $\text{Arg } f(z)$  при обходе точкой  $z$  замкнутого круга  $L$ .

Итак, доказан так называемый *принцип аргумента*: число нулей аналитической функции  $f(z)$  внутри контура  $L$  (с учетом их кратности) равно деленному на  $2\pi$  приращению  $\text{Arg } f(z)$  при обходе точкой  $z$  контура  $L$  против часовой стрелки.

### 5.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1°. Рассмотрим функцию  $f(z)$ , которая однозначна и аналитична в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  за исключением конечного числа изолированных особых точек. Пусть также существуют положительные числа  $M$  и  $R_0$ , такие что вне круга радиуса  $R_0$  с центром в начале координат, т.е. при  $|z| > R_0$ , имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}. \quad (5.3.1)$$

Обозначим через  $\Gamma_R$  полуокружность  $|z| = R$ ,  $\text{Im } z > 0$  в верхней полуплоскости (рис. 5.3.1).

Тогда при сформулированных условиях имеет место равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (5.3.2)$$

Действительно, так как  $|f(z)| < \frac{M}{R^2}$  при  $|z| = R$ ,  $R > R_0$ , в силу соотношения (5.3.1), то

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R}, \quad (5.3.3)$$

где  $\pi R$  – длина рассматриваемой полуокружности.

При  $R \rightarrow +\infty$  правая часть (5.3.3) стремится к нулю, а тогда стремится к нулю и модуль интеграла, содержащегося в (5.3.2). Соотношение (5.3.2) доказано.

2°. Условию (5.3.1) удовлетворяет всякая функция  $f(z)$ , имеющая разложение в ряд Лорана вида

$$f(z) = \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-3}}{z^3} + \dots$$

Действительно, в этом случае

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left( C_{-2} + \frac{C_{-3}}{z} + \dots \right) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad (5.3.4)$$

где  $\varphi(z)$  – сумма ряда, записанного в скобках.

Заметим (опуская аккуратное доказательство), что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = C_{-2}$$

поэтому  $\varphi(z)$  остается ограниченной при  $z \rightarrow \infty$ . Следовательно, из соотношения (5.3.4) будет вытекать оценка (5.3.1), а тогда для рассматриваемых в п. 2<sup>0</sup> функций справедливо утверждение (5.3.2).

3<sup>0</sup>. Утверждение (5.3.2) справедливо также для *рациональных функций* вида

$$f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где  $P_m(z)$  и  $Q_n(z)$  – многочлены соответствующих степеней,  $m \leq n-2$  и  $Q_n(z)$  не имеет нулей на действительной оси.

В самом деле, все полюсы функции  $f(z)$  – это нули многочлена  $Q_n(z)$ , и, следовательно, в верхней полуплоскости их конечное число. Далее, многочлен  $z^2 P_m(z)$  имеет степень  $m+2$ , т.е. степень  $n$  знаменателя дроби остается большей или равной степени  $z^2 P_m(z)$ .

Тогда, вычисляя предел (при  $z \rightarrow \infty$ ) дроби  $\frac{z^2 P_m(z)}{Q_n(z)}$  (путем деления на старшую степень  $z^n$  каждого члена числителя и знаменателя), получаем некоторое число. Следовательно, эта дробь остается ограниченной при  $z \rightarrow \infty$ :

$$\left| \frac{z^2 P_m(z)}{Q_n(z)} \right| \leq M, \text{ откуда } |f(z)| = \left| \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Условие (5.3.1) выполнено, т.е. соотношение (5.3.2) оказывается справедливым также для рассматриваемых рациональных функций.

4<sup>0</sup>. Несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  определим в виде предела

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx, \quad (5.3.5)$$

если указанный предел существует (такое определение называется определением в смысле главного значения).

**Т е о р е м а.** Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_N$  – изолированные особые точки функции  $f(z)$ , расположенные в верхней полуплоскости, при этом  $f(z)$  удовлетворяет условиям п. 1<sup>0</sup> и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл (5.3.5) существует и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k].$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим полуокружность  $\Gamma_R$  столь большого радиуса  $R$ , что все особые точки  $z_1, z_2, \dots, z_N$  расположены внутри  $\Gamma_R$ ; пусть  $R > R_0$  (см. рис. 5.3.1). Пусть  $L_R$  – контур, состоящий из отрезка  $[-R, R]$  оси абсцисс и полуокружности  $\Gamma_R$ ; обход на  $L_R$  выбираем в направлении против часовой стрелки. Тогда

$$\int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \oint_{L_R} f(z) dz,$$

при этом на отрезке  $[-R, R]$  имеем  $z = x + 0 \cdot i$  и  $dz = dx$ , т.е.

$$\int_{-R}^R f(x) dx = - \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \oint_{L_R} f(z) dz. \quad (5.3.6)$$

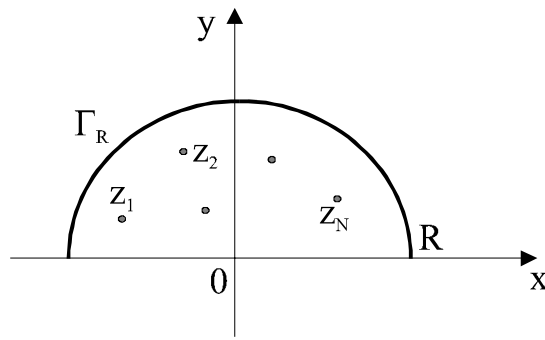


Рис. 5.3.1

Согласно основной теореме о вычетах, применимой к интегралу по  $L_R$ , имеем

$$\oint_{L_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k],$$

тогда соотношение (5.3.6) принимает вид

$$\int_{-R}^R f(x) dx = - \int_{\Gamma_R} f(z) dz + 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k].$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . В силу (5.3.2) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0 + 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k],$$

что и есть утверждение теоремы.

5<sup>0</sup>. Можно доказать также, что для четной  $f(x)$  такой, что  $f(z)$  удовлетворяет условиям п. 1<sup>0</sup>, имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos \mu x dx = \pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[e^{i\mu z} f(z); z_k], \quad (5.3.7)$$

а для нечетной  $f(x)$

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \mu x dx = \pi \sum_{k=1}^N \text{Выч}[e^{i\mu z} f(z); z_k]; \quad (5.3.8)$$

здесь  $\mu > 0$  – любое, а особые точки  $z_k$  функции  $f(z)$  лежат в верхней полуплоскости.

#### 5.4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

1<sup>0</sup>. Докажем формулы ( $a = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ;  $a, \mu > 0$ ):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2a};$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin \mu x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2}.$$

В случае а) используем формулу (5.3.7); здесь  $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$  – четная. Функция

$$\varphi(z) = e^{i\mu z} \cdot \frac{1}{a^2 + z^2} = \frac{e^{i\mu z}}{(z - ai)(z + ai)}$$

имеет два простых полюса  $z_1 = ai$ ,  $z_2 = -ai$ ; в верхней полуплоскости расположена точка  $z_1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu x}{a^2 + x^2} dx &= \pi i \cdot \text{Выч} \left[ \frac{e^{i\mu z}}{(z - ai)(z + ai)}; ai \right] = \pi i \cdot \text{Выч} \left[ \frac{(z + ai)^{-1} e^{i\mu z}}{z - ai}; ai \right] = \\ &= \pi i \frac{(z + ai)^{-1} e^{i\mu z}}{(z - ai)'} \Big|_{z = ai} = \pi i \frac{(ai + ai)^{-1} e^{i\mu(ai)}}{1} = \frac{\pi i}{2ai} e^{-\mu a} = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2a}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой (5.2.3) при вычислении вычета.

В случае б) применяем равенство (5.3.8) для нечетной  $f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}$ . Вычисляя, как и выше, вычет функции  $e^{iz} f(z)$  относительно  $z_1 = ai$ , получаем результат б). Читателю рекомендуется сделать выкладки подробнее.

**З а м е ч а н и е.** Мы не останавливаемся на обосновании применимости формул (5.3.7) и (5.3.8) для рассматриваемых здесь функций  $f(z)$ .

2<sup>0</sup>. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}; \quad a \neq 0.$$

Имеем рациональную функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}.$$

Степень числителя  $m = 0$ , знаменатель имеет степень  $n = 4$ , так что  $m \leq n - 2$ . При этом

$$f(z) = \frac{1}{(z - ia)^2(z + ia)^2};$$

ее полюсы второго порядка  $z_1 = ia$  и  $z_2 = -ia$  не лежат на оси  $OX$ . Значит,  $f(z)$  удовлетворяет условиям п. 3<sup>0</sup> параграфа 5.3, и можно применить теорему пункта 4<sup>0</sup> того же параграфа. В верхней полуплоскости расположен полюс  $z_1 = ia$  (для определенности считаем  $a > 0$ ); тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = 2\pi i \cdot \text{Выч} \left[ \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}; ia \right].$$

Указанный вычет найдем по формуле (5.2.7);  $n = 2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Выч} \left[ \frac{1}{(z - ia)^2(z + ia)^2}; ia \right] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow ia} \left( (z - ia)^2 \cdot \frac{1}{(z - ia)^2(z + ia)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \left( \frac{1}{(z + ia)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{-2}{(z + ia)^3} = -\frac{2}{8i^3 a^3} = -\frac{1}{4a^3} i. \end{aligned}$$

Теперь, в силу четности  $f(x)$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \pi i \cdot \left( -\frac{1}{4a^3} i \right) = \frac{\pi}{4a^3}.$$

3<sup>0</sup>. Получим формулу для вычисления интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt,$$

где  $R(u, v)$  – рациональная функция действительных переменных  $u, v$ , непрерывная как функция (сложная) от  $t$  на  $[0, 2\pi]$ .

Докажем, что

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_{k=1}^N \text{Выч} [f(z); z_k], \quad (5.4.1)$$

где  $z_k$  – все полюсы функции

$$f(z) = \frac{1}{z} R \left( \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right) \quad (5.4.2)$$

внутри окружности  $|z| = 1$ . Имеем:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right); \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right),$$

где  $z = e^{it}$  – точки окружности  $|z| = 1$ , обходимой в направлении против часовой стрелки.

Поскольку  $dz = e^{it} \cdot i \cdot dt = iz dt$  на этой окружности, а, значит,  $dt = \frac{1}{iz} dz$ , то

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right); \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} f(z) dz.$$

По основной теореме о вычетах вычисляемый интеграл равен

$$\frac{1}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k],$$

а это и есть утверждение (5.4.1).

Заметим, что построение функции  $f(z)$  по формуле (5.4.2) весьма неудобно при решении конкретных задач; проще бывает повторить все рассуждения п. 3<sup>0</sup>.

4<sup>0</sup>. П р и м е р. Вычислить  $J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$ .

Р е ш е н и е. Имеем  $\sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$  и  $dt = \frac{1}{iz} dz$  на окружности  $|z| = 1$ . Следовательно,

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz} dz}{2 + \frac{z^2 - 1}{2iz}} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

Поскольку  $z^2 + 4iz - 1 = 0$  при  $z_{1,2} = -2i \pm \sqrt{-3} = -i(2 \pm \sqrt{3})$ , а среди этих двух точек только  $z_2 = -i(2 - \sqrt{3})$  лежит внутри окружности  $|z| = 1$ , то для простого полюса  $z_2$  функции  $\frac{1}{z^2 + 4iz - 1}$  имеем

$$\begin{aligned} J &= 2 \cdot 2\pi i \cdot \text{Выч}\left[\frac{1}{z^2 + 4iz - 1}; -i(2 - \sqrt{3})\right] = \\ &= 4\pi i \frac{1}{(z^2 + 4iz - 1)'} \Big|_{z = -i(2 - \sqrt{3})} = \frac{4\pi i}{2z + 4i} \Big|_{z = -2i + i\sqrt{3}} = \frac{4\pi i}{2i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

## УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Найти вычеты относительно точки  $z = 0$  функций:

а)  $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ ; б)  $\sin \frac{\pi}{z}$ .

2. Найти вычеты следующих функций относительно каждого из полюсов:

а)  $\frac{z^2 + 3}{i - 2z}$ ; б)  $\frac{e^{\pi z}}{z^2 + \pi^2}$ ; в)  $\frac{\sin z}{(4z^2 - \pi^2)^2}$ ; г)  $\text{tg} \frac{z}{2}$  при  $|z| < 2\pi$ .

3. С помощью основной теоремы о вычетах вычислить следующие интегралы (на окружностях выбрано направление обхода против часовой стрелки):

а)  $\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \text{ctg} z dz$ ; б)  $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3}$ ; в)  $\oint_{|z+1|=3} \frac{(z-i)dz}{(z^2 - 1)z^2}$  г)  $\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z} dz}{z^4}$ .

4. С помощью вычетов вычислить следующие несобственные интегралы:

а)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 4}{x^4 + 9} dx$ ; б)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$ ; в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ .

5. С помощью вычетов найти:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - 2}.$$

## Глава 6

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

#### 6.1. ОРИГИНАЛ

1<sup>0</sup>. Функция  $f(t)$  называется *кусочно-непрерывной* на интервале  $[0, \infty)$ , если она либо непрерывна на  $[0, \infty)$ , либо имеет точки разрыва только первого рода, причем в каждом конечном интервале число точек разрыва – конечно.

Рассмотрение  $f(t)$  именно при  $t \geq 0$  связано с тем, что при изучении многих физических процессов роль переменной  $t$  играет время, и удобно предполагать, что процесс начинается в момент  $t = 0$ .

2<sup>0</sup>. Функция  $f(t)$  называется *оригиналом* (начальной функцией), если:

- а) она кусочно непрерывна на  $[0, \infty)$ ;
- б)  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ ;
- в) существуют действительные числа  $\alpha$  и  $M > 0$ , такие что

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad t \in [0, \infty).$$

Как правило, сами значения функции  $f$  действительного переменного  $t$  мы считаем действительными числами; наименьшее из всех возможных значений  $\alpha$ , для которых выполнено условие в), называется *показателем роста* оригинала.

Схематический график оригинала показан на рис. 6.1.1; изображен случай  $\alpha > 0$ .

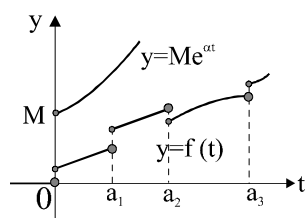


Рис 6.1.1

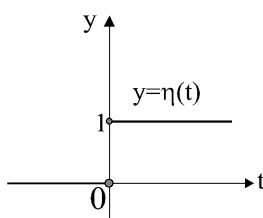


Рис 6.1.2

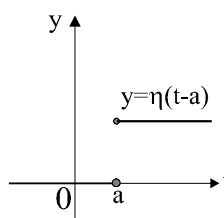


Рис 6.1.3

Обычно, функции, встречающиеся при моделировании физических процессов, удовлетворяют условиям а) – в); при рассмотрении процесса во времени (т.е. когда  $t \geq 0$ ) совершенно не важно, как доопределить  $f(t)$  при  $t < 0$ ; всегда можно ее считать в этом случае равной нулю. Условию в) удовлетворяют все ограниченные функции, например,  $\sin t$  и  $\cos t$  – достаточно выбрать  $\alpha = 0$  и  $M = 1$ . Известно также, что степенная функция  $y = t^s (s > 0)$  растет медленнее  $y = e^{\alpha t}$ , для каждого  $\alpha > 0$ , а тогда при  $\alpha = 1$  (для достаточно большого  $M$ ) имеет место оценка в).

Существуют, конечно, и функции, не удовлетворяющие условию в), например,  $y = e^{t^2}$  и др.

3<sup>0</sup>. Важным примером оригинала служит так называемая *единичная функция*:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } t \geq 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 6.1.2; условие в) выполнено при  $\alpha = 0$  и  $M = 1$ . Более общий случай – это "смещенная" единичная функция (рис. 6.1.3):

$$\eta(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < a, \\ 1, & \text{если } t \geq a; \end{cases} \quad a = \text{const} > 0.$$

4<sup>0</sup>. Обозначения упомянутых выше функций  $y = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $y = t^k$  и других здесь и в дальнейшем (в соответствии с условием б)) будут употребляться в случае функций вида, соответственно:

$$\eta(t)\sin t, \quad \eta(t)\cos t, \quad \eta(t)t^k, \dots$$

Единичную функцию удобно употреблять для записи в виде одного аналитического выражения разрывного оригинала. Так, например, если

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } t < a; \\ f_2(t) & \text{при } t \geq a, \end{cases}$$

то в момент времени  $t = a$  следует "выключить" функцию  $f_1(t)$  и "включить"  $f_2(t)$ . "Выключение" достигается вычитанием  $f_1(t)$  из  $f_1(t)$  в момент  $t \geq a$ , т.е. вычитанием  $\eta(t-a)f_1(t)$ , а "включение"  $f_2(t)$  ее прибавлением к полученному выражению  $f_1(t) - \eta(t-a)f_1(t)$  с этого же момента  $t = a$ , т.е. прибавлением  $\eta(t-a)f_2(t)$ . Следовательно,

$$f(t) = f_1(t) - \eta(t-a)f_1(t) + \eta(t-a)f_2(t). \quad (6.1.1)$$

Аналогичны рассуждения и в общем случае (см., например, рис. 6.1.1): если

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } t < a_1; \\ f_2(t) & \text{при } a_1 \leq t < a_2; \\ f_3(t) & \text{при } a_2 \leq t < a_3, \\ \dots \end{cases}$$

то

$$f(t) = f_1(t) - \eta(t-a_1)f_1(t) + \eta(t-a_1)f_2(t) - \\ - \eta(t-a_2)f_2(t) + \eta(t-a_2)f_3(t) - \dots$$

5°. Идея так называемого *операционного исчисления*, элементы которого мы рассматриваем в этой и последующей главе, состоит в рассмотрении не самих оригиналов, а их некоторых "образов", получаемых путем "преобразования Лапласа" (определения будут даны ниже). Переход к таким образам облегчает как математическое моделирование некоторых процессов, так и решение математических задач.

## 6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1°. Каждому оригиналу  $f = f(t)$  поставим в соответствие *функцию комплексного переменного*  $p$  вида

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (6.2.1)$$

Интеграл (6.2.1) называется *изображением* оригинала  $f(t)$  или *интегралом Лапласа*, а само соответствие  $F$  вида

$$f(t) \mapsto F(p),$$

определенное на классе всех оригиналов, – *преобразованием Лапласа*. Употребляют также обозначение  $f(t) \stackrel{\bullet}{=} (p)$ ,

$f(t) \stackrel{\bullet}{=} L(f(t))$  и др.

2°. Сформулированное определение будет корректным, если мы докажем существование (сходимость) несобственного интеграла (6.2.1) для всякого оригинала  $f(t)$  в некоторой области значений  $p$ . Для этого установим, что

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt < \infty. \quad (6.2.2)$$

Как и в случае функций с действительными значениями, отсюда будет следовать сходимость несобственного интеграла (6.2.1), которая в этом случае называется *абсолютной сходимостью*. Именно, справедлива.

**Т е о р е м а.** Пусть  $f(t)$  – оригинал. Тогда интеграл Лапласа (6.2.1) абсолютно сходится при всех значениях  $p$ , удовлетворяющих условию  $\operatorname{Re} p > \alpha$ , где  $\alpha$  – показатель роста  $f(t)$ . В указанной области  $F(p)$  аналитична.

В случае  $\alpha > 0$  полуплоскость тех  $p$ , для которых  $\operatorname{Re} p > \alpha$ , изображена на рис. 6.2.1.

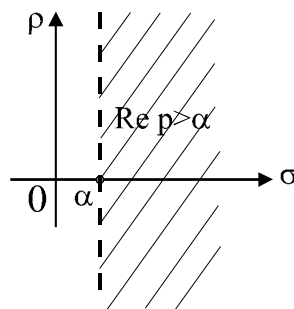


Рис. 6.2.1

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Установим сходимость несобственного интеграла (6.2.2). Если  $p = \sigma + i\rho$ , то

$$e^{-pt} = e^{-\sigma t}(\cos \rho t + i \sin \rho t),$$

тогда

$$|e^{-pt}| = e^{-\sigma t} \sqrt{\cos^2 \rho t + \sin^2 \rho t} = e^{-\sigma t},$$

т.е.

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt. \quad (6.2.3)$$

При этом, согласно условию в) п. 2<sup>0</sup> параграфа 6.1,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \text{ где } \alpha - \text{показатель роста.}$$

Подынтегральная функция в (6.2.3) тогда не превосходит

$$M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = M e^{(\alpha-\sigma)t},$$

а интеграл последней функции имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} M e^{(\alpha-\sigma)t} dt &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B M e^{(\alpha-\sigma)t} dt = M \cdot \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{e^{(\alpha-\sigma)t}}{\alpha-\sigma} \Big|_0^B = \\ &= \frac{M}{\sigma-\alpha} \lim_{B \rightarrow \infty} (1 - e^{(\alpha-\sigma)B}) = \frac{M}{\sigma-\alpha}, \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{B \rightarrow \infty} e^{(\alpha-\sigma)B} = 0 \text{ для } \operatorname{Re} p = \sigma > \alpha.$$

Итак, выражение (6.2.3) мажорируем сходящимся при  $\operatorname{Re} p > \alpha$  интегралом

$$\int_0^{\infty} M e^{(\alpha-\sigma)t} dt,$$

и, следовательно, в указанной полуплоскости абсолютно сходится (6.2.1).

Таким образом, для каждого оригинала  $f(t)$  в области  $\operatorname{Re} p > \alpha$  определено его изображение (6.2.1).

Аналитичность  $F(p)$  означает его дифференцируемость при каждом из указанных  $p$ . Поскольку, как только что было доказано,

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt \leq \int_0^{\infty} M e^{(\alpha-\sigma)t} dt < \infty,$$

т.е. интеграл Лапласа "мажорируем" сходящимся интегралом, то возможно дифференцирование под знаком интеграла (это свойство доказывается с помощью тех же идей, которые используются при доказательстве почленной дифференцируемости равномерно сходящихся рядов):

$$F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt. \quad (6.2.4)$$

Остается доказать существование  $F'(p)$  именно при тех  $p$ , для которых  $\operatorname{Re} p > \alpha$ . А это, в свою очередь, вытекает из оценки

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |t f(t) e^{-pt}| dt &\leq M \int_0^{\infty} t e^{(\alpha-\sigma)t} dt = \\ &= M \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B t e^{(\alpha-\sigma)t} dt = M \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \frac{t e^{(\alpha-\sigma)t}}{\alpha-\sigma} - \frac{e^{(\alpha-\sigma)t}}{(\alpha-\sigma)^2} \right) \Big|_0^B = \frac{M}{(\alpha-\sigma)^2} < \infty, \end{aligned}$$

означающей сходимость интеграла (6.2.4); использованное здесь соотношение  $\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B}{e^{(\sigma-\alpha)B}} = 0$  устанавливается с помощью правила Лопиталя.

3<sup>0</sup>. Итак, преобразование Лапласа ставит в соответствие каждому оригиналу единственное изображение  $F(p)$ . Справедливо и обратное: при определенных ограничениях на аналитическую  $F(p)$  она является изображением некоторого оригинала. При этом оказывается, что два непрерывных оригинала, имеющих одно и то же изображение, тождественно равны.

### 6.3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА. ИЗОБРАЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1<sup>0</sup>. *Линейность*. Пусть  $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$ ,  $g(t) \stackrel{\bullet}{=} G(p)$  и  $\lambda, \mu$  – произвольные (действительные или комплексные) числа.

**Т е о р е м а.** Имеет место соотношение

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \stackrel{\bullet}{=} \lambda F(p) + \mu G(p).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прежде всего заметим, что  $F(p)$  и  $G(p)$  существуют в полуплоскости  $\text{Re } p > \alpha$ , где  $\alpha = \max \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – соответственно, показатели роста оригиналов  $f(t)$  и  $g(t)$ . В указанной полуплоскости

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-pt} dt = \lambda \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \mu \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt,$$

а это и есть утверждение теоремы.

2<sup>0</sup>. *Теорема подобия.* Для любого постоянного  $\lambda > 0$  справедливо соотношение

$$f(\lambda t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Суть утверждения состоит в том, что умножение аргумента  $t$  оригинала на положительное число  $\lambda$  приводит к делению аргумента  $p$  изображения и самого  $F(p)$  на то же число  $\lambda$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заменяя в несобственном интеграле по  $t \in [0, \infty)$  переменную по формуле  $\tau = \lambda t$ , так что  $\tau \in [0, \infty)$  и  $dt = \frac{1}{\lambda} d\tau$ , имеем:

$$\begin{aligned} f(\lambda t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p \frac{1}{\lambda} \tau} \frac{1}{\lambda} d\tau = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

3<sup>0</sup>. *Теорема смещения (затухания).* Для любого действительного или комплексного числа  $a$  имеет место соотношение

$$e^{at} f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p - a).$$

Суть утверждения состоит в том, что умножение оригинала на функцию  $e^{at}$  приводит к смещению на величину  $a$  аргумента  $p$  изображения  $F(p)$ . Если  $a$  – действительное число и  $a < 0$ , то термин "затухание" означает убывание (с течением времени) множителя  $e^{at}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Имеем

$$e^{at} f(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a),$$

что и утверждалось.

Из доказательства теоремы следует, что само существование  $F(p - a)$  имеет место, если  $\text{Re}(p - a) > \alpha$ , где  $\alpha$  – показатель роста  $f(t)$ .

4<sup>0</sup>. *Теорема запаздывания.* Для любого постоянного  $\tau > 0$  имеет место соотношение

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \stackrel{\bullet}{=} e^{-p\tau} F(p).$$

Суть утверждения состоит в том, что начало процесса в момент  $\tau$  (в сравнении с процессом, начинающимся в момент  $t = 0$  и описываемым оригиналом  $f(t)$ ), т.е. его запаздывание на время  $\tau$ , влечет за собой умножение изображения на  $e^{-p\tau}$ .

Левую часть формулы часто записывают также в виде  $f(t - \tau)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Имеем

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} \eta(t - \tau) f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} \eta(t - \tau) f(t - \tau) e^{-pt} dt,$$

так как при  $t < \tau$  значения подынтегральной функции равны нулю. Теперь заменяем переменную по формуле  $s = t - \tau$ ; тогда  $t = s + \tau$  и  $dt = ds$ . Следовательно,

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} \eta(s) f(s) e^{-p(s+\tau)} ds = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(s) e^{-ps} ds = e^{-p\tau} F(p);$$

в последней цепочке равенств мы учли, что  $\eta(s) = 1$  при  $s \geq 0$ . Теорема доказана.

Рассмотрим, далее, изображения основных элементарных функций.

5<sup>0</sup>. *Единичная функция* имеет следующее изображение:

$$\eta(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p}. \quad (6.3.1)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \eta(t) &\stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{p} e^{-(\sigma+ip)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} e^{-\sigma t} (\cos pt - i \sin pt) \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} (0-1) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Здесь предполагалось (см. п. 3<sup>0</sup> параграфа 6.1), что  $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$  и было использовано очевидное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| e^{-\sigma t} (\cos pt - i \sin pt) \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 pt + \cos^2 pt}{e^{\sigma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sigma t}} = 0.$$

6<sup>0</sup>. Имеет место соотношение

$$\eta(t-a) \stackrel{\bullet}{=} e^{-ap} \frac{1}{p} \quad (a > 0). \quad (6.3.2)$$

Оно вытекает из (6.3.1) и теоремы запаздывания.

7<sup>0</sup>. Справедливы соотношения

$$e^{at} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p-a}; \quad (6.3.3)$$

$$\sin at \stackrel{\bullet}{=} \frac{a}{p^2 + a^2}; \quad (6.3.4)$$

$$\cos at \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{p^2 + a^2}; \quad (6.3.5)$$

$$\operatorname{sh} at \stackrel{\bullet}{=} \frac{a}{p^2 - a^2}; \quad (6.3.6)$$

$$\operatorname{ch} at \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{p^2 - a^2}. \quad (6.3.7)$$

В этих формулах  $a = \operatorname{const}$  — действительное или комплексное число.

Доказательство. Имеем

$$e^{at} \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a},$$

если  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ . При этом результат постановки  $\infty$  (вместо  $t$ ) равен нулю на основании рассуждений типа тех, что приведены в п. 5<sup>0</sup>. Заметим, что при действительном  $a > 0$  формула (6.3.3) вытекает также из (6.3.1) и теоремы смещения.

Далее,

$$\sin at = \frac{1}{2i} (e^{iat} - e^{-iat}) \quad \text{и} \quad \cos at = \frac{1}{2} (e^{iat} + e^{-iat}),$$

а поэтому на основании теоремы линейности и соотношения (6.3.3) получаем:

$$\sin at \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia} \right) = \frac{2ai}{2i(p^2 - i^2 a^2)} = \frac{a}{p^2 + a^2};$$

$$\cos at \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia} \right) = \frac{2p}{2(p^2 + a^2)} = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Соотношения (6.3.6) и (6.3.7) для гиперболических функций

$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

получаются точно так же (в силу теоремы линейности и (6.3.3)), как и (6.3.4), (6.3.5).

8<sup>0</sup>. П р и м е р. Найти изображение единичного импульса, действующего в промежутке времени  $[0, \tau]$ :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } 0 \leq t < \tau; \\ 0, & \text{если } t \geq \tau. \end{cases}$$

*Решение.* Разрывный оригинал  $\varphi(t)$  (см. рис. 6.3.1) можно в силу рассуждений, приведенных в п. 4<sup>0</sup> параграфа 6.1, записать в виде

$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau).$$

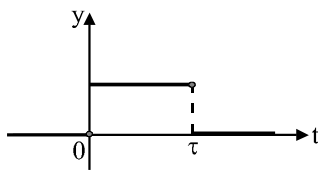


Рис. 6.3.1

Тогда на основании соотношений (6.3.1) и (6.3.2) и теоремы линейности имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\tau p} = \frac{1}{p} (1 - e^{-\tau p}).$$

#### 6.4. ГАММА-ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА И ИЗОБРАЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1<sup>0</sup>. Гамма-функцией Эйлера называется функция вида

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad (6.4.1)$$

Докажем сходимость интеграла (6.4.1). Положим сначала  $x \geq 1$ , тогда функция  $f(t) = t^{x-1} e^{-t}$  непрерывна на  $[0, \infty)$  и  $t^{x-1} \leq M e^{\alpha t}$  при каждом  $\alpha > 0$  с некоторой постоянной  $M > 0$  (см. п. 2<sup>0</sup> параграфа 6.1). Взяв  $\alpha = \frac{1}{2}$ , имеем мажорантным для (6.4.1) несобственный интеграл:

$$\int_0^{\infty} M e^{\frac{1}{2}t} e^{-t} dt = M (-2) e^{-\frac{t}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2M.$$

Следовательно, по известной теореме о сравнении несобственных интегралов (применимой здесь, так как  $f(t) \geq 0$ ) сходящимся является интеграл (6.4.1),  $x \geq 1$ .

Если  $0 < x < 1$ , то  $t^{x-1} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +0$ , т.е.  $f(t)$  имеет разрыв второго рода в точке  $t = 0$ . Записав

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (6.4.2)$$

имеем второй интеграл сходящимся, если применить только что приведенные рассуждения ( $f(t)$  является непрерывной при  $t \in [1, +\infty)$ ).

В первом интеграле в (6.4.2)  $e^{-t} \leq e^0 = 1$ , тогда

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{x} < \infty \quad (0 < x < 1).$$

Итак, оба слагаемых интеграла в (6.4.2) являются сходящимися, чем и доказано существование  $\Gamma(x)$  при  $0 < x < 1$ . Окончательно имеем: интеграл (6.4.1) – сходящийся при всех  $x > 0$ .

2<sup>0</sup>. Докажем следующее важное свойство гамма-функций:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0. \quad (6.4.3)$$

Заметим, прежде всего, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = 0; \quad (6.4.4)$$

это свойство (рост степенной функции – менее быстрый, чем рост показательный) упоминалось в п. 2<sup>0</sup> параграфа 6.1; его аккуратное доказательство состоит в последовательном применении правила Лопиталья  $n$  раз, где  $n$  – целая часть числа  $x+1$ . Поэтому, на основании формулы интегрирования по частям, имеем

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + x\Gamma(x),$$

что и утверждалось.

3°. Вычислим отдельные значения гамма-функции:

$$\text{а) } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1; \quad \text{б) } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi},$$

где использована постановка  $\tau = \sqrt{t}$  (так что  $t = \tau^2$  и  $dt = 2\tau d\tau$ ) и хорошо известное значение интеграла Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4°. Последовательно применяя формулу (6.4.3) при целом  $x = n-1$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-3) = \\ &= (n-1)(n-2)\dots 2 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \end{aligned}$$

поскольку  $\Gamma(1) = 1$  (см. п. 3°, а)). Итак,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (6.4.5)$$

в случае  $n = 1$  формула остается верной, так как  $0! = 1 = \Gamma(1)$ .

Если (6.4.3) и свойство б) п. 3° применить в случае  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ , то получаем

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

аналогично

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \text{ и т.д.}$$

5°. Докажем, что

$$t^s \stackrel{\bullet}{=} \frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}}, \quad s > 0. \quad (6.4.6)$$

Ограничимся рассмотрением частного случая:  $p$  – действительное положительное число; однако соотношение (6.4.6) остается справедливым и при комплексных  $p$ , для которых  $\operatorname{Re} p > 0$ . Имеем

$$t^s \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} t^s e^{-pt} dt.$$

Положим  $pt = \tau$ , тогда  $\tau \in [0, \infty)$ ,  $t = \frac{1}{p}\tau$  и  $dt = \frac{1}{p}d\tau$ . Следовательно,

$$t^s \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{p}\tau\right)^s e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{p^{s+1}} \int_0^{\infty} \tau^s e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{p^{s+1}} \Gamma(s+1),$$

что и утверждалось.

При  $s = n = 1, 2, \dots$  имеем, согласно соотношениям (6.4.5) и (6.4.6)

$$t^n \stackrel{\bullet}{=} \frac{n!}{p^{n+1}}$$

**З а м е ч а н и е.** Функция  $f(t) = t^s$  при  $-1 < s < 0$  перестает быть оригиналом, так как имеет бесконечный разрыв в точке  $t = 0$ . Однако рассуждения, использованные только что, показывают, что преобразование Лапласа выполнимо и в этом случае и приводит к результату  $\frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}}$  (поскольку  $s+1 > 0$ , то  $\Gamma(s+1)$  существует). Следовательно, соотношение (6.4.6) в только что указанном смысле, справедливо для всех  $s > -1$ . В частности (см. п. 3°, б)),

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \stackrel{\bullet}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \stackrel{\bullet}{=} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

6°. Найдем, например, изображение функции  $f(t) = e^{at} t^s$ . Применяя (6.4.6) и теорему смещения, имеем

$$e^{at} t^s \stackrel{\bullet}{=} \frac{\Gamma(s+1)}{(p-a)^{s+1}},$$

причем, согласно замечанию в п. 5<sup>0</sup>, результат справедлив при всех  $s > -1$ . В частности,

$$e^{at} t^n \stackrel{\bullet}{=} \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

7<sup>0</sup>. П р и м е р. Найти изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t < 2; \\ 3e^t, & \text{если } 2 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем выражение для оригинала в виде (6.1.1):

$$\begin{aligned} f(t) &= t - \eta(t-2)t + \eta(t-2) \cdot 3e^t = \\ &= t - \eta(t-2)[(t-2)+2] + 3\eta(t-2)e^{(t-2)+2} = \\ &= t - \eta(t-2)(t-2) - 2\eta(t-2) + 3e^2\eta(t-2)e^{t-2}; \end{aligned}$$

используя теорему запаздывания и соотношения (6.4.6), (6.3.3), получим

$$f(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2} - e^{-2p} \frac{1}{p^2} - 2e^{-2p} \frac{1}{p} + 3e^2 e^{-2p} \frac{1}{p-1}.$$

## 6.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛОВ

1<sup>0</sup>. Пусть  $f(t)$  – оригинал и  $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$

Т е о р е м а дифференцирования оригинала. Имеет место соотношение

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{=} pF(p) - f(0). \quad (6.5.1)$$

В частности, если  $f(0) = 0$ , то

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{=} pF(p),$$

т.е. дифференцирование оригинала приводит к умножению его изображения на параметр  $p$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned} f'(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= -f(0) + \left( \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} \right) + pF(p). \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Осталось доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} = 0. \quad (6.5.3)$$

Если  $\alpha$  – показатель роста  $f(t)$  и, как обычно,  $\sigma = \operatorname{Re} p > \alpha$ , то (см. рассуждения в п. 2<sup>0</sup> параграфа 6.2)

$$\left| f(t) e^{-pt} \right| \leq M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = M e^{-(\sigma-\alpha)t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

чем установлено равенство (6.5.3), а значит (в силу (6.5.2)) и утверждение (6.5.1).

2<sup>0</sup>. Найдем изображение второй производной оригинала, используя уже найденное соотношение (6.5.1):

$$\begin{aligned} f''(t) &= (f'(t))' \stackrel{\bullet}{=} p(L(f'(t))) - f'(0) = \\ &= p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Итак, если  $f'(t)$  является оригиналом (удовлетворяет условиям а) – в) п. 2<sup>0</sup> параграфа 6.1), то

$$f''(t) \stackrel{\bullet}{=} p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (6.5.4)$$

Аналогичны рассуждения для получения изображений третьей и последующих производных; так, если  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $f''(t)$  – оригиналы, то

$$\dot{f}'''(t) \doteq pL(\dot{f}''(t)) - f''(0) = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

Для  $n$ -ой производной получаем соотношение:

$$\dot{f}^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

В случае, если начальные значения  $f(t)$  и ее производных равны нулю, т.е.

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad (6.5.5)$$

то

$$\dot{f}^{(n)}(t) \doteq p^{(n)} F(p);$$

т.е.  $n$  – кратное дифференцирование оригинала при условии (6.5.5) приводит к умножению на  $p^n$  его изображения.

3°. Рассмотрим вопрос о преобразовании Лапласа первообразной

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (6.5.6)$$

оригинала  $f(t)$ . Прежде всего отметим, что  $\varphi(t)$  удовлетворяет всем условиям существования оригинала. Действительно,  $\varphi(t) = 0$  при  $t < 0$  (первообразная от нулевой функции равно нулю),  $\varphi(t)$  – кусочно непрерывна вместе с  $f(\tau)$  и, наконец,

$$|\varphi(t)| \leq \int_0^t M e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \leq \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t},$$

если считать  $\alpha > 0$  (а это можно предполагать без ограничения общности, увеличив, если требуется, показатель роста).

**Т е о р е м а.** Если  $\dot{f}(t) \doteq F(p)$ , то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p). \quad (6.5.7)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\Phi(p)$  – изображение оригинала  $\varphi(t)$ . Тогда  $\dot{\varphi}'(t) \doteq p \Phi(p) - \varphi(0)$ , при этом (см. (6.5.6))

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = 0,$$

т.е.  $\dot{\varphi}'(t) \doteq p \Phi(p)$ . Но  $\varphi'(t) = f(t)$ , т.е.  $\dot{f}(t) \doteq p \Phi(p)$ , и, одновременно с этим,  $\dot{f}(t) \doteq F(p)$ . Следовательно,  $F(p) = p \Phi(p)$ ,

т.е.  $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$  или, что то же самое  $\dot{\varphi}(t) \doteq \frac{F(p)}{p}$ , что и утверждалось.

## 6.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

1°. Пусть  $\dot{f}(t) \doteq F(p)$ . Выше уже отмечалась аналитичность  $F(p)$  в полуплоскости  $\text{Re } p > \alpha$ .

**Т е о р е м а 1.** Имеет место соотношение

$$\dot{F}'(p) \doteq -t f(t).$$

Таким образом, дифференцирование изображения влечет за собой умножение оригинала на  $(-t)$ .

Следует отметить, что  $(-t)f(t)$  – это оригинал.

Условия а), б) п. 2° параграфа 6.1, очевидно, выполнены. В силу того, что степенная функция растет медленнее показательной (именно,  $t < e^{\beta t}$  при любом  $\beta > 0$ ), получаем  $|(-t)f(t)| \leq M e^{(\alpha+\beta)t}$ , где  $\beta$  – сколь угодно близко к нулю; таким образом, и условие в) выполнено.

Доказательство теоремы содержится в соотношении (6.2.4).

**С л е д с т в и е.** Имеет место соотношение

$$\dot{F}^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t).$$

Действительно, после второго дифференцирования оригинал  $(-t)f(t)$  умножится (согласно теореме 1) на  $(-t)$ , т.е.

$$\dot{F}''(p) \doteq t^2 f(t).$$

Рассуждая подобным образом и далее, приходим к утверждению следствия.

2<sup>0</sup>. Рассмотрим вопрос о том, что произойдет с оригиналом  $f(t)$  если изображение  $F(p)$  проинтегрировать. При этом будем предполагать, что  $\frac{f(t)}{t}$  удовлетворяет условию а) – в) п. 2<sup>0</sup> параграфа 6.1 и что интеграл  $\int_p^\infty F(q) dq$  – сходящийся.

Следующее утверждение приведем без доказательства.

**Т е о р е м а 2.** Имеет место соотношение

$$\int_p^\infty F(q) dq \stackrel{\bullet}{=} \frac{f(t)}{t}.$$

3<sup>0</sup>. **П р и м е р.** Найти изображение оригинала  $\frac{\sin t}{t}$ .

**Р е ш е н и е.** Поскольку  $\sin t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2 + 1}$ , то деление оригинала на  $t$  приводит к интегрированию изображения (теорема 2):

$$\frac{\sin t}{t} \stackrel{\bullet}{=} \int_p^\infty \frac{1}{p^2 + 1} dp, \text{ т.е. } \frac{\sin t}{t} \stackrel{\bullet}{=} \arctg p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p,$$

но последнее выражение равно  $\operatorname{arccctg} p$ . Итак,

$$\frac{\sin t}{t} \stackrel{\bullet}{=} \operatorname{arccctg} p.$$

**З а м е ч а н и е.** Данная функция имеет разрыв при  $t = 0$ . Чтобы убедиться в ее ограниченности в любой окрестности этой точки, достаточно найти соответствующий предел:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

В свою очередь, ограниченность данной функции в окрестности  $t = 0$  означает выполнимость для нее требования в) п. 2<sup>0</sup> параграфа 6.1, которое использовалось в теореме 2.

## 6.7. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

1. Найти изображения оригиналов:

а)  $\frac{\sin 3t}{e^t}$ ; б)  $\frac{5t^3}{4}$ ; в)  $\sqrt{t} - t^2$ ; г)  $(t-2)^4$ .

2. Найти изображение оригиналов:

а)  $\operatorname{cht} \cdot \sin 2t$ ; б)  $t \operatorname{sh} 7t$ .

Указание: выразить (на основании определения) гиперболические функции через показательные.

3. Найти изображение оригиналов:

а)  $\cos^2 \frac{t}{8}$ ; б)  $e^{-t} \sin^2 3t$ ; в)  $\frac{\cos^4 t}{e^{5t}}$ .

Указание: понизить степени тригонометрических функций.

4. Найти изображение оригиналов:

а)  $4 \sin 8t \cos t$ ; б)  $\cos \frac{t}{2} \cos \frac{5t}{2}$ ; в)  $\operatorname{cht} \cdot \sin 3t \cdot \sin 4t$ .

Указание: преобразовать в сумму (разность) произведение тригонометрических функций.

5. Найти изображение оригиналов:

а)  $f(t) = \begin{cases} \eta(t-2) & \text{при } t < 4; \\ t^2 - 1 & \text{при } 4 \leq t < 5; \\ e^{4t} & \text{при } t \geq 5. \end{cases}$  б)  $f(t) = \begin{cases} t - t^2, & 0 \leq t < 1; \\ t^2 - t, & 1 \leq t < 3; \\ \operatorname{sh} t, & t \geq 3. \end{cases}$

## ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### 7.1. ТЕОРЕМА ОБРАЩЕНИЯ

1<sup>0</sup>. Рассмотрим задачу, *обратную* нахождению интеграла Лапласа: по заданному изображению  $F(p)$  восстановить оригинал  $f(t)$ . Пусть  $\alpha$  – показатель роста оригинала (см. параграфа 6.1).

**Т е о р е м а.** Если в области  $\operatorname{Re} p > \alpha$  функция  $F(p)$  является изображением оригинала  $f(t)$ , то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (7.1.1)$$

во всех точках  $t$ , где  $f(t)$  – непрерывна. При этом интегрирование в (7.1.1) производится по произвольной вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = x$ , где  $x > \alpha$ .

Представление (7.1.1) называют *формулой Меллина*.

2<sup>0</sup>. В пункте 1<sup>0</sup> мы предполагали, что заданная  $F(p)$  – уже является изображением некоторого оригинала. Укажем (без доказательства) те достаточные условия, при которых заданная функция комплексного переменного действительно является изображением:

- а)  $F(p)$  – аналитична в области  $\operatorname{Re} p > \alpha$  при некотором  $\alpha$ ;
- б) в указанной области  $F(p) \rightarrow 0$  (равномерно относительно  $\arg p$ ), если  $|p| \rightarrow \infty$ .
- в) для всех  $p$ , таких, что  $\operatorname{Re} p = x > \alpha$  имеет место соотношение

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < \infty \quad (\text{где } y = \operatorname{Im} p).$$

При сформулированных условиях  $f(t)$  восстанавливается по формуле Меллина.

3<sup>0</sup>. Рассмотрим вопрос о *вычислении интеграла* (7.1.1), если выполнено условие  $F(p) \rightarrow 0$  при  $|p| \rightarrow \infty$  (см. условие б) в п. 2<sup>0</sup>). Пусть  $F(p)$  имеет лишь конечное число особых точек (скажем,  $n$  штук). Тогда вертикальную прямую  $\operatorname{Re} p = x$  можно выбрать так, что все особые точки  $z_k$  расположены левее ее: следует выбрать  $x$  достаточно большим. Как оказывается, из основной теоремы о вычетах будет тогда следовать, что

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч} [F(p) e^{pt}, z_k],$$

где  $t \geq 0$  – произвольно. Поэтому, согласно формуле Меллина,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч} [F(p) e^{pt}, z_k]. \quad (7.1.3)$$

### 7.2. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ ДЛЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1<sup>0</sup>. Применение формулы Меллина (ее следствия (7.1.3)) даже для табличных изображений часто приводит к довольно сложным выкладкам. Однако, для дробно-рациональных  $F(p)$  можно воспользоваться приемами достаточно элементарного характера.

2<sup>0</sup>. *Простейшая дробь*  $F(p) = \frac{1}{p^2 + ap + b}$ .

В результате выделения полного квадрата приходим к представлению

$$F(p) = \frac{1}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2}, \quad \text{где } \pm \omega^2 = b - \frac{a^2}{4}.$$

Имеем

$$F(p) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2},$$

и применим теперь формулы (6.3.4), (6.3.6) параграфа 6.3. Согласно теореме смещения, аргумент  $p + \frac{a}{2}$  мог возникнуть за счет умножения соответствующего аргумента на  $e^{-\frac{a}{2}t}$ , т.е.

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\omega} e^{-\frac{a}{2}t} \sin \omega t \text{ или } F(p) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\omega} e^{-\frac{a}{2}t} \operatorname{sh} \omega t$$

соответственно знаку "+" или "-" перед  $\omega^2$ .

3<sup>0</sup>. Простейшая дробь  $F(p) = \frac{cp+d}{p^2+ap+b}$  ( $c \neq 0$ ) может быть преобразована к виду

$$F(p) = \frac{cp+d}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2} = \frac{c\left(p+\frac{a}{2}\right) - \frac{ac}{2} + d}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2}.$$

Обозначив  $h = d - \frac{ac}{2}$ , получим

$$F(p) = c \frac{p+\frac{a}{2}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2} + \frac{h}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2}.$$

В случае знака "+" перед  $\omega^2$ , согласно теореме смещения, получим

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} ce^{-\frac{a}{2}t} \cos \omega t + \frac{h}{\omega} e^{-\frac{a}{2}t} \sin \omega t.$$

В случае же знака "-" тригонометрические функции заменяются на соответствующие гиперболические.

4<sup>0</sup>. П р и м е р.  $F(p) = \frac{2+3p}{3+8p-2p^2}$ . Найти оригинал  $f(t)$ .

Р е ш е н и е. Приведем дробь к виду, рассмотренному выше:

$$\begin{aligned} F(p) &= -\frac{1}{2} \frac{3p+2}{p^2-4p-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{3p+2}{(p-2)^2 - \frac{11}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{3(p-2)+6+2}{(p-2)^2 - \sqrt{\frac{11}{2}}^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 - \sqrt{\frac{11}{2}}^2} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{(p-2)^2 - \sqrt{\frac{11}{2}}^2}. \end{aligned}$$

С учетом формул (6.3.7), (6.3.6) параграфа 6.3. и теоремы смещения получаем:

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} -\frac{3}{2} e^{2t} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{11}{2}} t - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}} e^{2t} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{11}{2}} t.$$

5<sup>0</sup>. Если  $F(p)$  – правильная рациональная дробь, то путем ее разложения в сумму простейших дробей задачу о восстановлении оригинала можно свести к задачам типа рассмотренных в пп. 2<sup>0</sup>, 3<sup>0</sup>.

### 7.3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1<sup>0</sup>. Операционный метод (преобразование Лапласа) может быть применен к нахождению частного решения *линейного* обыкновенного *дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами* и начальными условиями в точке "0". Идея состоит в том, что считая искомое решение оригиналом  $y = y(t)$ , мы применяем преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. В результате этого уравнения становится алгебраическим относительно изображения  $Y = Y(p)$ . Найдя  $Y$ , остается вернуться к соответствующему оригиналу  $y = y(t)$ .

2<sup>0</sup>. Начнем рассмотрение с уравнения *первого порядка*

$$y' + ay = f(t), \quad a = \text{const}, \quad (7.3.1)$$

в случае  $y(0) = y_0$ , где  $y_0$  – заданное число. Пусть  $f(t)$  – оригинал, имеющий изображение  $F(p)$ . Применяя к обеим частям уравнения (7.3.1) преобразование Лапласа и пользуясь формулой для изображения производной (см. (6.5.1))  $\dot{y}'(t) \doteq pY(p) - y(0)$ , имеем

$$pY(p) - y(0) + aY(p) = F(p),$$

откуда  $(p+a)Y(p) - y_0 = F(p)$ , а значит

$$Y(p) = \frac{y_0 + F(p)}{a + p}.$$

Остается восстановить по  $Y(p)$  оригинал  $y = y(t)$ , который и будет решением указанной задачи Коши; приемы обращения  $Y(p)$  рассмотрены выше (см. параграфы 7.1, 7.2).

3°. Тот же способ применим для решения задачи Коши для уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0 \end{cases}$$

и в более общем случае произвольного ( $n$ -го) порядка:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0; \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (7.3.2)$$

В простейшей ситуации  $y_0 = y'_0 = \dots = y_0^{(n-1)} = 0$  результат применения преобразования Лапласа к обеим частям уравнения (7.3.2) приводит к алгебраическому уравнению

$$p^n Y + a_{n-1} p^{n-1} Y + \dots + a_1 p Y + a_0 Y = F(p),$$

откуда

$$Y = Y(p) = \frac{F(p)}{T_n(p)},$$

где

$$T_n(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

– так называемый характеристический многочлен для уравнения (7.3.2). Задача свелась к обращению преобразования Лапласа.

4°. Если числа  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  считать произвольными постоянными (в этом случае их удобно переобозначить через  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , соответственно), то применение к уравнению (7.3.2) с начальными условиями

$$y(0) = C_1, y'(0) = C_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_n$$

операционного метода приводит к получению общего решения. Найденные оригиналы  $y = y(t; C_1, \dots, C_n)$  обращаются в ноль при  $t < 0$ .

С точки зрения задач физики, мы получаем информацию о течении процесса с момента  $t = 0$ . Если же начальные условия задаются в точке  $t_0 \neq 0$ , то выделение соответствующего частного решения из полученного общего происходит обычным способом (написание и решение системы алгебраических линейных уравнений относительно  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ).

5°. П р и м е р 1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{4t}; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Пусть  $\dot{y}'(t) \doteq Y(p)$ . Тогда (см. п. 2°)

$$\dot{y}' \doteq pY - y(0) = pY - 1 \text{ и } pY - 1 - 3Y = \frac{1}{p-4},$$

откуда

$$(p-3)Y = \frac{1}{p-4} + 1 \text{ или } Y = \frac{p-3}{p-4} : (p-3) = \frac{1}{p-4}.$$

Следовательно,  $y(t) = e^{4t}$  – искомое решение.

**Пример 2.** Решить задачу Коши

$$y'' - y' = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1, \\ t-1, & 1 \leq t < \infty, \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

**Решение.** Прежде всего, запишем (см. параграф 6.1) правую часть уравнения в виде

$$f(t) = 2 - 2 \cdot \eta(t-1) + \eta(t-1) \cdot (t-1);$$

ее изображение имеет вид (см. теорему запаздывания)

$$F(p) = 2 \left( \frac{1}{p} - e^{-p} \frac{1}{p} + e^{-p} \cdot \frac{1}{p^2} \right).$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получаем при нулевых начальных условиях

$$p^2 Y - pY = \frac{2}{p} - 2e^{-p} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right)$$

или

$$(p^2 - p)Y = \frac{2}{p} - 2e^{-p} \frac{p^2 - p}{p^3},$$

т.е.

$$Y = \frac{2}{p^2(p-1)} - \frac{2e^{-p}}{p^3}.$$

Запишем

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1-p^2+p^2}{p^2(p-1)} = -\frac{(p-1)(p+1)}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p-1} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно,

$$Y = -\frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p-1} - e^{-p} \frac{2!}{p^3} = -2 - 2t + 2e^t + (t-1)^2 \eta(t-1),$$

если воспользоваться теоремой запаздывания применительно к последнему слагаемому. Итак, решение задачи Коши имеет вид

$$y(t) = -2 - 2t + 2e^t + (t-1)^2 \eta(t-1).$$

#### 7.4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

<sup>10</sup>. Преобразование Лапласа может быть использовано и для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, если начальные условия заданы в точке  $t = 0$ . Продемонстрируем метод на случае системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + f_1(t); \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + f_2(t); \\ \dot{z} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + f_3(t) \end{cases} \quad \text{с начальными условиями} \quad \begin{cases} x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Здесь  $a_i, b_j, c_k$  ( $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ) – постоянные числа;  $f_j = f_j(t)$  – заданные оригиналы,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  – искомые решения;  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  – их производные.

Положим  $\dot{f}_j(t) \doteq F_j(p)$ ,  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $y(t) \doteq Y(p)$ ,  $z(t) \doteq Z(p)$ . Применяя преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения, получим:

$$\begin{cases} pX - x_0 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + F_1; \\ pY - y_0 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + F_2; \\ pZ - z_0 = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + F_3. \end{cases}$$

Имеем теперь систему алгебраических линейных уравнений относительно  $X, Y, Z$ :

$$\begin{cases} (a_1 - p)X + b_1Y + c_1Z = -(x_0 + F_1); \\ a_2X + (b_2 - p)Y + c_2Z = -(y_0 + F_2); \\ a_3X + b_3Y + (c_3 - p)Z = -(z_0 + F_3). \end{cases}$$

Найдя  $X(p)$ ,  $Y(p)$ ,  $Z(p)$ , восстановим соответствующие оригиналы.

2°. Операционный метод можно применить и для систем уравнений, содержащих производные высших порядков. Продемонстрируем это на следующем примере.

**Пример.** Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \ddot{x} + y = 0; \\ \ddot{y} + x = 1, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$$

**Решение.** Применим преобразование Лапласа к каждому уравнению (при этом  $0 \cdot \dot{\phantom{x}} = 0$ , так как интеграл Лапласа есть интеграл от нулевой функции). Получаем:

$$\begin{cases} p^2 X + Y = 0; \\ X + p^2 Y = \frac{1}{p}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} Y = -p^2 X; \\ (1 - p^4)X = \frac{1}{p}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} X = \frac{1}{p(1-p^2)(1+p^2)}; \\ Y = -\frac{p}{(1-p^2)(1+p^2)}. \end{cases}$$

Раскладывая дроби на простейшие, получим:

$$X = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} \quad \text{и} \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1}.$$

Возвращаясь к оригиналам, получаем:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \cos t; \\ y(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t). \end{cases}$$

## 7.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

1. Найти оригинал, соответствующий заданному изображению:

а)  $\frac{14}{p^2-10p+1}$ ; б)  $\frac{1}{3-2p-p^2}$ ; в)  $\frac{2}{4p-3p^2}$ ; г)  $\frac{1}{(p+6)^2}$ ;

д)  $\frac{p-1}{p^2-3p}$ ; е)  $\frac{3p+4}{p^2+8p+15}$ ; ж)  $\frac{7-3p}{2p^2-4p+5}$ .

2. Найти оригинал, изображением которого служит заданная рациональная дробь:

а)  $\frac{1}{(p-1)^2 p}$ ; б)  $\frac{p+2}{p^3-3p^2+3p-1}$ ; в)  $\frac{1-p}{p^2(p^2+1)}$ ; г)  $\frac{2p-1}{p^3+4p^2+5p}$ ;

д)  $\frac{1}{p^3(p-3)}$ ; е)  $\frac{p^2-p-1}{(p^2+3p+2)p^2}$ ; ж)  $\frac{p-4p^2}{(p^2+9)(p^2-7p+12)}$ .

3. Пользуясь теоремой запаздывания, найти оригинал, соответствующий заданному изображению:

а)  $\frac{e^{-4p}(p+1)}{p^2-5}$ ; б)  $\frac{e^p+e^{-p}}{p^2+6}$ ; в)  $\frac{e^{2p}}{p^2-8p}$ ; г)  $\frac{e^{-8p}+2p}{p^2-6p+10}$ ;

д)  $\frac{1+2e^{3p}}{p^2(2p^2-1)}$ ; е)  $\frac{e^{-2p}}{3p^7} + \frac{3e^{4p}}{(p^2+1)^2}$ .

4. Решить задачу Коши для следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} y' + 4y = 2e^t; \\ y(0) = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2y' - y = 3t - 1; \\ y(0) = -2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y' + y = \frac{3t^2}{2} + \sin t; \\ y(0) = 0; \end{cases} \\ \text{г) } & y' - 2y = \begin{cases} e^{2t}, & 0 \leq t < 1; \\ 1, & t \geq 1; \end{cases} \quad \text{д) } y' + 3y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1; \\ \operatorname{ch} t, & t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Решить следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} y'' - y = \operatorname{sh} t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 2 - e^{-2t}; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y'' + y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t \geq 1; \end{cases} \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \end{cases} \\ \text{д) } & \begin{cases} y'' - 5y' + 6y = -3; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = -1; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} y''' + y'' = 3e^{-t}; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \\ y''(0) = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \dot{x} + x - y = 1; \\ \dot{y} + 3x - 2y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = -1; \quad y(0) = 1; \\ \text{б) } & \begin{cases} \dot{x} + y = \operatorname{sh} t; \\ \dot{y} + x + y = 2, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 2; \\ \text{в) } & \begin{cases} \dot{x} + 2x - y = 2; \\ \dot{y} - 3x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0; \\ \text{г) } & \begin{cases} \ddot{x} - 3x + 4y = -5; \\ \ddot{y} + x + y = 5, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0; \\ y(0) = 0; \dot{y}(0) = 0; \end{matrix} \\ \text{д) } & \begin{cases} \dot{x} - y - z = 0; \\ \dot{y} - z - x = 0; \\ \dot{z} - x - y = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1; \quad y(0) = -1; \quad z(0) = 0. \end{matrix} \end{aligned}$$

8.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.  
ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

Изложим подробнее основные понятия и факты теории числовых рядов, на которые мы в значительной степени опирались в главе 2.

1<sup>0</sup>. Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, \dots$ . Формально составленная бесконечная сумма вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + \dots$$

или, коротко,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \quad (8.1.1)$$

называется числовым рядом; общий член последовательности  $\{w_n\}$  называется общим членом ряда (8.1.1).

Обозначим через

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$$

$n$ -ю частичную сумму ряда (8.1.1); при этом, по определению,  $S_1 = w_1$ .

Если существует предел вида

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

то числовой ряд (8.1.1) называется сходящимся, а в противном случае – расходящимся.

Число  $S$  назовем суммой сходящегося ряда; говорят также, что ряд (8.1.1) сходится к сумме  $S$  и применяют запись

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Главная задача, которая решается в теории числовых рядов – сходится или расходится данный ряд; вопрос о его сумме можно ставить лишь тогда, когда доказана сходимость. Сумму же сходящегося ряда всегда можно вычислить приближенно, взяв достаточно большое количество  $n$  членов в составе его частичной суммы  $S_n$ ; при этом точность вычисления увеличивается с ростом  $n$ .

**Пример 1.** Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)}$$

и найти его сумму.

**Решение.** Воспользуемся определением сходимости ряда и его суммы, для чего вычислим частичную сумму произвольного ( $n$ -го) порядка. Преобразуем общий член ряда к виду

$$\frac{i}{n(n+1)} = i \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = i \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

и сложим первые  $n$  членов. При этом мы обнаруживаем, что члены, начиная со второго и кончая предпоследним, будут взаимно уничтожаться:

$$S_n = i \left( \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = i \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

Теперь вычисляем следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} i \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = i.$$

Таким образом, ряд оказался сходящимся и его сумма  $S = i$ .

**Пример 2.** Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

**Решение.** Данный ряд состоит из действительных чисел; исследование разобьем на несколько этапов.

1. Поведение частичных сумм ряда определится следующей оценкой его общего члена:

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

2. Доказательство этой оценки основано на неравенстве

$$\ln(1+x) < x, \quad x > 0, \quad (8.1.2)$$

которое мы сейчас установим (читателю рекомендуется изобразить графики левой и правой части неравенства). Разность левой и правой частей (8.1.2)

$$y(x) = \ln(1+x) - x$$

– убывающая функция, поскольку  $y'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 < 0$  при  $x > 0$ .

Кроме того очевидно, что  $y(0) = 0$ ; значит разность  $y(x)$  остается отрицательной:  $\ln(1+x) - x < 0$  при всех  $x > 0$ . Это и утверждалось в соотношении (8.1.2).

3. Выбирая  $x = \frac{1}{n}$  в (8.1.2), имеем неравенство

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

для общего члена ряда, которое мы и хотели установить.

4. Теперь частичная сумма  $n$ -го порядка

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

имеет оценку снизу

$$S_n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1),$$

откуда вытекает, что  $S_n \rightarrow \infty$  вместе с  $\ln(n+1)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Итак, исследуемый ряд расходится.

З а м е ч а н и е. Указанный ряд называется гармоническим. Ниже будет рассмотрен более общий случай так называемого ряда Дирихле (иначе называемого обобщенным гармоническим рядом).

2<sup>0</sup>. Установим некоторые свойства сходящихся рядов. Пусть даны произвольные комплексные числа  $\tau, \rho$  и сходящиеся числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (8.1.3)$$

суммы которых равны  $U$  и  $V$  соответственно.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tau u_n + \rho v_n) \quad (8.1.4)$$

сходится и его сумма равна  $\tau U + \rho V$ .

Доказательство легко следует из определений сходимости и суммы ряда. Исключим из рассмотрения случай  $\tau = \rho = 0$ , в котором

утверждение становится очевидным (сумма ряда, состоящего из нулей, равна нулю) и запишем  $n$ -ю частичную сумму исследуемого ряда (8.1.4):

$$\begin{aligned} S_n &= (\tau u_1 + \rho v_1) + (\tau u_2 + \rho v_2) + \dots + (\tau u_n + \rho v_n) = \\ &= \tau(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + \rho(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \tau U_n + \rho V_n, \end{aligned}$$

где  $U_n, V_n$  – частичные суммы соответствующих рядов (8.1.3). В силу их сходимости имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau U_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho V_n = \tau U + \rho V.$$

Итак, ряд (8.1.4) оказался (на основании определения) сходящимся к сумме  $\tau U + \rho V$ .

В частности, при  $\rho = 0$ ,  $\tau \neq 0$  получаем что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau u_n$$

имеет то же поведение, что и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если исходный ряд был сходящимся, то его сумма умножится на  $\tau$ .

3°. Пусть  $w_n = u_n + iv_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , так что  $u_n$  – действительная, а  $v_n$  – мнимая части  $w_n$ . Ряд (8.1.1) тогда можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n).$$

Применяя доказанное в п. 2° свойство, получаем следующее утверждение.  
Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (8.1.5)$$

составленные из действительных и мнимых частей последовательности  $w_n$ , то сходится и ряд (8.1.1).

Верно и обратное: если сходится ряд (8.1.1), то имеет место сходимость обоих рядов (8.1.5); утверждение (как, впрочем, и предыдущее) вытекает из свойств пп. 2 и 3 параграфа 2.2, поскольку последовательности частичных сумм ( $n$ -го порядка) рядов (8.1.5) представляют собою, соответственно, действительную и мнимую часть сходящейся последовательности  $S_n$ .

4°. По заданной бесконечной последовательности  $\{w_n\}$  построим теперь ряд вида

$$w_{N+1} + w_{N+2} + \dots, \quad (8.1.6)$$

где  $N = 1, 2, \dots$  и назовем его  $N$ -м остатком ряда (8.1.1); иными словами,  $N$ -й остаток (8.1.1) есть ряд, полученный отбрасыванием первых  $N$  членов.

Обозначим при  $n > N$  через  $S_{N,n}$   $n$ -ю частичную сумму ряда-остатка (8.1.6)

$$S_{N,n} = w_{N+1} + \dots + w_n$$

и, в случае его сходимости, через  $R = R_N$  – сумму этого ряда, т.е.

$$R_N = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{N,n}.$$

Докажем, что ряд (8.1.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый его ряд-остаток (8.1.6). Другими словами, установим, что отбрасывание или добавление конечного числа (первых) членов не влияет на сходимость данного ряда.

Действительно, при  $n > N$  частичная сумма ряда (8.1.1) есть

$$S_n = w_1 + \dots + w_N + w_{N+1} + \dots + w_n = S_N + S_{N,n},$$

откуда следует, что  $S_n$  и  $S_{N,n}$  отличаются на фиксированную величину  $S_N$ , а значит одновременно имеют или не имеют предел при  $n \rightarrow \infty$ . Итак, ряды (8.1.1) и (8.1.6) сходятся или расходятся одновременно.

Установим также следующее свойство остатка: если (8.1.1) является сходящимся, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0.$$

Действительно, если перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в только что установленном равенстве  $S_n = S_N + S_{N,n}$ , то получим  $S - S_N = R_N$ , где  $R_N$  – сумма  $N$ -го остатка. Теперь, устремляя  $N \rightarrow \infty$  в последнем соотношении и пользуясь сходимостью (к сумме  $S$ ) ряда (8.1.1), имеем стремление к нулю последовательности  $R_N$ , что и утверждалось.

5°. В целях полноты изложения приведем здесь еще раз формулировки необходимого признака сходимости ряда и достаточного признака расходимости, доказанных в параграфе 2.3.

**Необходимый признак сходимости ряда.** Если ряд (8.1.1) сходится, то существует предел (при  $n \rightarrow \infty$ ) его общего члена  $w_n$ , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0.$$

Обратное утверждение неверно.

Достаточный признак расходимости. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| \neq 0 \quad (8.1.7)$$

(или если этот предел не существует), то ряд (8.1.1) расходится.

6°. Сумма геометрической прогрессии.

Пусть  $a$  и  $q$  – ненулевые комплексные числа. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots,$$

ряд, составленный из ее членов

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad (8.1.8)$$

и исследуем его сходимость.

С л у ч а й 1:  $|q| \geq 1$ ; в этом случае  $|aq^n| = |a| \cdot |q|^n \geq |a|$ . Могут представиться две возможности: либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |aq^n|$$

не существует, либо он существует и согласно неравенству  $|q| \geq 1$  его значение не меньше числа  $|a| > 0$ . В обоих случаях, по достаточному признаку расходимости ряда, получаем, что (8.1.8) расходится.

С л у ч а й 2:  $|q| < 1$ ; в этом случае  $n$ -я частичная сумма ряда (8.1.8) имеет вид

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

(формула суммы первых членов геометрической прогрессии известна из школьного курса, причем ее доказательство сохраняется и для прогрессий с комплексными членами).

Вычислим теперь предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \right).$$

Последний предел существует, так как очевидно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  при  $|q| < 1$ . Теперь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд оказался сходящимся к сумме

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, мы установили, что ряд (8.1.8) с  $a \neq 0$  является сходящимся тогда и только тогда, когда  $|q| < 1$  и нашли в этом случае его сумму.

## 8.2. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1°. Рассмотрим случай, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (8.2.1)$$

составлен из действительных положительных чисел, т.е. порожден последовательностью  $\{a_n\}$ ,  $a_n \in \mathbf{R}$ ,  $a_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; такой ряд называют знакоположительным. Обозначим через  $S_n$  частичную сумму ряда  $n$ -го порядка.

В вопросах исследования знакоположительных рядов потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Л е м м а. Если последовательность  $\{S_n\}$  ограничена сверху, то ряд (8.2.1) сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С ростом  $n$  последовательность  $\{S_n\}$  возрастает, так как в частичной сумме будут добавляться положительные члены. Кроме того, по условию, эта последовательность ограничена. Но, как известно из анализа, всякая возрастающая ограниченная последовательность имеет предел; в нашем случае существует (конечный) предел вида  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Это и означает сходимость ряда (8.2.1).

2°. Одним из способов исследования сходимости знакоположительного ряда является сравнение его общего члена с общим членом некоторого ряда с известным поведением ("эталонного ряда"). Примером эталонного является ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии (п. 6 параграфа 8.1). Другие примеры смотрите в конце настоящего параграфа.

Теорема 1 (сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (8.2.2)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (8.2.3)$$

и при всех  $n = 1, 2, \dots$  имеет место неравенство

$$a_n \leq b_n. \quad (8.2.4)$$

Тогда: 1) если сходится ряд (8.2.3) (к некоторой сумме  $B$ ), то сходится и ряд (8.2.2) (к некоторой сумме  $A$ ); при этом для их сумм имеет место соотношение  $A \leq B$ ;

2) если ряд (8.2.2) расходится, то расходится и ряд (8.2.3).

З а м е ч а н и е. Согласно свойству п. 4 параграфа 8.1 (отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость ряда) утверждение теоремы имеет место, если соотношение (8.2.4) выполняется не при всех  $n$ , а лишь начиная с некоторого номера  $N$ .

Доказательство. 1) Если ряд (8.2.3) сходится, то последовательность  $\{B_n\}$  его частичных сумм (как сходящаяся последовательность) ограничена сверху некоторой постоянной  $C$ :  $B_n \leq C$ . Если также  $\{A_n\}$  – последовательность частичных сумм ряда (8.2.2), то из неравенства (8.2.4) вытекает, что

$$A_n \leq B_n \leq C \quad (8.2.5)$$

при всех  $n$ . Следовательно, последовательность  $\{A_n\}$  ограничена сверху, а тогда по лемме п. 1 ряд (8.2.2) сходится. Переходя к пределу в неравенстве (8.2.5), получаем также  $A \leq B$ . Утверждение 1) установлено.

2) Если ряд (8.2.2) расходится, то (8.2.3) не может быть сходящимся по доказанному утверждению 1): тогда, согласно (8.2.4), обязан был бы сходиться и ряд (8.2.2). Теорема 1 полностью доказана.

3°. Теорема 2 (сравнения в предельной форме). Пусть даны два знакоположительных ряда (8.2.2) и (8.2.3), причем существует предел вида

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad L > 0. \quad (8.2.6)$$

Тогда ряды (8.2.2) и (8.2.3) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Согласно (8.2.6) и определению предела, для каждого  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < L$  существует номер  $N$ , такой что неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

имеет место при всех  $n > N$ . Из последнего соотношения (при указанных  $n$ ) вытекает, что

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon,$$

или, одновременно,

$$a_n < (L + \varepsilon)b_n, \quad b_n < \frac{1}{L - \varepsilon}a_n. \quad (8.2.7)$$

Согласно выбору  $\varepsilon$  имеет место оценки  $L + \varepsilon > 0$  и  $L - \varepsilon > 0$ . Тогда по свойству п. 2 параграфа 8.1 ряд с общим членом  $(L - \varepsilon)a_n$  ведет себя так же, как (8.2.2), а ряд с членами  $(L + \varepsilon)b_n$  – как (8.2.3). Теперь, в силу теоремы 1, первое неравенство в (8.2.7) будет означать, что из сходимости (8.2.3) вытекает сходимость (8.2.2), а из расходимости (8.2.2) – расходимость (8.2.3). Аналогичные утверждения следуют из второго неравенства в (8.2.7), если "поменять ролями" (8.2.2) и (8.2.3). Таким образом, поведение рядов (8.2.2) и (8.2.3) – одинаково, что и утверждалось.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2^n+1)n}.$$

Решение. Оценим сверху общий член ряда:

$$a_n < \frac{2n+1}{2^n n} = \left( \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^n \leq 3 \left( \frac{1}{2} \right)^n.$$

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

составлен из членов геометрической прогрессии с первым членом  $a = 3$  и знаменателем  $q = \frac{1}{2}$ , меньшим единицы; следовательно этот ряд сходится. По теореме 1 сравнения тогда сходится и данный ряд.

**Пример 2.** Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1}.$$

**Решение.** При больших значениях  $n$  поведение общего члена ряда

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 3n + 1}$$

определяется поведением старших степеней параметра  $n$ , что наводит на мысль рассмотреть последовательность  $\{b_n\}$  с общим членом

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

и сравнить (на основании признака в предельной форме) данный ряд с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

последний (гармонический) ряд, как установлено выше, является расходящимся. Имеем

$$\begin{aligned} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1} : \frac{1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2(1 + 3/n + 1/n^2)} = 1, \end{aligned}$$

т.е.  $L \neq 0$ , откуда заключаем, что поведение сравниваемых рядов одинаково, а значит данный ряд расходится.

4°. Использование признаков сравнения знакоположительных рядов предполагает наличие некоторого эталона для сравнения. Было бы полезно дополнить список признаков такими, которые позволяли бы исследовать поведение ряда, исходя лишь из вида его общего члена. Такие признаки предлагаются в настоящем и следующем пунктах параграфа.

Пусть дан знакоположительный ряд (8.2.1).

**Теорема 3** (радикальный признак Коши). Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}. \quad (8.2.8)$$

Если  $K < 1$ , то ряд (8.2.1) сходится; если же  $K > 1$ , то ряд расходится.

**Замечание.** В случае  $K = 1$  признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда: существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов, для которых  $K = 1$ .

**Доказательство.** Согласно (8.2.8) и определению предела, для каждого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$ , такой что неравенство

$$|\sqrt[n]{a_n} - K| < \varepsilon$$

имеет место при всех  $n > N$ . Из последнего соотношения (при указанных  $n$ ) вытекает, что

$$K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon. \quad (8.2.9)$$

**Случай 1:**  $K < 1$ . Ввиду произвольности выбора  $\varepsilon$  положим  $0 < \varepsilon < 1 - K$  и обозначим  $q = K + \varepsilon$ , так что  $0 < q < 1$ . Из (8.2.9) выте-

кает тогда, что  $a_n < (K + \varepsilon)^n$  или  $a_n < q^n$  при всех  $n > N$ . Поскольку сумма членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$$

является сходящимся рядом, то по первой теореме сравнения (см. также замечание к ней) сходится и ряд (8.2.1).

**Случай 2:**  $K > 1$ . В этом случае выберем  $\varepsilon$  так, что  $0 < \varepsilon < K - 1$  и обозначим  $Q = K - \varepsilon$ , так что  $Q > 1$ . Из (8.2.9) вытекает тогда, что  $a_n > (K - \varepsilon)^n$  или  $a_n > Q^n$  при всех  $n > N$ . Но в этом случае члены ряда (8.2.1) не могут стремиться к нулю

и ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Теорема полностью доказана.

Теорема 4 (признак Даламбера). Пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad (8.2.10)$$

Если  $D < 1$ , то ряд (8.2.1) сходится; если же  $D > 1$ , то ряд расходится.

Замечание. В случае  $D = 1$  (подобно признаку Коши) теорема 2 не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Доказательство мы не приводим, но его идея та же, что и в случае теоремы 1. Отметим только (это потребуется в дальнейшем), что при  $D > 1$  расходимость ряда имеет место ввиду нарушения необходимого признака сходимости – достаточного признака расходимости (см. доказательство признака Коши).

Пример 3. Исследовать сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

Решение. Имеем знакоположительный ряд с общим членом

$$a_n = \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2},$$

вид которого наводит на мысль использовать признак Коши. Имеем

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = e.$$

Поскольку  $K = e = 2,71... > 1$ , то данный ряд расходится.

5°. Следующий признак позволяет свести вопрос об исследовании сходимости знакоположительного ряда к более знакомой задаче об исследовании сходимости несобственного интеграла.

Рассмотрим аналитическое выражение общего члена  $a_n$  (формулу, которой он задан) ряда (8.2.1) и заменим в ней  $n$  на  $x$ . В результате получим некоторую функцию  $a(x)$ . Пусть эта функция непрерывна и убывает на промежутке  $[1, +\infty)$ .

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Если несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} a(x) dx \quad (8.2.11)$$

сходится, то сходится и ряд (8.2.1); если же интеграл (8.2.11) расходится, то расходится и ряд.

Доказательство основано на следующем неравенстве:

$$S_n - a_1 < \int_1^n a(x) dx < S_{n-1}.$$

Чтобы его доказать, используем следующие рассуждения геометрического характера (см. рис. 8.2.1).

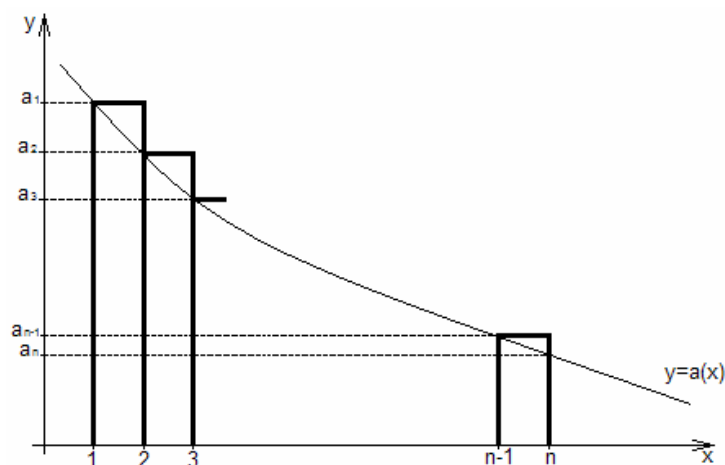


Рис. 8.2.1

Значение  $\int_1^n a(x) dx$  есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком  $y = a(x)$ , основанием которой является отрезок  $[1, n]$ . Точки с координатами  $(n, a_n)$  расположены на графике  $y = a(x)$ , а

$$S_n - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Первое слагаемое  $a_2 = 1 \cdot a_2$  численно равно площади прямоугольника, основание которого есть отрезок  $[1, 2]$  оси абсцисс, а высота  $h$  равна  $a_2$ ; второй член – площади прямоугольника с основанием  $[2, 3]$  и высотой  $h = a_3; \dots$ ; последний член суммы  $a_n$  численно совпадает с площадью прямоугольника, имеющего основанием отрезок  $[n-1, n]$  и высоту, равную  $a_n$ . Полученная ступенчатая фигура (см. рис. 8.2.1), состоящая из указанных прямоугольников, является вписанной по отношению к криволинейной трапеции, а значит имеет площадь, меньшую, чем криволинейная трапеция, так что неравенство

$$S_n - a_1 < \int_1^n a(x) dx$$

доказано.

Аналогичны рассуждения в случае второго неравенства: сумма  $S_{n-1} = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_{n-1}$  численно равна площади описанной ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, основания которых – отрезки  $[1, 2], [2, 3], \dots, [n-1, n]$ , а высоты равны, соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , так что площадь этой фигуры больше, чем площадь криволинейной трапеции.

В случае сходимости несобственного интеграла из неравенства

$$S_n < a_1 + \int_1^n a(x) dx < a_1 + \int_1^\infty a(x) dx$$

получаем ограниченность последовательности частичных сумм и, следовательно (на основании леммы п. 1) ее сходимость. В случае же расходимости несобственного интеграла и оценки

$$S_{n-1} > \int_1^n a(x) dx$$

имеем неограниченность  $S_{n-1}$ , а значит, расходимость ряда.

Итак, ряд ведет себя так же, как несобственный интеграл (8.2.11), что и требовалось доказать.

Пр и м е р 4. Рассмотрим ряд (называемый рядом Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbf{R}. \quad (8.2.12)$$

Докажем, что ряд (8.2.12) сходится при  $p > 1$  и расходится при остальных действительных значениях  $p$ .

Начнем со случая  $p > 0$ ,  $p \neq 1$  и применим интегральный признак Коши. Заменяя в записи общего члена ряда  $n$  на  $x$ , получим функцию  $a(x) = \frac{1}{x^p}$ ,  $x \in [1, +\infty)$ . Ясно, что на указанном промежутке функция  $a(x)$  непрерывна и убывает. Исследуем теперь несобственный интеграл (8.2.11).

Если  $p > 1$ , то

$$\begin{aligned} \int_1^\infty a(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T x^{-p} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^T = \frac{1}{1-p} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{T^{1-p}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

Итак, исследуемый интеграл оказался сходящимся, откуда и следует сходимость ряда (8.2.12).

Если  $0 < p < 1$ , то тот же интеграл вычисляется в виде

$$\int_1^\infty a(x) dx = \frac{1}{1-p} \lim_{T \rightarrow +\infty} (T^{1-p} - 1) = +\infty,$$

откуда следует расходимость ряда.

В случае  $p = 1$  снова применяем интегральный признак Коши с  $a(x) = \frac{1}{x}$ :

$$\int_1^\infty a(x) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\ln x) \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \ln T = +\infty,$$

так что ряд (8.2.12) расходится; тем самым еще раз установлена расходимость гармонического ряда.

Наконец, при  $p \leq 0$  имеем  $a_n = n^{-p} \geq 1$ , так что общий член ряда не стремится к нулю, а тогда ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

**З а м е ч а н и е.** Если к гармоническому ряду применить признаки Коши и Даламбера, то, как нетрудно проверить, получится соответственно  $K = 1$  и  $D = 1$ . В то же время условия  $K = 1$  и  $D = 1$  выполняются и для членов сходящегося ( $p > 1$ ) ряда Дирихле. Приведенные примеры подтверждают ранее сделанный вывод, что по одной только информации вида  $K = 1$  и  $D = 1$  о поведении ряда судить нельзя; следует провести дополнительное исследование: например, применить другие признаки.

### 8.3. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

1<sup>0</sup>. Рассмотрим знакоположительную последовательность

$$\{a_n\}, a_n \in \mathbf{R}, a_n > 0, n = 1, 2, \dots \quad (8.3.1)$$

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (8.3.2)$$

называется знакочередующимся. Достаточным признаком его сходимости является следующий признак Лейбница, который мы приводим без доказательства.

**Т е о р е м а 1.** Если последовательность (8.3.1) является убывающей и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то знакочередующийся ряд (8.3.2) сходится.

**П р и м е р 1.** Ряд вида

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (8.3.3)$$

является сходящимся, поскольку выполнены оба условия признака Лейбница: последовательность  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  является, очевидно, убывающей и имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2<sup>0</sup>. Рассмотрим ряд из действительных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (8.3.4)$$

среди членов которого имеются как положительные, так и отрицательные числа; такой ряд называется знакопеременным. Рассмотрим также ряд, составленный из абсолютных величин членов (8.3.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \quad (8.3.5)$$

Будем считать, что количество как положительных, так и отрицательных членов в (8.3.4) является бесконечным, так как в противном случае вопрос о сходимости сводится к случаю знакоположительных рядов. В самом деле, если, например, количество положительных членов в (8.3.4) оказывается конечным, то, начиная с некоторого номера, все члены ряда будут отрицательными. Тогда поведение ряда определяется поведением этого остатка (свойство п. 4 параграфа 8.1), состоящего только из отрицательных членов. Если же изменить знаки всех членов ряда – остатка на противоположные, т.е. умножить все члены на  $(-1)$ , то его поведение не изменится (свойство п. 2 параграфа 8.1). Таким образом, вопрос сведен к исследованию сходимости полученного знакоположительного ряда.

**Т е о р е м а 2.** Если сходится ряд (8.3.5), то сходится и ряд (8.3.4).

Сходимость ряда (8.3.4) в этом случае называется абсолютной.

Обратное утверждение неверно: знакопеременный ряд может быть сходящимся, тогда как (8.3.5) – расходящийся. Примером служит (8.3.3), для которого ряд из абсолютных величин – это расходящийся (параграф 8.1, п. 1) гармонический ряд.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 2. Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (8.3.6)$$

–  $n$ -я частичная сумма ряда (8.3.4), а

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \quad (8.3.7)$$

–  $n$ -я частичная сумма ряда из абсолютных величин (8.3.5).

Выделим в (8.3.6) сумму всех положительных членов, и обозначим ее через  $S_n^+$ , а сумму абсолютных величин всех отрицательных членов (в составе  $S_n$ ) обозначим через  $S_n^-$ . Суммы  $S_n^+$  и  $S_n^-$ , составленные из положительных чисел, возрастают с ростом  $n$ . Тогда, очевидно,

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \quad \sigma_n = S_n^+ + S_n^-.$$

Последовательность (8.3.7) имеет предел (ввиду сходимости ряда (8.3.5)), а значит является ограниченной, т.е. существует постоянная  $C > 0$ , такая что  $\sigma_n \leq C$  при всех  $n$ . Ясно, что тогда  $S_n^+ \leq S_n^+ + S_n^- = \sigma_n \leq C$ , и, точно так же,  $S_n^- \leq \sigma_n \leq C$ . Значит, последовательности  $S_n^+$  и  $S_n^-$ , будучи возрастающими и ограниченными, имеют конечные пределы. Тогда имеет предел их разность  $S_n$ , что и означает сходимость ряда (8.3.4).

3°. Вернемся к рассмотрению ряда с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad (8.3.8)$$

одновременно рассматривая соответствующий ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|. \quad (8.3.9)$$

Рассмотрим также два ряда, составленные из действительных частей и мнимых частей последовательности  $\{w_n\}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (8.3.10)$$

где  $u_n = \operatorname{Re} w_n$ ,  $v_n = \operatorname{Im} w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

В параграфе 2.3 (теорема п. 4) доказано, что *если сходится ряд из модулей (8.3.9), то сходится и ряд (8.3.8)*.

В этом случае говорят, что (8.3.8) сходится абсолютно.

Выше показано (на примере ряда из действительных чисел), что числовой ряд может сходиться, тогда как ряд из модулей расходится. В этом случае сходимость ряда (8.3.8) называют условной.

**Т е о р е м а 3.** Ряд (8.3.8) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся оба ряда (8.3.10).

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** При доказательстве теоремы п. 4 параграфа 2.3 уже установлено, что из сходимости (8.3.9) вытекает абсолютная сходимость обоих рядов (8.3.10). Остается установить обратное утверждение. Заметим, что при каждом  $n$  наибольшее из двух чисел  $|u_n|$  и  $|v_n|$  не превосходит их суммы  $|u_n| + |v_n|$ , а тогда

$$\begin{aligned} |w_n| &= \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq \sqrt{(\max\{|u_n|, |v_n|\})^2 + (\max\{|u_n|, |v_n|\})^2} = \\ &= (\max\{|u_n|, |v_n|\})\sqrt{2} \leq (|u_n| + |v_n|)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Если теперь абсолютно сходятся оба ряда (8.3.10), то будет сходящимся и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)\sqrt{2}$$

(см. простейшие свойства сходящихся рядов, п. 2 параграфа 8.1). Согласно теореме 1 сравнения будем иметь тогда сходимость (8.3.9), чем и завершается доказательство теоремы 3.

4°. Как следует из результатов пп. 2, 3, достаточные условия сходимости ряда из модулей (8.3.9) являются одновременно и достаточными условиями сходимости ряда комплексных чисел (8.3.8). Поэтому признаки сходимости знакоположительных рядов, которым мы выше уделили столь значительное внимание, выступают здесь признаками сходимости (абсолютной) рядов с комплексными членами. Уточним последнюю мысль.

Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|}$$

(будем называть его числом Коши). Если  $K < 1$ , то ряд (8.3.8) сходится абсолютно. Если же  $K > 1$ , то ряд (8.3.8) расходится.

Стоит отметить, что при  $K > 1$  ряд из модулей (8.3.9) расходится ввиду того, что не выполнен необходимый признак сходимости (см. доказательство теоремы 3 параграфа 8.2), но тогда не могут стремиться к нулю и члены  $w_n$ ; таким образом и ряд (8.3.8) оказывается расходящимся.

Аналогично обстоит дело и с "числом Даламбера"

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}:$$

если  $D < 1$ , то ряд (8.3.8) сходится абсолютно; если же  $D > 1$ , то (8.3.8) расходится.

**П р и м е р 2.** Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (i-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

*Решение.* Имеем общий член ряда в виде

$$w_n = (i-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$$

и

$$|i-1| = \sqrt{2}, \sin \frac{\pi}{2^n} > 0;$$

последнее неравенство имеет место, так как при  $n = 1, 2, \dots$  значения аргумента  $\frac{\pi}{2^n}$  принадлежат первой четверти тригонометрической окружности. Значит,

$$|w_n| = (\sqrt{2})^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n},$$

а тогда число Даламбера

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2})^{n+1} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{(\sqrt{2})^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

вычисляя последний предел, мы воспользовались эквивалентностью бесконечно малых  $\sin t$  и  $t$  при  $t \rightarrow 0$  в случаях, когда значения  $t$  выбраны равными  $\frac{\pi}{2^{n+1}}$  и  $\frac{\pi}{2^n}$ .

Итак,  $D = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ , откуда следует, что данный ряд сходится абсолютно.

**Пример 3.** Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-ni}.$$

*Решение.* Имеем

$$|w_n| = \frac{n}{|1-ni|} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{n}{n\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}},$$

и теперь легко заметить, что  $|w_n|$  не стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = 1.$$

Согласно достаточному признаку расходимости, данный ряд будет расходящимся.

## 8.4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В настоящем параграфе мы докажем утверждения, на которые делались ссылки в параграфе 2.4.

<sup>10</sup>. Пусть  $S(z)$  есть сумма функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \tag{8.4.1}$$

на замкнутой ограниченной области  $G$  и при каждом  $n$  существует наибольшее значение модуля уклонения  $S_n(z)$  от  $S(z)$

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(z) - S(z)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Напомним, что ряд (8.4.1) называется равномерно сходящимся на  $G$  к сумме  $S_n(z)$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

и докажем сформулированный в параграфе 2.4 достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

**Т е о р е м а .** Если существует числовая последовательность  $\{\alpha_n\}$ , такая что для всех  $z \in G$ ,  $n = 1, 2, \dots$  имеют место оценки

$$|u_n(z)| \leq \alpha_n \quad (8.4.2)$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad (8.4.3)$$

– сходящийся, то ряд (8.4.1) равномерно сходится на  $G$ .

При выполнении условий теоремы 1 говорят, что ряд (8.4.1) *мажорируем* на  $G$ , а знакоположительный ряд (8.4.3) называется *мажорантным*. В этих терминах теорема может быть сформулирована так: *мажорируемый на  $G$  функциональный ряд сходится равномерно на  $G$* .

Отметим также (не приводя здесь соответствующих примеров), что условие мажорируемости является лишь достаточным для равномерной сходимости, но не является необходимым.

**Доказательство.** Ввиду соотношения (8.4.2), выполненного на  $G$ , имеем абсолютную сходимость (на  $G$ ) ряда (8.4.1) к некоторой сумме  $S(z)$ ; при этом

$$S(z) - S_n(z) = r_n(z), \quad (8.4.4)$$

где  $r_n(z)$  – сумма ряда-остатка (см. п. 4 параграфа 8.1).

По определению суммы ряда и ввиду сохранения для функций комплексного переменного привычных свойств пределов (предельный переход под знаком модуля и предельный переход в неравенстве) имеем

$$\begin{aligned} |r_n(z)| &= \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (u_{n+1}(z) + \dots + u_m(z)) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |u_{n+1}(z) + \dots + u_m(z)| \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} (|u_{n+1}(z)| + \dots + |u_m(z)|) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_m). \end{aligned}$$

Сумма под знаком последнего написанного предела представляет собою  $m$ -ю частичную сумму  $n$ -го остатка числового ряда (8.4.3), а значение предела – сумма его  $n$ -го остатка, которую мы обозначим через  $r_n^*$ :

$$|r_n(z)| \leq r_n^*.$$

Ввиду сходимости ряда (8.4.3) имеем (п. 4 параграфа 8.1)  $r_n^* \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно (8.4.4), в определении равномерной сходимости функционального ряда при выполнении условия теоремы тогда имеем

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(z) - S(z)| = \max_{z \in G} |S(z) - S_n(z)| = \max_{z \in G} |r_n(z)| \leq r_n^*$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

что и означает равномерную (на  $G$ ) сходимость ряда (8.4.1).

**2<sup>0</sup>. Т е о р е м а 2.** Если ряд (8.4.1), составленный из функций  $u_n(z)$ , непрерывных на замкнутой ограниченной области  $G$ , равномерно сходится на этой области, то его сумма  $S(z)$  непрерывна в каждой точке  $z_0 \in G$ , т.е.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} S(z) = S(z_0). \quad (8.4.5)$$

**Доказательство.** Оценим  $|S(z) - S(z_0)|$ . Имеем, в силу (8.4.4),

$$\begin{aligned} |S(z) - S(z_0)| &= |(S_n(z) + r_n(z)) - (S_n(z_0) + r_n(z_0))| \leq \\ &\leq (|S_n(z) - S_n(z_0)| + |r_n(z)| + |r_n(z_0)|) \leq |S_n(z) - S_n(z_0)| + 2 \max_{z \in G} |r_n(z)| = \\ &= |S_n(z) - S_n(z_0)| + 2\rho_n, \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

где, по определению равномерной сходимости ряда,  $\rho_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку конечная сумма  $S_n(z)$  непрерывных (на  $G$ ) функций является непрерывной, имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} S_n(z) = S_n(z_0) \quad \text{или} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} |S_n(z) - S_n(z_0)| = 0,$$

а тогда в силу (8.4.6),

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |S(z) - S(z_0)| \leq \lim_{z \rightarrow z_0} |S_n(z) - S_n(z_0)| + 2\rho_n = 2\rho_n. \quad (8.4.7)$$

Левая часть (8.4.7) не зависит от  $n$  и, следовательно, сохраняет свой вид при предельном переходе (по  $n$ ), тогда как правая стремится к нулю. Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в обеих частях (8.4.7), получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |S(z) - S(z_0)| = 0,$$

откуда и следует (8.4.5).

## 8.5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ: СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

<sup>1</sup>°. Рассмотрение начнем с общих свойств равномерно сходящихся рядов функций  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) действительного переменного  $x$ . Применительно к этому случаю формулировки выглядят следующим образом.

1) Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (8.5.1)$$

называется *равномерно сходящимся* на отрезке  $[a, b]$  к сумме  $S(x)$ , если имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

2) Если ряд (8.5.1) *мажорируем* на отрезке  $[a, b]$ , то он обладает *равномерной сходимостью* на этом отрезке.

3) Ряд (8.5.1), составленный из функций, *непрерывных* на отрезке  $[a, b]$  и *равномерно сходящийся* на  $[a, b]$ , *обладает непрерывной на этом отрезке суммой и допускает возможность почленного интегрирования* по всякому  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ .

4) Если ряды (8.5.1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad (8.5.2)$$

обладают *равномерной сходимостью* на отрезке  $[a, b]$ , и суммы их равны, соответственно, функциям  $S(x)$  и  $\phi(x)$ , то сумма  $S(x)$  ряда (8.5.1) *дифференцируема* при всех  $x \in (a, b)$ ; при этом  $S'(x) = \phi(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = S'(x).$$

Утверждения 2) и 3) являются частными случаями теорем, установленных выше: см. признак Вейерштрасса, доказанный в п. 1 параграфа 8.4, свойство непрерывности суммы ряда и возможность почленного интегрирования, установленные в п. 2 параграфа 8.4 и п. 3 параграфа 4.1.

Остается доказать утверждение 4). Ввиду равномерной сходимости ряда (8.5.2) можно произвести его почленное интегрирование по некоторому отрезку  $[\alpha, x] \subset [a, b]$ . Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x f'_n(x) dx = \int_{\alpha}^x \phi(x) dx. \quad (8.5.3)$$

Поскольку

$$\int_{\alpha}^x f'_n(x) dx = f_n(x) - f_n(\alpha), \quad n = 1, 2, \dots,$$

то левая часть последнего соотношения есть разность значений суммы  $S(x)$ , вычисленных в точках  $x$  и  $\alpha$ :

$$S(x) - S(\alpha) = \int_{\alpha}^x \phi(x) dx.$$

Продифференцируем теперь обе части последнего соотношения и воспользуемся существованием производной интеграла с переменным верхним пределом; в нашем случае

$$\left( \int_{\alpha}^x \phi(x) dx \right)' = \phi(x), \quad x \in (a, b).$$

В результате получаем дифференцируемость  $S(x)$  и соотношение

$$S'(x) - (S(\alpha))' = \phi(x), \quad x \in (a, b);$$

при этом  $(S(\alpha))' = 0$ , так как  $\alpha$  – постоянная величина. Утверждение доказано.

2<sup>0</sup>. Рассмотрим ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad x \in \mathbf{R} \quad (8.5.4)$$

с действительными коэффициентами  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; будем употреблять также запись

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Пересечением круга сходимости  $\{z : |z| < R\}$  степенного ряда (2.4.2) комплексной переменной с осью абсцисс является интервал  $(-R, R)$ , поэтому для ряда (8.5.4) следует вести речь об интервале сходимости, внутри которого он сходится абсолютно, а вне которого расходится. Радиус интервала (радиус сходимости) может быть, очевидно, и здесь найден по одной из формул (2.4.5)  $R = \frac{1}{K}$  или  $R = \frac{1}{D}$ , где, соответственно случаю (8.5.4),

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \quad (8.5.5)$$

Стоит отметить, что общая теория не позволяет судить о поведении такого ряда в концевых точках интервала, и для каждого конкретного степенного ряда исследование в обеих концевых точках проводят дополнительно.

3<sup>0</sup>. Из результатов п. 1 параграфа 4.1 вытекает, что степенной ряд (8.5.4) мажорируем на всяком отрезке вида  $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$ , а значит, равномерно сходится на этом отрезке. Отсюда вытекает возможность почленного интегрирования ряда по всякому отрезку, расположенному внутри интервала сходимости (см. п. 1 настоящего параграфа).

Возможность же почленного дифференцирования будет обеспечена равномерной сходимостью ряда составленного из производных; см. утверждение 4) настоящего параграфа. Достаточно поэтому установить мажорируемость ряда

$$(a_0)' + (a_1x)' + (a_2x^2)' + \dots + (a_nx^n)' + \dots,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (8.5.6)$$

на любом отрезке  $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$ . Доказательство мажорируемости проведем в предположении, что существует предел, обозначенный через  $D$  в (8.5.5); следовательно  $R = \frac{1}{D}$ .

Определим радиус сходимости  $\tilde{R}$  ряда (8.5.6). Соответствующее число Даламбера имеет вид

$$\tilde{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|a_{n+1}|}{n|a_n|} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \cdot D,$$

следовательно,  $\tilde{R} = \frac{1}{D}$ . Таким образом,  $\tilde{R} = R$ , и интервалы сходимости рядов (8.5.4), (8.5.6) совпадают. Окончательно, имеем мажорируемость ряда (8.5.6) на всяком отрезке  $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$ , а значит и возможность почленного дифференцирования исходного степенного ряда (8.5.4).

4<sup>0</sup>. Если рассуждения п. 3 применить к ряду из производных (8.5.6), то получаем возможность и его почленного дифференцирования в интервале  $(-R, R)$ . Повторяя и далее указанные рассуждения, приходим к следующему важному выводу: *степенной ряд, обладающий суммой  $S(x)$  в некотором интервале сходимости, можно почленно дифференцировать сколько угодно много раз в этом интервале; при этом сумма ряда из  $n$ -х производных совпадает с  $S^{(n)}(x)$ .*

5<sup>0</sup>. П р и м е р ы.

1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}.$$

*Решение.* Имеем функциональный ряд, который становится степенным после замены переменной  $y = e^{-x}$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n.$$

Получена сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $y$ . Ряд сходится тогда и только тогда (п. 6 параграфа 8.1), когда  $|y| < 1$ . Значит, область сходимости определяется неравенством  $e^{-x} < 1$ , откуда  $-x < 0$ , так что  $x > 0$ . Окончательно получили, что область сходимости ряда есть полупрямая  $x > 0$ .

2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{nx^n}.$$

*Решение.* Если положить  $X = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , то получим степенной ряд действительной переменной  $X$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} X^n$$

с коэффициентами вида  $a_n = \frac{5^n}{n}$ . Число Даламбера находим в виде

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n5^{n+1}}{(n+1)5^n} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 5,$$

откуда  $R = \frac{1}{5}$ , и интервал абсолютной сходимости ряда определяется соотношением

$$-\frac{1}{5} < X < \frac{1}{5};$$

вне этого интервала степенной ряд расходится. Исследуем концы интервала.

а)  $X = \frac{1}{5}$ . В этой точке значение общего члена ряда

$$f_n(X) = \frac{5^n}{n} X^n \text{ есть величина } f_n\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5^n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{n},$$

так что приходим к числовому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(гармонический ряд), который расходится.

б)  $X = -\frac{1}{5}$ . Имеем

$$f_n\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5^n}{n} \frac{(-1)^n}{5^n} = \frac{(-1)^n}{n};$$

получаемый знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

является условно сходящимся (параграф 8.3, пп. 1, 2).

Итак, область сходимости степенного ряда определяется соотношением  $-\frac{1}{5} \leq X < \frac{1}{5}$ . Поскольку  $X = \frac{1}{x}$ , то остается решить двойное неравенство  $-\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{5}$ . Можно записать, что  $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{5}$  либо  $\frac{1}{x} = -\frac{1}{5}$ . В первом случае имеем  $|x| > 5$ , что равносильно совокупности двух неравенств:  $x > 5$ ,  $x < -5$ ; во втором —  $x = -5$ . Окончательно имеем область сходимости в виде

$$x \in (-\infty, -5] \cup (5, +\infty).$$

## 8.6. РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ В СТЕПЕННОЙ РЯД

1<sup>0</sup>. Одной из задач, рассмотренных выше, была задача о представлении данной функции суммой соответствующего степенного ряда. В случае функции действительного переменного  $y = f(x)$ , такой ряд имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots; \quad a_n \in \mathbf{R}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.6.1)$$

Как отмечалось выше, в интервале сходимости  $(-R, R)$  записанный ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно много раз. Поскольку  $f(x)$  – его сумма, то она необходимо должна быть дифференцируема сколько угодно много раз. Докажем, что в этом случае разложение (8.6.1) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (8.6.2)$$

Действительно,

а) полагая  $x = 0$  в (8.6.1), получаем  $a_0 = f(0)$ ;

б) почленно дифференцируя (8.6.1) и снова полагая  $x = 0$ , имеем  $a_1 = f'(0)$ ;

в) в результате второго почленного дифференцирования (8.6.1) при  $x = 0$  получаем  $f''(0) = 2!a_2$ , откуда  $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$ ;

г) на  $(n+1)$  шаге приходим к равенству  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , откуда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Учитывая вид полученных коэффициентов  $a_n$ , мы и получаем (8.6.2); говорят также, что функция  $f(x)$  разложена в ряд по степеням  $x$ , или, коротко, в ряд Маклорена.

Поскольку в настоящем пункте мы проводим лишь обзорное рассмотрение, то ограничимся формулировкой следующего достаточного условия разложимости в ряд Маклорена функций действительного переменного: *если для всех значений  $n = 1, 2, \dots$  существует постоянная  $C > 0$  такая, что в некоторой окрестности точки  $x_0 = 0$  выполняется неравенство*

$$|f(x)| + |f^{(n)}(x)| \leq C,$$

то функция  $f(x)$  в этой окрестности есть сумма соответствующего ряда Маклорена (8.6.2).

Нетрудно поверить, что это утверждение применимо к функциям  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$  во всякой окрестности точки  $x_0 = 0$ . Если вычислить коэффициенты ряда Маклорена для каждой из них, то получим, что при всех значениях действительного аргумента имеют место разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (8.6.3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Именно эти разложения служили в параграфе 2.5 основой для определения функций комплексного переменного  $w = e^z$ ,  $w = \sin z$ ,  $w = \cos z$ .

Остановимся на обосновании, например, соотношения (8.6.3). Имеем

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а тогда

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1.$$

Подставляя полученные значения в (8.6.2), мы приходим к (8.6.3). Для доказательства сходимости ряда (8.6.3) при каждом  $x$  к сумме  $f(x) = e^x$ , заметим, что в каждом интервале  $(-R_0, R_0)$  имеет место соотношение

$$|f(x)| + |f^{(n)}(x)| \leq C_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где постоянная  $C_0 = e^{R_0}$ .

На основании сформулированного выше достаточного условия разложимости функции в ряд Маклорена тогда во всяком фиксированном интервале ряд (8.6.3) имеет своей суммой именно  $f(x) = e^x$ . Ввиду произвольности выбранного интервала разложение (8.6.3) имеет место при всех действительных  $x$ , что и утверждалось.

### 8.7. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 8

1<sup>0</sup>. Исследовать сходимость знакоположительного ряда:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\sqrt{n}}{2+n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2+1}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2n}{n}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+3^n}{4^n} \right)^{2n}$ .

2<sup>0</sup>. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и в случае сходимости установить ее характер (абсолютная или условная):

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+n+1}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ ;

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^n}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^{1-2n} 4^{n+3}$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{e} \right)^n$ .

3<sup>0</sup>. Найти интервал сходимости степенного ряда ( $x$  – действительная переменная):

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n-1}}$ ; б)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)! x^n$ ;

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^{2n}}$ ; г)  $\sum_{n=0}^{\infty} (x-10)^{n+1}$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+7)^n}{n+7}$ .

4<sup>0</sup>. Найти область сходимости функционального ряда

а)  $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \sin^m \frac{x}{6}$ ; б)  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \ln^m \frac{1}{x-1}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.А. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.
2. Маркушевич, А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.
3. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 640 с.
4. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1985. – Ч. 1. – 336 с.
5. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 478 с.

