МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЛЬЯНОВСКОЕ ВЫСШЕЕ АВИАЦИОННОЕ УЧИЛИЩЕ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (ИНСТИТУТ)

Н.С. Знаенко

ОПОРНЫЕ СХЕМЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

УВАУ ГА

Ульяновск 2011

ББК В1я7
З–70

Рецензент: доцент, канд. техн. наук *В. Г. Шубович*.

Знаенко, Н. С. Опорные схемы по высшей математике : учеб. пособие / Н. С. Знаенко. – Ульяновск : УВАУ ГА(И), 2011. – 90 с.

Изложен основной материал таких разделов курса высшей математики, как линейная и векторная алгебра, дискретная математика, аналитическая геометрия, математический анализ в виде схем и таблиц. Подобная форма изложения позволяет курсантам определить структуру изучаемого материала, выделить связи между его компонентами, способствует формированию умений работать с учебной литературой и применять теоретические знания к решению задач.

Предназначено для курсантов УВАУ ГА всех специализаций.

Печатается по решению Редсовета училища.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Не секрет, что математике отводится не последнее место в общей картине человеческих знаний.

Являясь с незапамятных времен одной из основ естествознания и техники, математика в настоящее время значительно расширила сферу своего непосредственного приложения и проявляет тенденцию проникновения в области традиционно нематематические, в связи с чем изменила свое положение в ряду других наук. Методы математики служат средством решения важнейших народнохозяйственных задач. Вторжение математических методов в какую-нибудь область науки обычно вызывает глубокие изменения в структуре этой области, вынуждает облекать ее теоретические положения в такую форму, которая характерна для математических теорий. Вследствие этого всевозрастающее число научных областей предъявляет к своим специалистам совершенно новые требования: для успешной практической работы необходимо умение оперировать понятиями и методами, облеченными в математическую форму.

Преподавание высшей математики в вузе имеет цели:

– формирование личности студента как специалиста с высшим специальным образованием, развитие его интеллекта и способностей к логическому и аналитическому мышлению;

– воспитание у студентов математической культуры, понимание роли и места математики в современной цивилизации и в мировой культуре;

– обучение основным математическим методам при поиске оптимальных решений и выборе наилучших способов реализации этих решений необходимых для изучения естественных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;

– привитие практических навыков пользования современными средствами вычислительной техники.

Системно-структурный подход к изложению содержания курса математики поможет в достижении поставленных целей. Замена словесного описания таблицами и схемами позволит определить структуру изучаемого материала, выделить существенные связи между его компонентами, сформировать целостное представление о предмете.

В данном пособии в виде схем и таблиц изложены основы курса высшей математики. Оно будет полезно как при подготовке к прослушиванию лекционного материала, так и для восстановления в памяти положений изложенного курса. Также пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении самостоятельных работ, типовых расчетов, домашних заданий, подготовки к экзаменам, зачетам и итоговому тестированию.

Содержание работы отражает многолетний опыт преподавания математики в вузе. В целом работа направлена на формирование основных математических понятий и овладение математическими методами, что необходимо высококвалифицированному инженеру-исследователю, экономисту, менеджеру.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАТРИЦЫ

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|, \quad \begin{array}{l} i = \overline{1, m}; \\ j = \overline{1, n}. \end{array}$$

a_{ij} – элементы матрицы;
i – номер строки;
j – номер столбца.

$m \neq n$,
A – прямоугольная матрица

$m = n$,
A – квадратная матрица

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B - \text{одинаковой размерности} \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

Виды матриц

Матрица – строка
$$A = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n})$$

Матрица – столбец
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица
$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единичная матрица
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Сложение матриц

$$\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=\left\|a_{ij}\right\|+\left\|b_{ij}\right\|=\left\|c_{ij}\right\|=\underset{m\times n}{C}$$

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}+\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

Свойства

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $A+0=A$

Умножение матрицы на число

$$\alpha A=\alpha\left\|a_{ij}\right\|=\left\|\alpha a_{ij}\right\|,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

Свойства

1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
2. $(A+B)\cdot\alpha=\alpha A+\alpha B$
3. $\alpha\beta A=(\alpha A)\beta$
4. $A\cdot 0=0$

Транспонирование матриц

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\qquad \underset{n\times m}{A^T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства

1. $\left(A^T\right)^T=A$
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$
3. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Умножение матриц

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}=\underset{m\times k}{C}$$ («ширина» матрицы A = «высоте» матрицы B)

$C=\left\|c_{ij}\right\|$, где

$$c_{ij}=\left(a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}\right)\cdot\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \ldots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}\cdot\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}}=\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}}$$

Свойства

1. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
2. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
3. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
4. $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$
5. $A\cdot B\neq B\cdot A$
6. $A\cdot E=E\cdot A=A$
7. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$

Возведение в степень

A – квадратная матрица

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\text{ – раз}}$$

Свойства

1. $A^0=E$
2. $A^1=A$
3. $A^m\cdot A^k=A^{m+k}$
4. $\left(A^m\right)^k=A^{mk}$

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Обратная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы A $(\Delta \neq 0)$

A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$$

Ранг матрицы

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to$$

Ранг матрицы A (rang A) – наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rk} \end{pmatrix} \to \text{rang } B=r.$$

B – ступенчатая матрица,

$b_{ij}\neq 0, \quad i=\overline{1,r}, \quad r<k$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определители второго порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \det A = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ – число}$$

$$\Delta_2 = {}^{+}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

побочная диагональ — главная диагональ

Определители третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ – число}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами и наоборот (т. е. транспонировать).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Свойства определителей

3. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.
   4.1. Если все элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю.

5. Если все элементы строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

6. Если у определителя элементы какой-либо строки (столбца) состоят из 2-х слагаемых, то такой определитель равен сумме 2-х определителей, у первого из которых соответствующими элементами являются первые слагаемые, у второго – вторые:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b \\ a_{21} & a_{22}+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & c \end{vmatrix}.$$

7. Определитель не изменится, если к его элементам какой-нибудь строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \times k \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минор элемента a_{ij} определителя Δ –
это определитель, полученный из данного путем вычеркивания i-ой строки – j-го столбца. Обозначается M_{ij}.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя Δ –
это минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Обозначается A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Свойства определителей

8. *(Разложение определителя по элементам строки (столбца))*
   Определитель равен сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения
   $$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$
9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю
   $$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

Определители n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

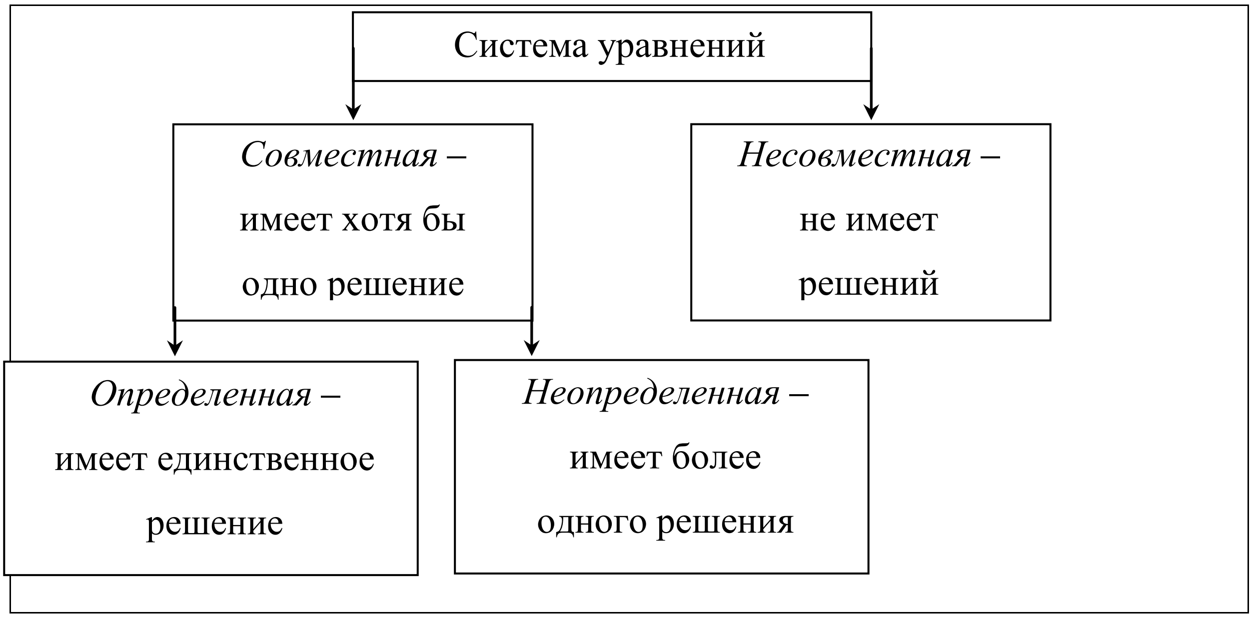
где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные;

a_{ij} $\left(i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}\right)$ – коэффициенты при неизвестных;

b_i – свободные члены.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *решение системы*, т. е. набор чисел, при подстановке которых в систему каждое уравнение системы превращается в тождество.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$ – однородная система



СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Способы решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. *Формулы Крамера*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

2. *Матричный способ*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(матрица системы)

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

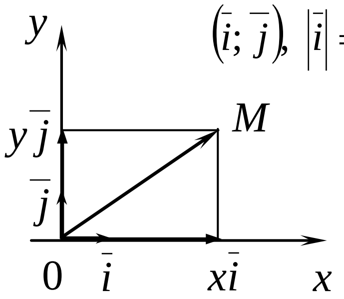
3. *Метод Гаусса*

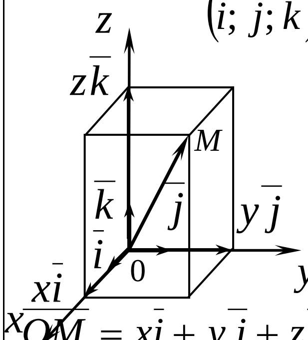
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы.

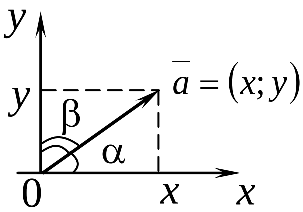
Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду, используя следующие преобразования.

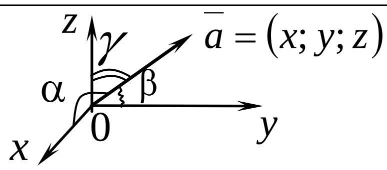
1. Вычеркивание нулевой строки.
2. Перестановка строк (расширенной матрицы), столбцов (матрицы системы).
3. Умножение строки расширенной матрицы на число, отличное от нуля.
4. Прибавление к одной строке расширенной матрицы другой строки, умноженной на число, отличное от нуля.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

<table>
<tr><th colspan="2">ВЕКТОРЫ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ</th></tr>
<tr><th>ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ</th><th>ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ</th></tr>
<tr><td>$(\bar{i};\bar{j}),\ |\bar{i}|=|\bar{j}|=1,\ \bar{i}\perp\bar{j}$


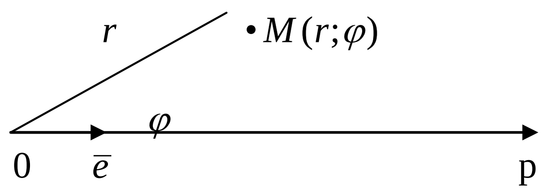
$\overline{OM}=x\bar{i}+y\bar{j}=(x;y)$</td><td>$(\bar{i};\bar{j};\bar{k}),\ |\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1,$ $\bar{i}\perp\bar{j},\bar{i}\perp\bar{k},\ \bar{j}\perp\bar{k}$


$\overline{OM}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=(x;y;z)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Координаты вектора</td></tr>
<tr><td>$A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)$
$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$</td><td>$A(x_1;y_1;z_1),\ B(x_2;y_2;z_2)$
$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Длина вектора</td></tr>
<tr><td>$\bar{a}=(x;y),\quad |\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$</td><td>$\bar{a}=(x;y,z),\quad |\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Действия над векторами</td></tr>
<tr><td>$\bar{a}=(x_1;y_1),\ \ \bar{b}=(x_2;y_2),$
$\bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2),$
$k\bar{a}=(kx_1;ky_1)$</td><td>$\bar{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \ \bar{b}=(x_2;y_2,z_2),$
$\bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2),$
$k\bar{a}=(kx_1;ky_1;kz_1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Условие коллинеарности векторов</td></tr>
<tr><td>$\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\pm\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$</td><td>$\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\pm\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Направляющие косинусы</td></tr>
<tr><td>

$\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|};\quad x=|\bar{a}|\cdot\cos\alpha$
$\cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|};\quad y=|\bar{a}|\cdot\cos\beta$</td><td>

$\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|};\quad x=|\bar{a}|\cdot\cos\alpha$
$\cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|};\quad y=|\bar{a}|\cdot\cos\beta$
$\cos\gamma=\frac{z}{|\bar{a}|};\quad z=|\bar{a}|\cdot\cos\gamma$</td></tr>
</table>

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КОРДИНАТ



где O – полюс;

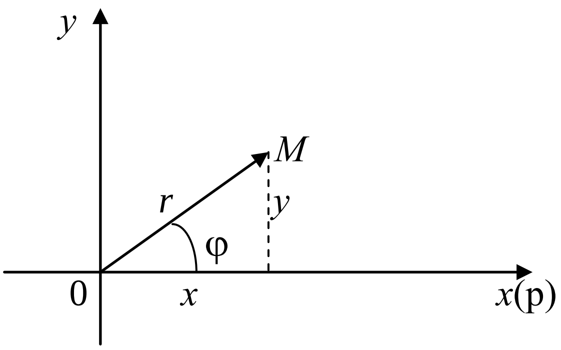
Op – полярная;

r – полярный радиус, $r \in [0;\infty)$;

φ - полярный угол, $-\pi < \varphi \leq \pi$ (или $0 \leq \varphi < 2\pi$)

$M(r;\varphi)$ – координаты точки M в полярных координатах

Связь между прямоугольными и полярными координатами



$(x;y)$ – прямоугольные координаты M;
$(r;\varphi)$ – полярные координаты M

Формулы перехода от прямоугольных к полярным координатам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x},$$

(определяя величину φ, следует установить четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $-\pi < \varphi \leq \pi$)

Формулы перехода от полярных к прямоугольным координатам

$$x = r \cdot \cos\varphi,$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

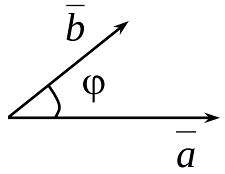
НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Скалярное произведение

Определение

$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi$ – число,

$\varphi=\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)$ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$



Свойства

1. $\overline{a}^2=\left|\overline{a}\right|^2$
2. $\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$
3. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$
4. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$
5. $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$

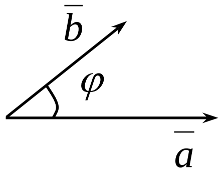
Координатная форма

$$\overline{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right),\quad \overline{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$$

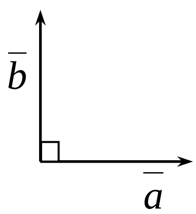
$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Применение

1. Угол между векторами:

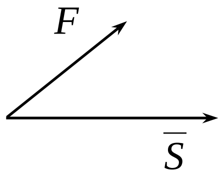


$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}$$



2. Условие перпендикулярности:

$$\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$$



3. Работа: $A=\overline{F}\cdot\overline{S}$

4. Проекция вектора: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|пр_{\overline{a}}\overline{b}=\left|\overline{b}\right|пр_{\overline{b}}\overline{a}$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Векторное произведение

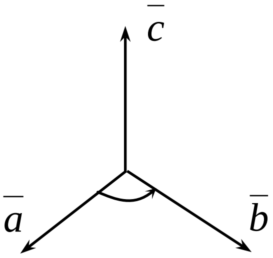
Определение

$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ – вектор, удовлетворяющий условиям:

1. $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right)$;

2. $\bar{c} \perp \bar{a}, \quad \bar{c} \perp \bar{b}$;

3. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка



Свойства

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
2. $\lambda\bar{a} \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$
3. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$
4. $\bar{a} \times \bar{a} = 0$
5. $\bar{a} \| \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$

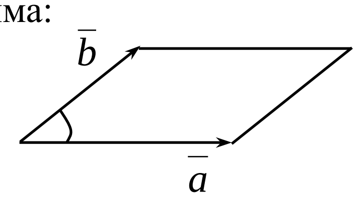
Координатная форма

$$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \bar{b} = (x_2, y_2, z_2) \qquad \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Применение

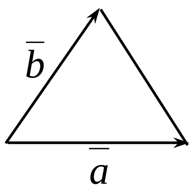
1. Площадь параллелограмма:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|$$



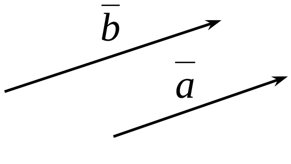
2. Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$$



3. Условие коллинеарности:

$$\bar{a} \| \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0$$



НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Смешанное произведение

Определение

$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}$ – число.

Свойства

1. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c}$
2. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}$
3. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$

Координатная форма

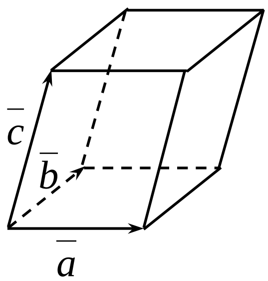
$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Применение

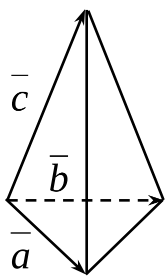
1. Объем параллелепипеда:

$$V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = S_{\text{осн}} \cdot h$$



2. Объем треугольной пирамиды (тетраэдра):

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

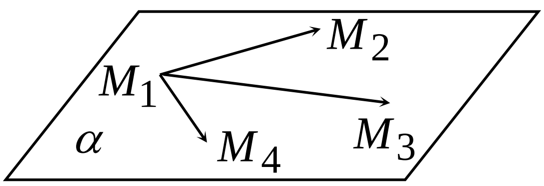


3. Условие компланарности:

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$

4. Условие принадлежности четырех точек одной плоскости

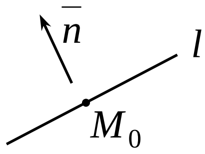
$$M_1, M_2, M_3, M_4 \in \alpha \Leftrightarrow$$
$$\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} \cdot \overline{M_1M_4} = 0$$



АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

. Уравнение прямой, проходящей через точку и перпендикулярно вектору



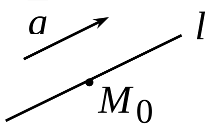
$$\overline{n}=(A;B),\quad M_0(x_0,y_0),\quad \overline{n}\perp l$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

2. *Общее уравнение прямой*

$$Ax+By+C=0 \qquad \overline{n}=(A;B)$$

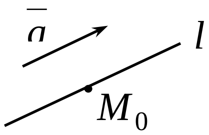
3. *Каноническое уравнение прямой*



$$\overline{a}=(p;q) \qquad M_0(x_0;y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$$

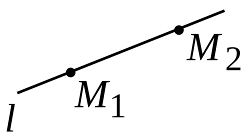
. Параметрические уравнения прямой



$$x=x_0+pt, \qquad M_0(x_0;y_0),$$

$$y=y_0+qt; \qquad \overline{a}=(p;q)$$

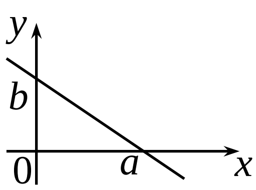
5. *Уравнение прямой, проходящей через две точки*



$$M_1(x_1;y_1),\quad M_2(x_2;y_2),$$

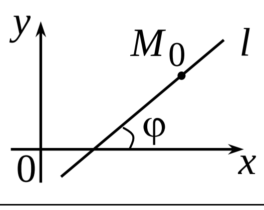
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

6. *Уравнение прямой в отрезках*



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

7. *Уравнение прямой, проходящей через точку и с угловым коэффициентом*



$$M_0(x_0;y_0),\qquad k=tg\varphi$$

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

8. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y=kx+b$$

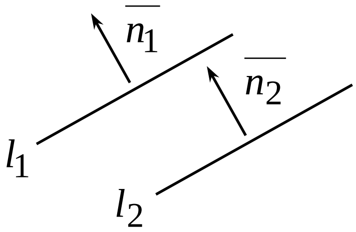
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Взаимное расположение прямых на плоскости

Дано: $l_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \bar{n} = (A_1; B_1), \quad k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$

$l_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \bar{n} = (A_2; B_2), \quad k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$

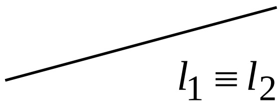
Условие параллельности прямых



$$l_1 \parallel l_2 \ \Leftrightarrow \ \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \ \Leftrightarrow$$

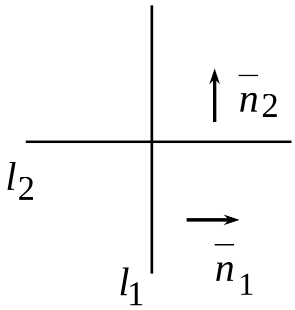
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{или} \quad k_1 = k_2$$

Условие совпадения прямых



$$l_1 \equiv l_2 \ \Leftrightarrow \ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

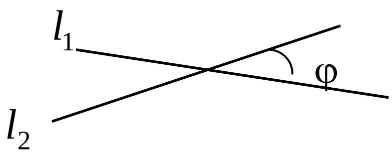
Условие перпендикулярности прямых



$$l_1 \perp l_2 \ \Leftrightarrow \ \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \ \Leftrightarrow$$

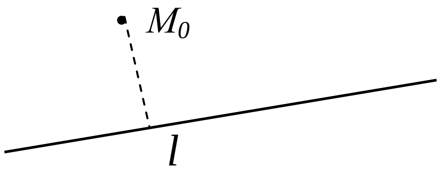
$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \ \text{или} \ k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Угол между прямыми



$$\cos\varphi = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} \ \text{или} \ tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$$

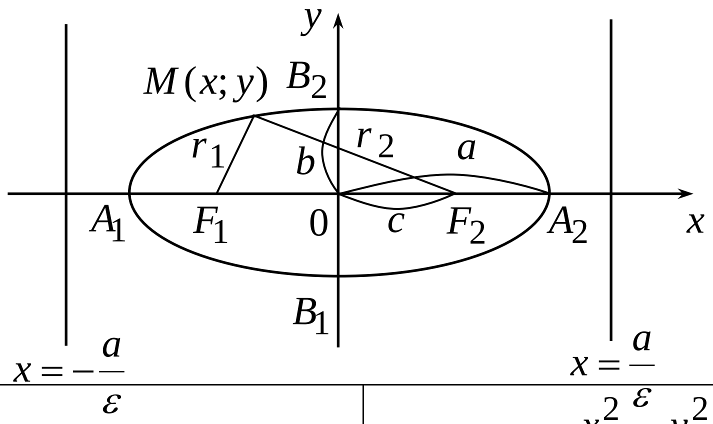
Расстояние от точки до прямой



$l \ : \ Ax + By + C = 0, \qquad M_0(x_0; y_0)$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

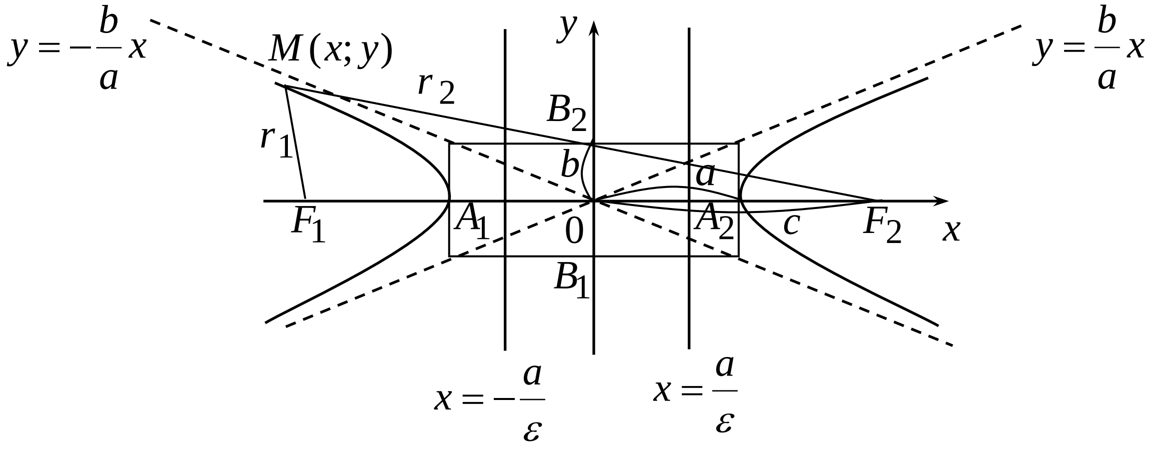
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА



1. Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Связь между a,b,c	$b^2=a^2-c^2$
3. Вершины эллипса	$A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$ $B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$
4. Большая ось $[A_1A_2]$	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$
5. Малая ось $[B_1B_2]$	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$
6. Фокусы	$F_1(-c;0),\quad F_2(c;0)$
7. Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$
8. Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$
9. Директрисы	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$
10. Фокальные радиусы	$r_1=a+\varepsilon\cdot x$ $r_2=a-\varepsilon\cdot x$

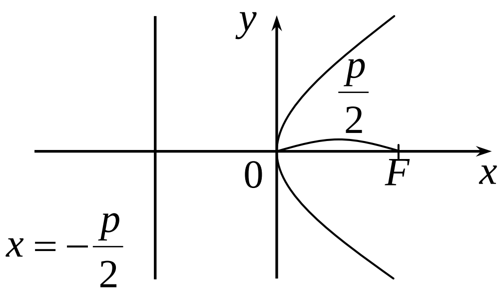
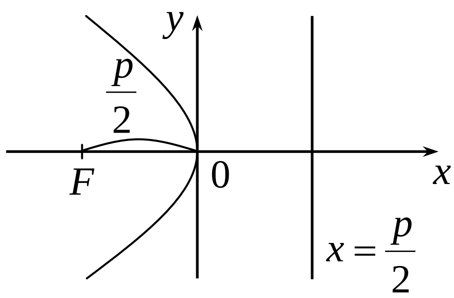
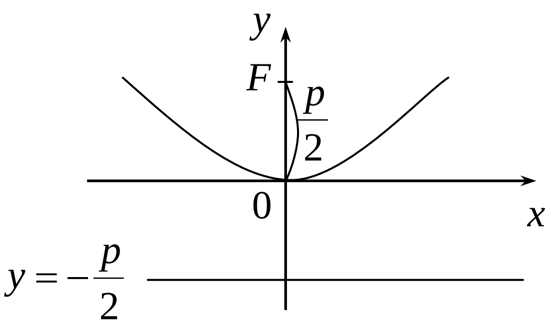
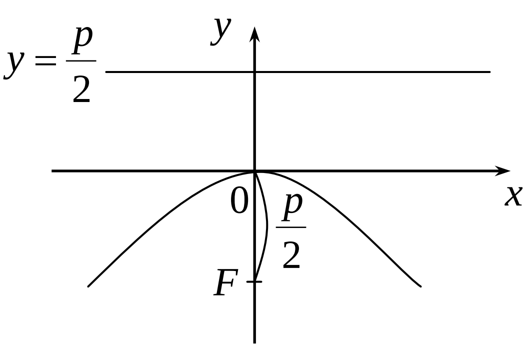
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Гипербола



1. Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Связь между a,b,c	$b^2=c^2-a^2$
3. Вершины гипербол	$A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$
4. Действительная ось $[A_1A_2]$	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$
5. Мнимая ось $[B_1B_2]$	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$
6. Фокусы	$F_1(-c;0),\quad F_2(c;0)$
7. Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$
8. Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$
9. Директрисы	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$
10. Асимптоты	$y=\pm\frac{b}{a}x$
11. Фокальные радиусы для правой ветви левой ветви	 $r_1=\varepsilon\cdot x+a,\ r_2=\varepsilon\cdot x-a$ $r_1=-(\varepsilon\cdot x+a),\ r_2=-(\varepsilon\cdot x-a)$
12. Равнобочная гипербола	$x^2-y^2=a^2$
13. Сопряженная гипербола	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

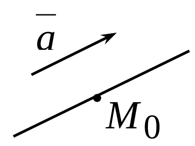
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

<table>
<tr><th colspan="3">Парабола</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Уравнение</td><td>$y^2 = 2px$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(\frac{p}{2};0\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$x = -\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Уравнение</td><td>$y^2 = -2px$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$x = \frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Уравнение</td><td>$x^2 = 2py$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$y = -\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Уравнение</td><td>$x^2 = -2py$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$y = \frac{p}{2}$</td></tr>
</table>

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве

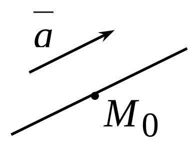
1. *Канонические уравнения прямой*



$$\overline{a}=(p;q;r),\qquad M_0(x_0;y_0;z_0)$$

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

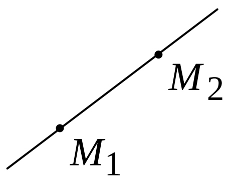
2. *Параметрические уравнения прямой*



$$\overline{a}=(p;q;r),\quad M_0(x_0;y_0;z_0)$$

$$x=x_0+pt,$$
$$y=y_0+qt,$$
$$z=z_0+rt$$

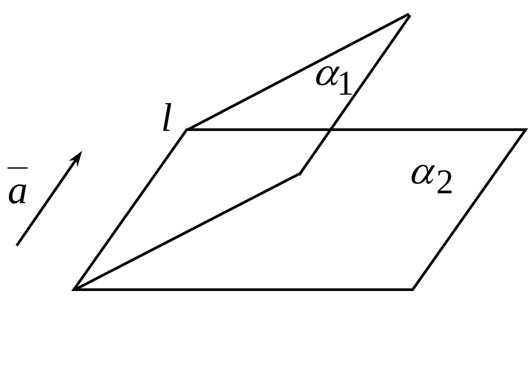
3. *Уравнение прямой, проходящей через две точки*



$$M_1(x_1;y_1;z_1),\qquad M_2(x_2;y_2;z_2)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

4. *Общие уравнения прямой*
(прямая как линия пересечения плоскостей)



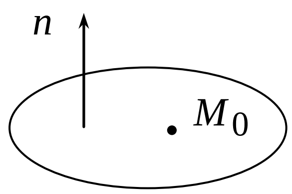
$$\overline{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$$
$$\overline{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$$
$$\overline{a}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$$

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнения плоскости

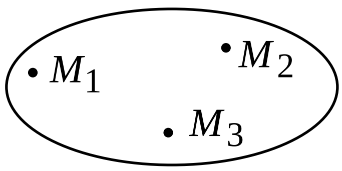
1. *Уравнение плоскости, проходящей через точку и перпендикулярно вектору*



$$\bar{n}=(A;B;C),\qquad M_0(x_0,y_0,z_0)$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2. *Уравнение плоскости, проходящей через три точки*



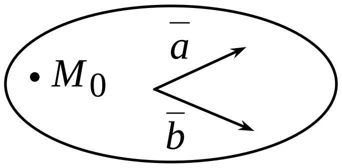
$$M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),\ M_3(x_3,y_3,z_3)$$

$M(x;y;z)$ – точка с текущими координатами

$$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

3. *Уравнение плоскости, проходящей через точку и параллельно двум векторам*



$$M_0(x_0;y_0;z_0)$$

$M(x;y;z)$ – точка с текущими координатами

$$\bar{a}=(p_1;q_1;r_1)\quad \bar{b}=(p_2;q_2;r_2)$$

$$\overline{M_0M}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}=0$$

4. *Общее уравнение плоскости*

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad \bar{n}=(A;B;C)$$

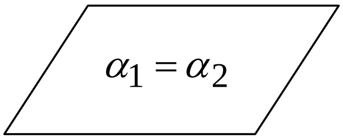
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Взаимное расположение плоскостей

Дано: $\alpha_1: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$

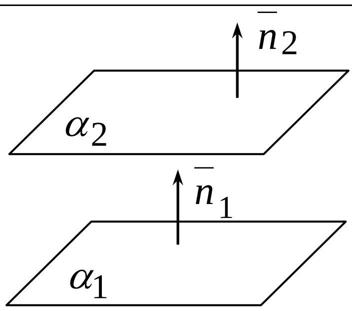
$\alpha_2: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$

Условие совпадения плоскостей



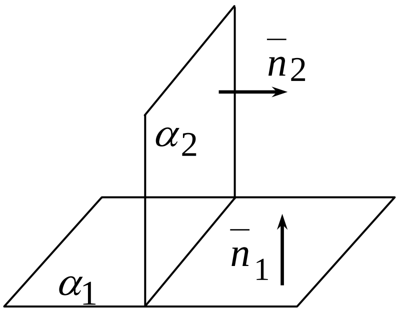
$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Условие параллельности плоскостей



$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условие перпендикулярности плоскостей

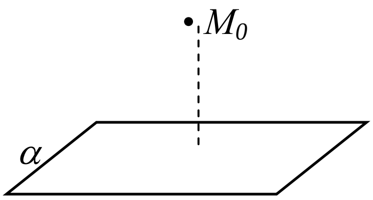


$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Угол между плоскостями

$$cos\varphi = \frac{\left|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2\right|}{\left|\overline{n}_1\right| \cdot \left|\overline{n}_2\right|}$$

Расстояние от точки до плоскости



$\alpha: \; Ax + By + Cz + D = 0, \quad M_0(x_0; y_0; z_0$

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

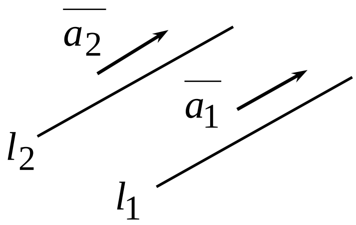
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Взаимное расположение прямых в пространстве

Дано: $l_1: \dfrac{x-x_1}{p_1}=\dfrac{y-y_1}{q_1}=\dfrac{z-z_1}{r_1}, \quad \overline{a_1}=(p_1;q_1;r_1), \quad M_1(x_1;y_1;z_1)$

$l_2: \dfrac{x-x_2}{p_2}=\dfrac{y-y_2}{q_2}=\dfrac{z-z_2}{r_2}, \quad \overline{a_2}=(p_2;q_2;r_2), \quad M_2(x_2;y_2;z_2)$

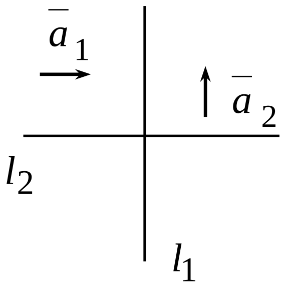
Условие параллельности прямых



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

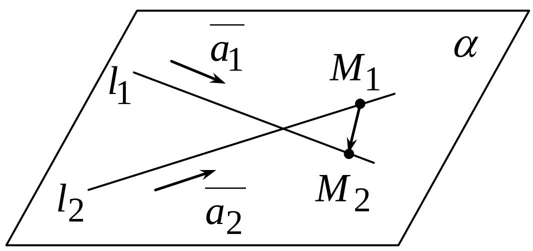
Условие перпендикулярности прямых



$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Leftrightarrow \overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$$

Условие принадлежности прямых одной плоскости

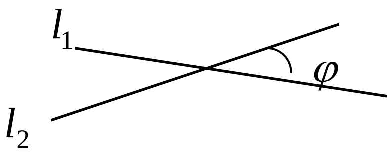


$$l_1, l_2 \subset \alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}\cdot\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=0$$

Условие скрещивающихся прямых

$$l_1 \dot{-} l_2 \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}\cdot\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}\neq 0$$

Угол между прямыми



$$cos\varphi=\frac{|\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2|}{|\overline{a}_1|\cdot|\overline{a}_2|}$$

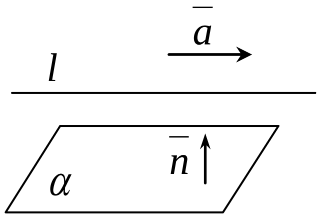
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Взаимное расположение прямой и плоскости

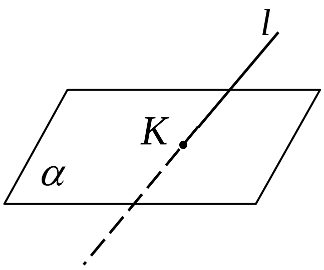
Дано: $l: \dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$; $\quad \bar{a}=(p;q;r),\quad M_0=(x_0;y_0;z_0)$

$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$; $\quad \bar{n}=(A;B;C)$

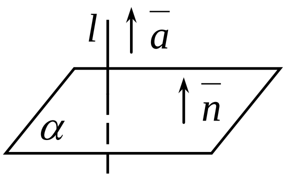
параллельности прямой и плоскости

	$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Ap+Bq+Cr=0$

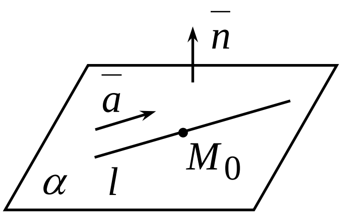
Условие пересечения прямой и плоскости

	$l\cap\alpha \Leftrightarrow Ap+Bq+Cr\neq 0$ $l\cap\alpha=K$ $K:\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$

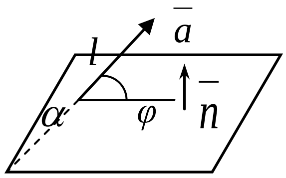
Условие перпендикулярности прямой и плоскости

	$l\perp\alpha \Leftrightarrow \bar{n}\parallel\bar{a} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{A}{p}=\dfrac{B}{q}=\dfrac{C}{r}$

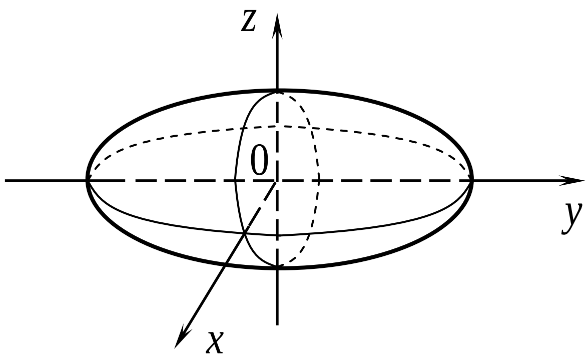
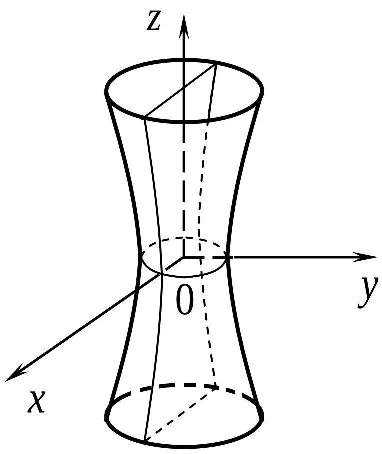
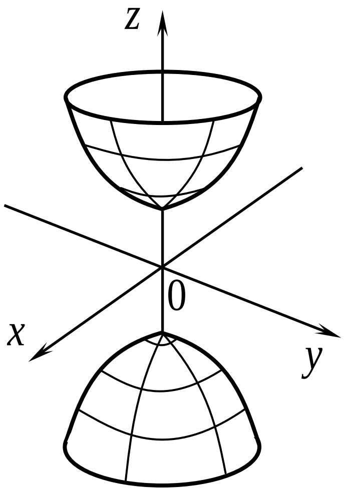
Условие принадлежности прямой плоскости

	$l\subset\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{n}\perp\bar{a}, \\ M_0\in\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} Ap+Bq+Cr=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$

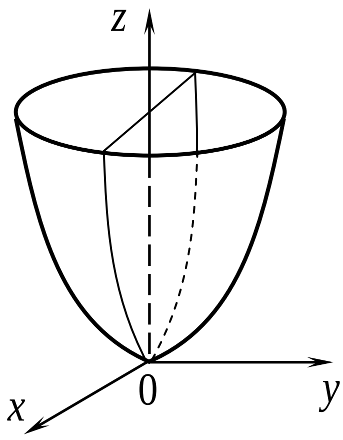
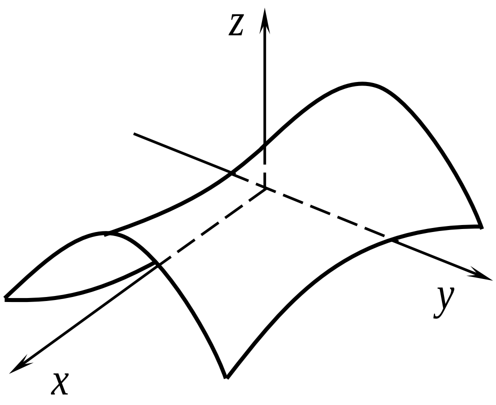
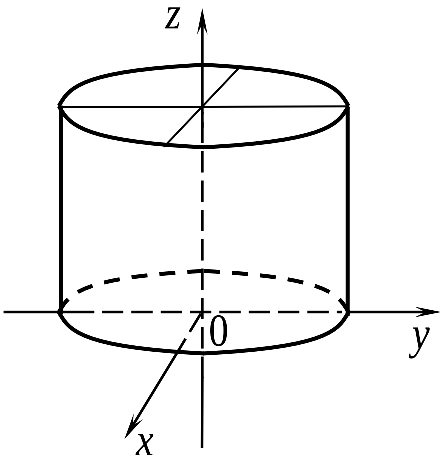
Угол между прямой и плоскостью

	$\sin\varphi=\dfrac{\lvert\bar{a}\cdot\bar{n}\rvert}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{n}\rvert}$

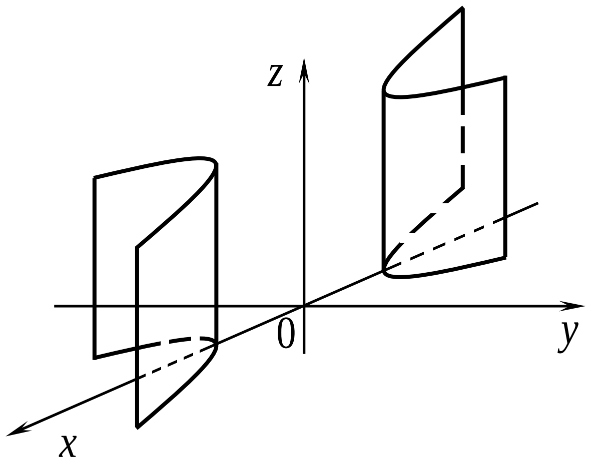
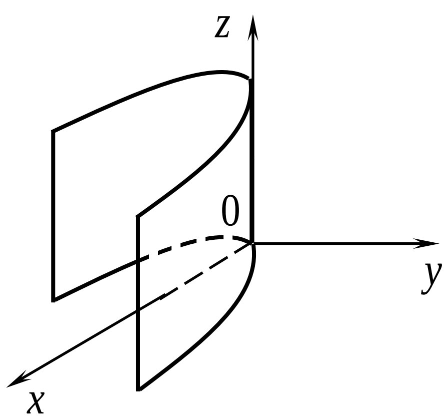
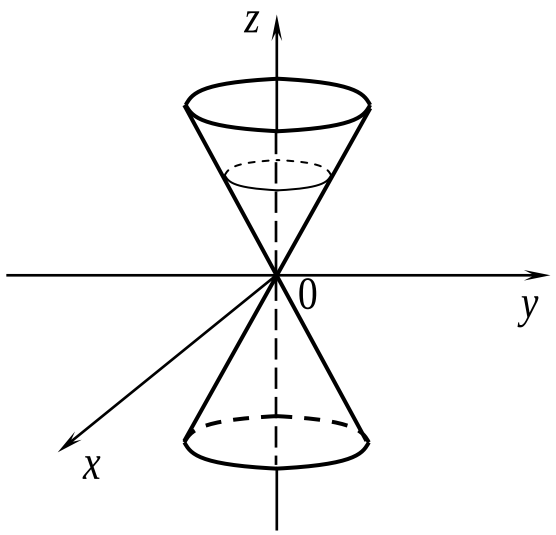
ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вид поверхности	Уравнение поверхности
Эллипсоид	
	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
Однополостный гиперболоид	
	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
Двуполостный гиперболоид	
	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вид поверхности	Уравнение поверхности
Эллиптический параболоид	
	$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$
Гиперболический параболоид	
	$z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$
Эллиптический цилиндр	
	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

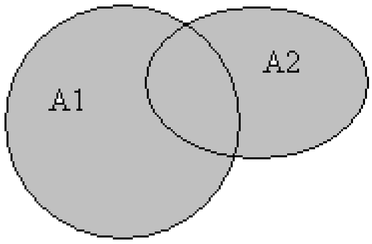
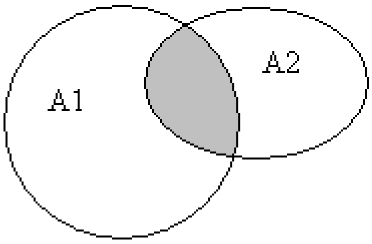
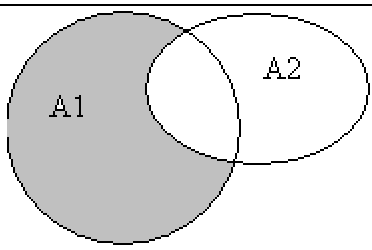
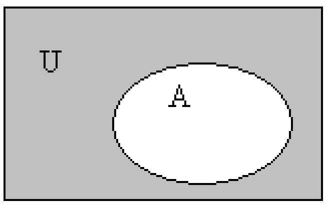
Вид поверхности	Уравнение поверхности
Гиперболический цилиндр	
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Параболический цилиндр	
	$y^2=2px$
Конус	
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Множество – совокупность объектов, объединенных по определенному признаку.

U – *универсальное множество*, такое множество, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Операции над множествами	
Определение, обозначение операции	Изображение диаграммами Эйлера-Венна
Объединение	
Объединение множеств A_1 и A_2 – это множество B, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат *хотя бы одному* из множеств A_1 и A_2. Обозначается: $B = A_1 \bigcup A_2 = \{b \mid b \in A_1 \text{ или } b \in A_2\}$	
Пересечение	
Пересечение множеств A_1 и A_2 – это множество C, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и A_1 и A_2. Обозначается: $C = A_1 \bigcap A_2 = \{c \mid c \in A_1 \text{ и } c \in A_2\}$	
Разность	
Разность множеств A_1 и A_2 – это множество D, состоящее только из тех элементов множества A_1, которые не содержатся в A_2. Обозначается: $D = A_1 \setminus A_2 = \{d \mid d \in A_1,\ d \notin A_2\}$	
Дополнение	
Дополнение (до U) множества A - это множество $\overline{A}$ всех элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих универсальному множеству U. Обозначается $\overline{A} = U \setminus A$	

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Название свойства	Символическая запись
1. Коммутативность (переместительный закон)	$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность (сочетательный закон)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивность (распределительный закон)	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
4. Идемпотентность	$A \cup A = A$; $A \cap A = A$
5. Законы Де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Законы дополнения	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\varnothing$ – пустое множество
7. Инволюция (закон отрицания отрицания)	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Законы поглощения	$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
9. Законы, описывающие свойства пустого и универсального множеств по отношению к объединению и пересечению	$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup U = U$; $A \cap U = A$

ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Логика высказываний

Высказывание – это всякое утверждение, относительно которого имеет смысл говорить истинно оно или ложно. Обозначается: A, B, C,… .

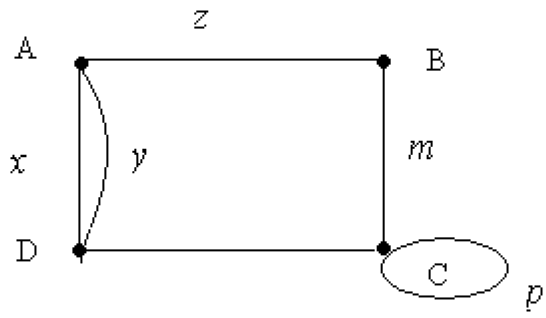
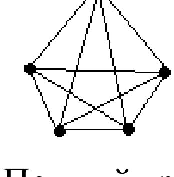
<table>
<tr><th colspan="2">Операции алгебры логики (логические операции)</th></tr>
<tr><th>Определение операции</th><th>Таблица истинности</th></tr>
<tr><td colspan="2">Операция отрицания</td></tr>
<tr><td>Отрицанием (инверсией) высказывания A называется высказывание $\overline{A}$ (читается «не A»), которое истинно, когда высказывание A ложно и ложно, когда A истинно.</td><td><table><tr><td>A</td><td>$\overline{A}$</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Операция конъюнкции</td></tr>
<tr><td>Конъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.</td><td><table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \wedge B$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Операция дизъюнкции</td></tr>
<tr><td>Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний.</td><td><table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \vee B$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Операция импликации</td></tr>
<tr><td>Импликацией высказываний A и B называется высказывание $A \to B$ (читается «из A следует B»), которое ложно тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.</td><td><table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \to B$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Операция эквиваленции</td></tr>
<tr><td>Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание $A \leftrightarrow B$ (читается «A эквивалентно B»), которое истинно тогда и только тогда, когда либо истинны, либо ложны одновременно оба высказывания.</td><td><table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$A \leftrightarrow B$</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

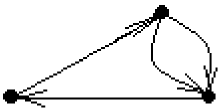
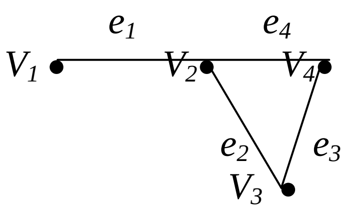
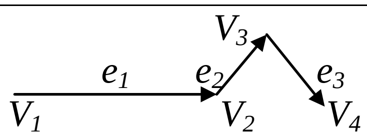
ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ	
Название закона	Символическая запись
1. Коммутативность	$A \wedge B = B \wedge A$; $A \vee B = B \vee A$
2. Ассоциативность	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$; $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
3. Дистрибутивность	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
4. Законы Де Моргана	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
5. Закон двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$
6. Законы идемпотентности	$A \vee A = A$; $A \wedge A = A$
7. Законы, включающие тождественно-истинные (и) и тождественно-ложные высказывания	$A \vee \overline{A} = истина$ (исключение третьего); $A \vee истина = истина$; $A \vee ложь = A$; $A \wedge \overline{A} = ложь$ (противоречие); $A \wedge истина = A$; $A \wedge ложь = ложь$; $\overline{истина} = ложь$
8. Выражение импликации через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание	$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$
9. Выражение эквиваленции через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание	$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
10. Законы поглощения	$A \wedge (A \vee B) = A$; $A \vee (A \wedge B) = A$

ГРАФЫ

Основные понятия

Граф – это совокупность двух множеств: вершин V и ребер E, между элементами которых определено отношение *инцидентности* – каждое ребро $e \in E$ инцидентно ровно двум вершинам u и v, которые оно соединяет.

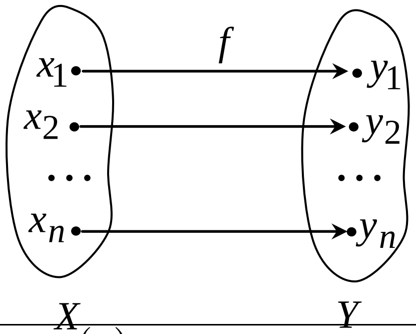
Определение	Геометрическая иллюстрация
Смежные вершины графа – это две вершины, для которых существует инцидентное им ребро. *Смежные ребра графа* – это два ребра, имеющие общую вершину. *Петля* – это ребро, начало и конец которого совпадают. *Кратные (параллельные) ребра* – это ребра инцидентные одной и той же паре вершин (соединяющие одну и ту же пару вершин). *Степень вершины (deg)* – это число ребер инцидентных этой вершине (петля увеличивает степень вершины *на две единицы*).	 A и B – смежные вершины; A и C – несмежные вершины; x и z – смежные ребра; x и m – несмежные ребра; p(C,C) – петля; x (A,D) и y(A,D) – кратные ребра; deg(C) = 4, deg(B) = 2
Изолированная вершина – вершина, имеющая степень, равную нулю. *Нуль граф* – граф, состоящий изолированных вершин.	 E E – изолированная вершина, нуль граф
Полный граф – это граф, каждая пара вершин которого соединена ребром и не содержащий петель и кратных ребер.	 Полный граф

ГРАФЫ	
Ориентированный граф (орграф) – граф, все пары вершин которого являются упорядоченными, в противном случае граф называется *неориентированным*.	 Ориентированный граф
Правильный граф – это граф, ребра которого не имеют общих точек, отличных от вершин графа.	 а) б) а) правильный граф; б) неправильный граф
Маршрут – это последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз. *Длина маршрута* – это число ребер маршрута. *Цепь* – это маршрут, у которого все его ребра различны.	 Маршрут $V_1\,V_2\,V_3\,V_2\,V_4$ не является цепью, а маршрут $V_1\,V_2\,V_3\,V_4$ – цепь.
Путь – упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.	 (e_1, e_2, e_3) – путь из V_1 в V_4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ФУНКЦИЯ

Понятие функции

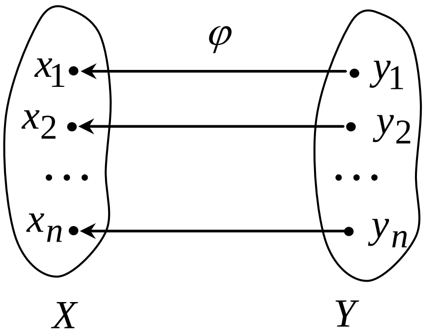


$y = f(x)$ – функция

f – правило (закон), по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное значение $y \in Y$.

X ($D(y)$) – область определения функции, (множество значений x, для которых существует y).

Y ($E(y)$)– область значения функции, (множество значений y).



$x = \varphi(y)$ – обратная функция, $y = f^{-1}(x)$.

Правило нахождения $f^{-1}(x)$.

1. Из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.
2. В полученном выражении поменять обозначения x на y, а y на x.

$F(x, y) = 0$ – неявная функция (y не выражен через x).

$y = f(\varphi(x))$ – сложная функция или функция от функции

Область определения некоторых функций

Вид функции	Область определения функции
1. $\dfrac{1}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$
2. $\sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
3. $\log_a f(x)$	$f(x) > 0$
4. $\arcsin f(x)$ $\arccos f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$

ФУНКЦИИ

Основные элементарные функции

1. Степенная функция, $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.
2. Показательная функция, $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция, $y = \log_a x$.
4. Тригонометрические функции, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обратные тригонометрические функции, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарные функции – функции, образованные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции.

Классификация элементарных функций

Элементарные функции

Алгебраические функции

Целые – рациональные функции

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

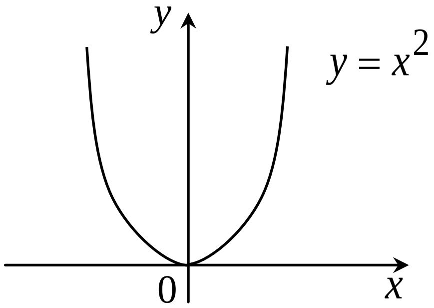
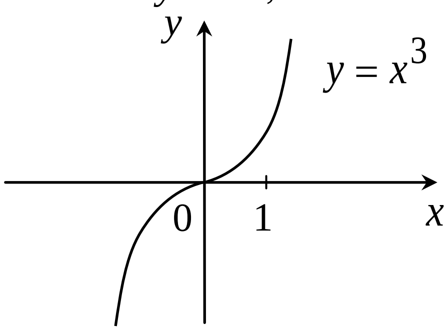
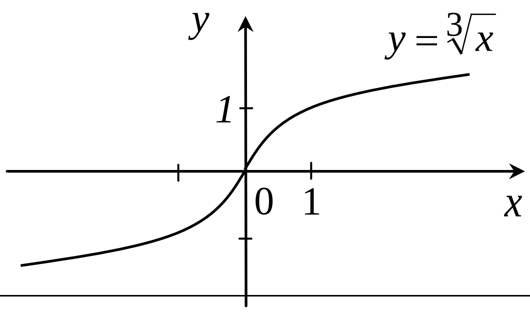
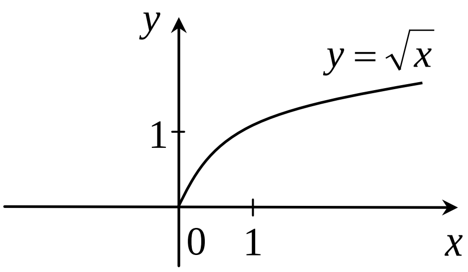
Иррациональные функции (в составе операций есть извлечение корня)

Дробно-рациональные функции

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

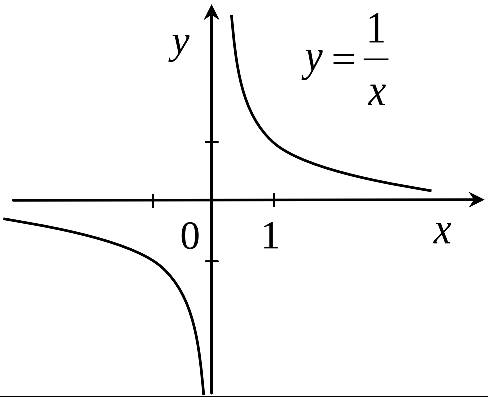
Трансцендентные

(содержащие кроме степенных другие элементарные функции)

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ	
Функция и ее график	Свойства функции
1. *Степенная функция* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$	
$y = x^n$, $n \in N$ 	n – четное 1. $D(y) = (-\infty; \infty)$ 2. $E(y) = [0; +\infty)$ 3. Четная 4. Непериодическая 5. Возрастает на $[0; \infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$
$y = x^n$, $n \in N$ 	n – нечетное 1. $D(y) = (-\infty; \infty)$ 2. $E(y) = (-\infty; \infty)$ 3. Нечетная 4. Непериодическая 5. Возрастает на $D(y)$
$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n > 1$ 	n – нечетное 1. $D(y) = (-\infty; \infty)$ 2. $E(y) = (-\infty; \infty)$ 3. Нечетная 4. Непериодическая 5. Возрастает на $D(y)$
	n – четное 1. $D(y) = [0; \infty)$ 2. $E(y) = [0; +\infty)$ 3. Общего вида 4. Непериодическая 5. Возрастает на $D(y)$

<table>
<tr><th colspan="2">ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ</th></tr>
<tr><th>Функция и ее график</th><th>Свойства функции</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Степенная функция $y = x^{\alpha}, \quad \alpha \in R$</td></tr>
<tr><td>

$y = x^{-n}, \quad n \in N$

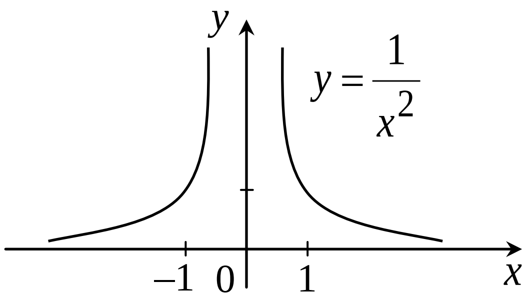


</td><td>

n – нечетное

1. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
2. $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
3. Нечетная
4. Непериодическая
5. Убывает на $(-\infty;0)$ è $(0;+\infty)$

</td></tr>
<tr><td>



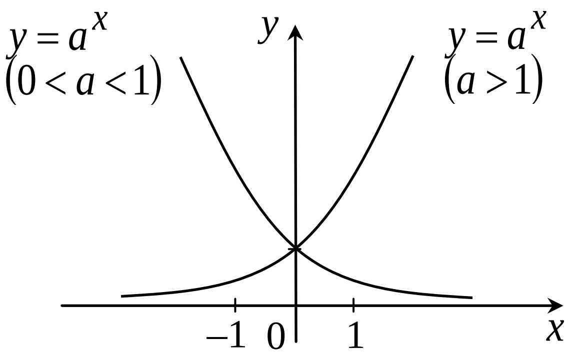
</td><td>

n – четное

1. $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$
2. $E(y)=(0;+\infty)$
3. Четная
4. Непериодическая
5. Возрастает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;\infty)$

</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Показательная функция</td></tr>
<tr><td>

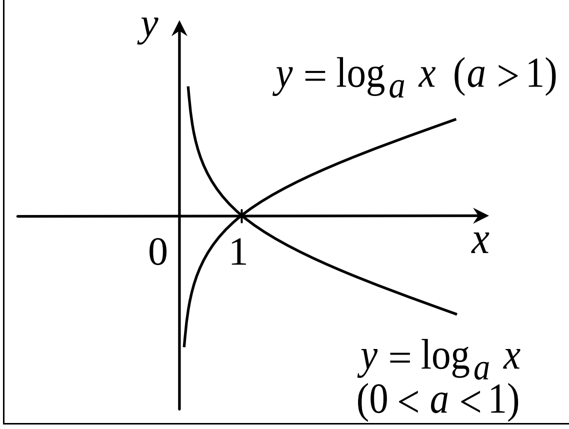
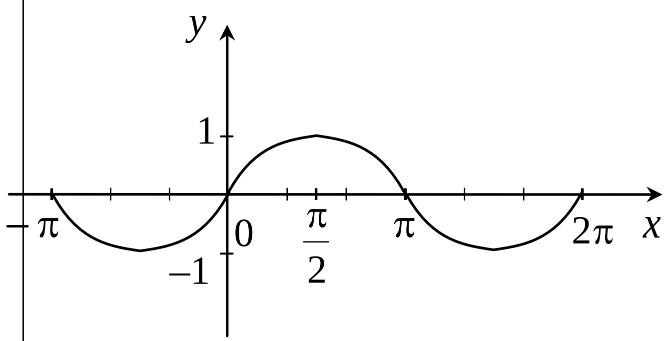
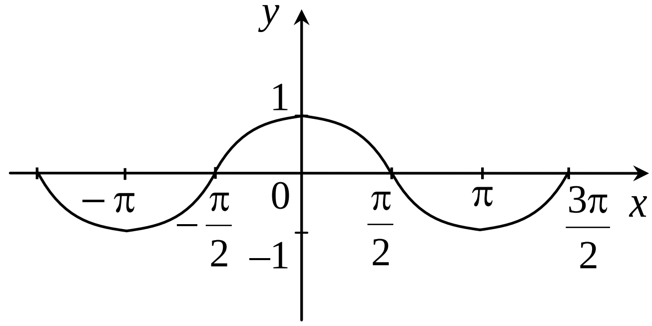
$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$



</td><td>

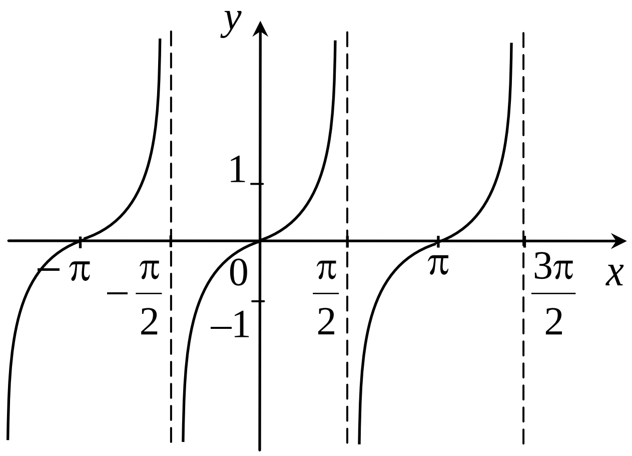
1. $D(y)=(-\infty;\infty)$
2. $E(y)=(0;+\infty)$
3. Общего вида
4. Непериодическая
5. Возрастает на $D(y)$ при $a>1$, убывает на $D(y)$ при $0<a<1$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ</th></tr>
<tr><th>Функция и ее график</th><th>Свойства функции</th></tr>
<tr><td colspan="2">3. Логарифмическая функция</td></tr>
<tr><td>$y=\log_a x,\quad a>0,\quad a\neq 1$

</td><td>1. $D(y)=(0;+\infty)$
2. $E(y)=(-\infty;\infty)$
3. Общего вида
4. Непериодическая
5. Возрастает на $D(y)$ при $a>1$, убывает на $D(y)$ при $0<a<1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Тригонометрические функции</td></tr>
<tr><td>$y=\sin x$

</td><td>1. $D(y)=(-\infty;\infty)$
2. $E(y)=[-1;1]$
3. Нечетная
4. Период $T=2\pi$
5. Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$</td></tr>
<tr><td>$y=\cos x$

</td><td>1. $D(y)=(-\infty;\infty)$
2. $E(y)=[-1;\ 1]$
3. Четная
4. Период $T=2\pi$
5. Возрастает на $[-\pi+2\pi n;2\pi n]$, $n\in Z$, убывает на $[2\pi n;\pi+2\pi n]$, $n\in Z$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ</th></tr>
<tr><th>Функция и ее график</th><th>Свойства функции</th></tr>
<tr><td colspan="2">4. Тригонометрические функции</td></tr>
<tr><td>

$y=\operatorname{tg}x$

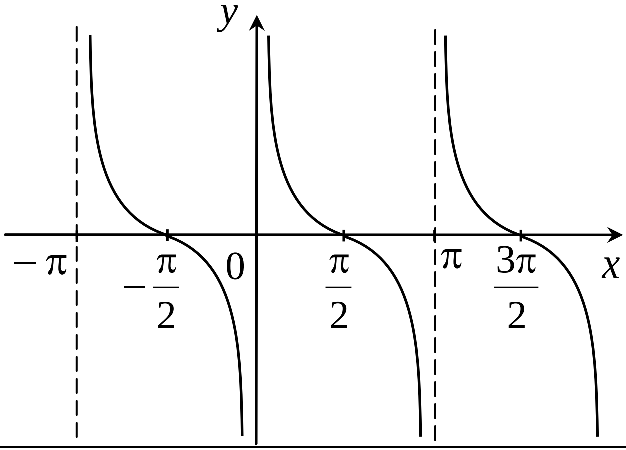


</td><td>

1. $D(y)=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$
2. $E(y)=(-\infty;\infty)$
3. Нечетная
4. Период $T=\pi$
5. Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$

</td></tr>
<tr><td>

$y=\operatorname{ctg}x$



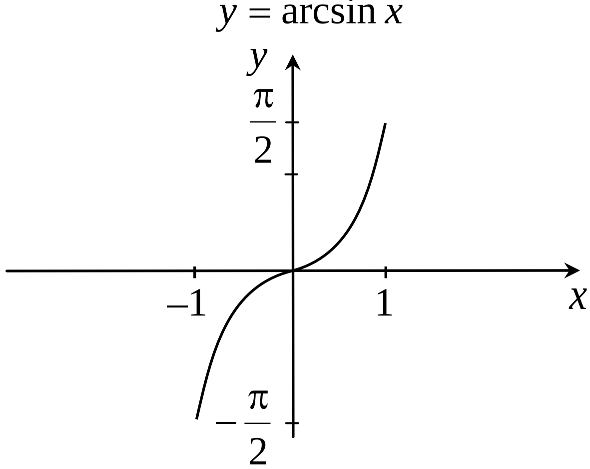
</td><td>

1. $D(y)=(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$
2. $E(y)=(-\infty;\infty)$
3. Нечетная
4. Период $T=\pi$
5. Убывает на $(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">5. Обратные тригонометрические функции</td></tr>
<tr><td>

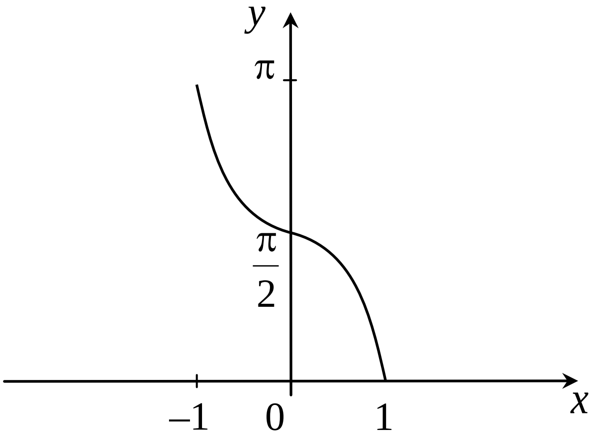
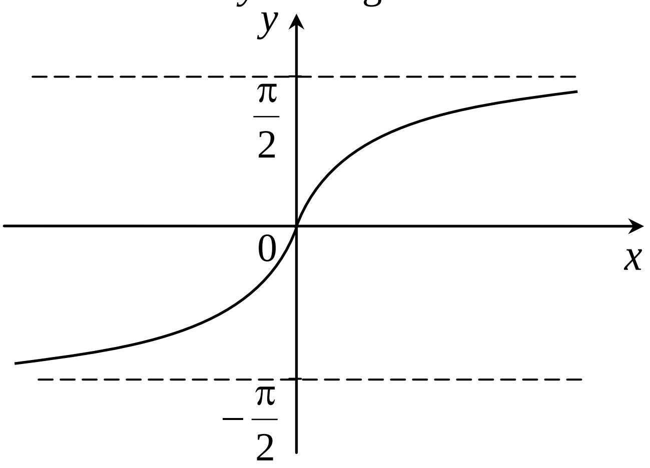
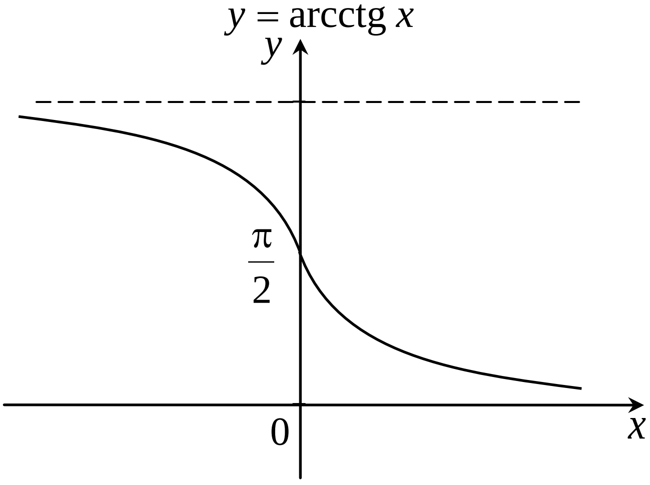
$y=\arcsin x$



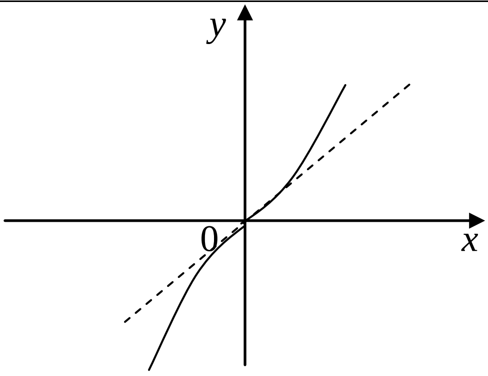
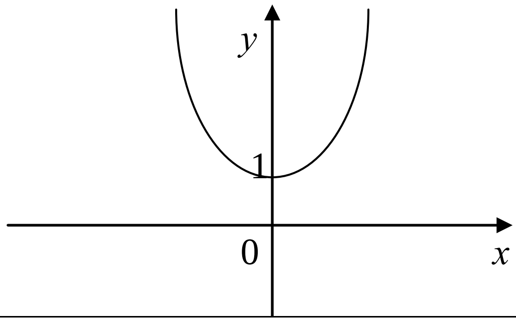
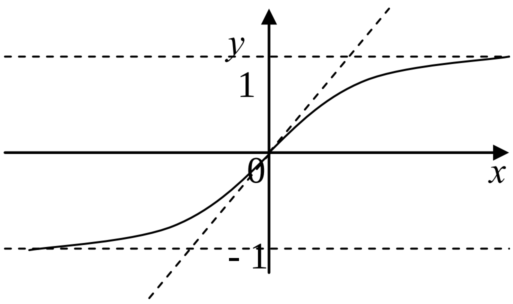
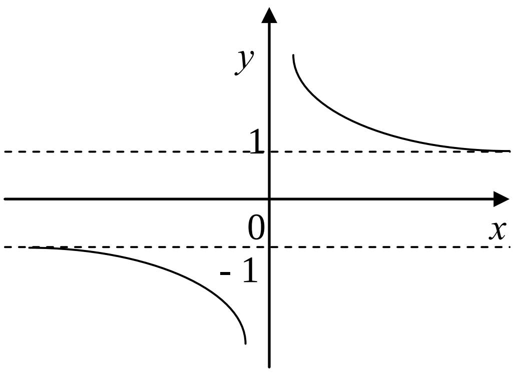
</td><td>

1. $D(y)=[-1;1]$
2. $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
3. Нечетная
4. Возрастает на $D(y)$

</td></tr>
</table>

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ	
Функция и ее график	Свойства функции
5. Обратные тригонометрические функции	
$y = \arccos x$ 	1. $D(y) = [-1;\ 1]$ 2. $E(y) = [0; \pi]$ 3. Общего вида 4. Убывает на $D(y)$
$y = \operatorname{arctg} x$ 	1. $D(y) = (-\infty; \infty)$ 2. $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ 3. Нечетная 4. Возрастает на $D(y)$
$y = \operatorname{arcctg} x$ 	1. $D(y) = (-\infty; \infty)$ 2. $E(y) = (0; \pi)$ 3. Общего вида 4. Убывает на $D(y)$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Аналитическое задание функции	График функции
Гиперболический синус	
$sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	
Гиперболический косинус	
$ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	
Гиперболический тангенс	
$th\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	
Гиперболический котангенс	
$cth\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	

ПРЕДЕЛЫ

Основные теоремы о пределах

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, где C = const.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},\quad \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел	*Второй замечательный предел*
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

Эквивалентность бесконечно малых α *и* β : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$

Важнейшие эквивалентности: *при* $x\to 0$

1. $\sin ax \sim ax$.	6. $e^x-1\sim x$.
2. $\mathrm{tg}\, ax \sim ax$.	7. $a^x-1\sim x\cdot\ln a$.
3. $\arcsin ax \sim ax$.	8. $\ln(1+x)\sim x$.
4. $\mathrm{arctg}\, ax \sim ax$.	9. $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$.
5. $1-\cos ax\sim\dfrac{(ax)^2}{2}$.	10. $(1+x)^k-1\sim k\cdot x,\ k>0$.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ:

$$\frac{\text{число}}{\infty}=0,\quad \frac{\text{число}}{0}=\infty,\quad \frac{0}{\text{число}}=0,\quad \frac{\infty}{\text{число}}=\infty,\quad a^{\infty}=\begin{cases}\infty, \text{ если } a>1\\ 0, \text{ если } 0<a<1\end{cases}$$

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ПРАВИЛА ИХ РАСКРЫТИЯ

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило раскрытия:
числитель и знаменатель дроби разделить на переменную в самой большой степени.

В частности:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_n}=$$

$$=\begin{cases}\infty, \text{ если } n>m\\ 0, \text{ если } n<m\\ a_0/b_0, \text{ если } n=m\end{cases}.$$

Неопределенность вида $[1^{\infty}]$.

Правило раскрытия: использовать второй замечательный предел.

Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Правило раскрытия:
при $x\to x_0$ числитель и знаменатель дроби сократить на $(x-x_0)$.

В частности:
1) если в числителе и знаменателе дроби присутствуют тригонометрические и обратные тригонометрические функции, то следует применить первый замечательный предел и следствия из него;
2) если выражение содержит корни, то числитель и знаменатель дроби умножить на выражение сопряженное выражению с корнями.

Неопределенность вида $[0\cdot\infty]$.

Правило раскрытия:

данную неопределенность привести к виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Правило раскрытия: данную неопределенность привести к виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для этого либо дроби привести к общему знаменателю, либо данное выражение умножить и разделить на сопряженное ему выражение.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ, ТОЧКИ РАЗРЫВА

Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ – *непрерывна в т.* x_0, если:

1) $y = f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0 \in D(y)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ т. е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

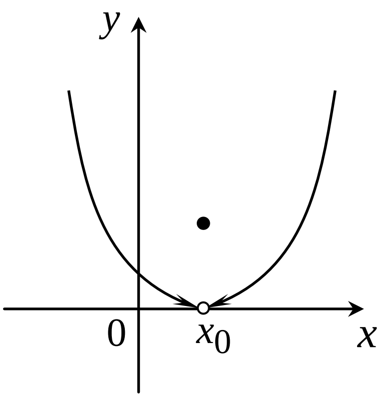
Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из трех условий, то функция называется разрывной в точке x_0, а точка x_0 – точкой разрыва.

Классификация точек разрыва

Точки разрыва I рода

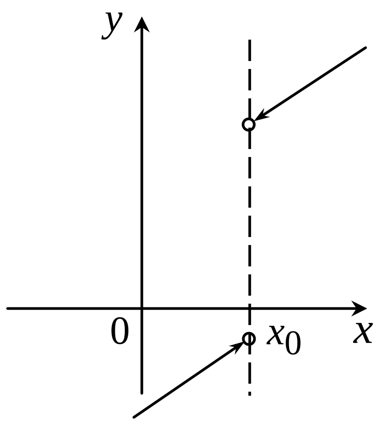
Точки устранимого разрыва

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$



Точки конечного скачка

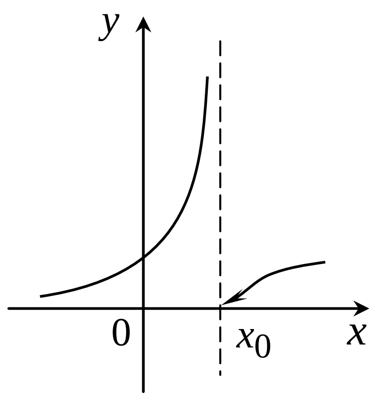
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$



Точки разрыва II рода

Точки бесконечного скачка

$$\exists \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$$



ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Таблица производных

Правила дифференцирования	*Производные основных элементарных функций*	*Производные сложной функции*
1. $C' = 0$	1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2. $(Cu)' = Cu'$	2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$	2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$	3. $\left(e^x\right)' = e^x$	3. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$	4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	4. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
	6. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
	7. $(\cos x)' = -\sin x$	7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
	8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	8. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
	9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
	10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
	11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
	12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	12. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
	13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ, НЕЯВНО И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Формула нахождения производной сложной функции

$y = f(u),\ \ u = \varphi(x)$, где u – промежуточный аргумент

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

Правило нахождения производной функции, заданной неявно уравнением $F(x; y) = 0$.

Продифференцировать уравнение $F(x; y) = 0$ по x, считая y функцией от x. Разрешить полученное выражение относительно y'.

Формула нахождения производной функции, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Логарифмическое дифференцирование

- Прологарифмировать исходное уравнение
$y = f(x)$ (т.е. $\ln y = \ln f(x)$).
- Полученное выражение продифференцировать по x, считая y функцией от x (т.е. $\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'$).
- Из последнего равенства выразить y'.

Производная второго порядка

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')'$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Определение

Дифференциал функции – это главная часть приращения функции $y = f(x)$ линейная относительно Δx:

$$dy = y'\Delta x.$$

Если $y = x$, то $dx = \Delta x$.

Формула для вычисления

$$dy = y'dx$$

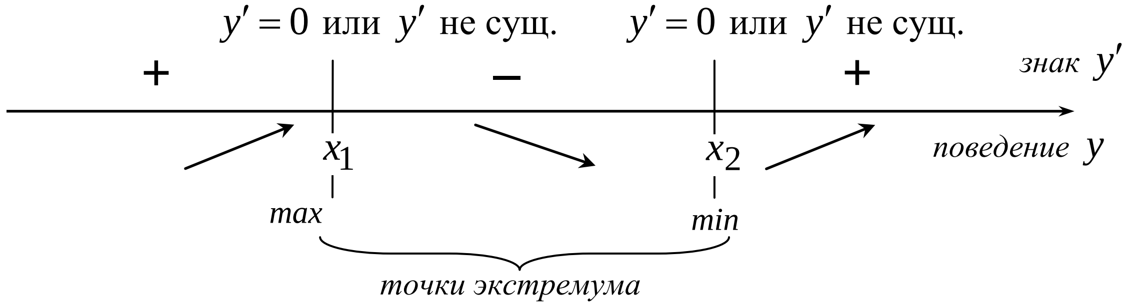
Формула для приближенного нахождения функции с помощью дифференциала

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

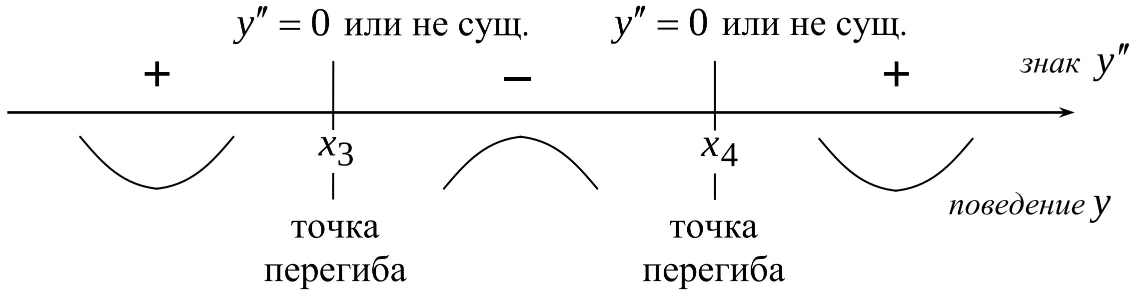
ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Исследование функций

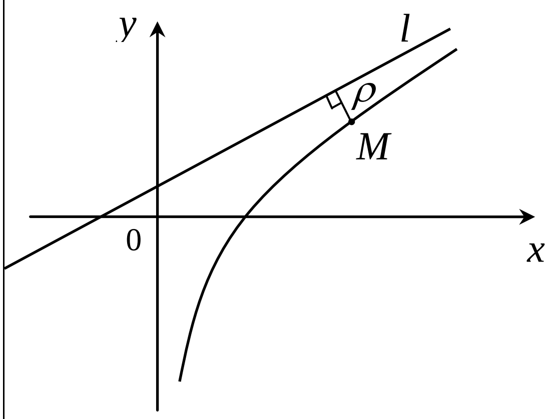
Монотонность и экстремум



Выпуклость, вогнутость, точки перегиба



АСИМПТОТЫ

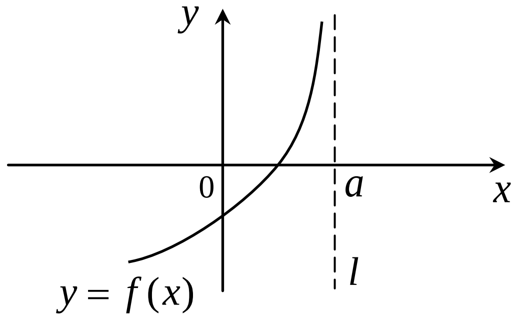


Прямая l называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки M кривой до прямой l стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

$$\rho \to 0 \text{ при } M \to \infty$$

Виды асимптот

асимптоты

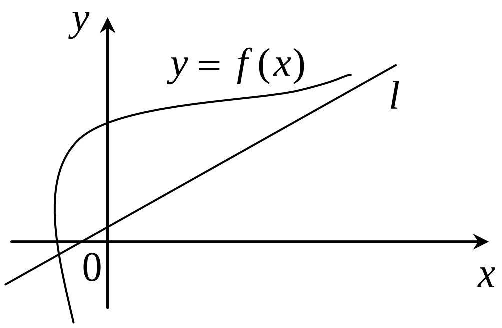


$l: x = a$ – вертикальная асимптота, если

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$$

Наклонные асимптоты

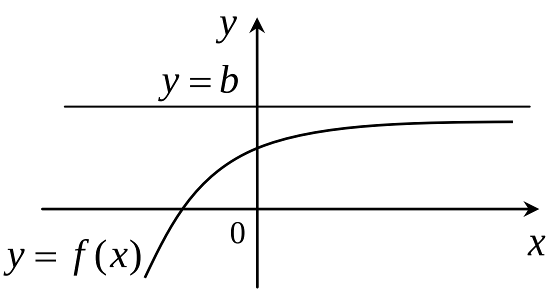


$l: y = kx + b$ – наклонная асимптота, если

$$\exists\ k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right)$$

асимптоты



$l: y = b$

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\text{ или }\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Вычисление пределов по правилу Лопиталя

Вид неопределенности	Способ раскрытия
$\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	Применить правило Лопиталя (возможно несколько раз).
$[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$	Привести неопределенность к виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, для этого представить данное выражение в виде дроби.
$[1^{\infty}]$, $[\infty^{\infty}]$, $[0^{0}]$	1) данное выражение обозначить новой переменной (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=y$); 2) прологарифмировать обе части полученного равенства (т.е. $\ln\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\ln y$, и для преобразований поменять знак предела и логарифма местами); 3) преобразовать выражение так, чтобы получилась неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, к которой применить правило Лопиталя и вычислить предел; 4) найти y из условия $\ln y=a$.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Задача интерполяции

Дано: $(n+1)$ точка $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a;b]$ – узлы интерполяции;

значения функции $f(x)$ в узлах интерполяции, то есть

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Цель: для данной функции $f(x)$ по её значениям в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a;b]$ найти многочлен $P_n(x)$ степени $\le n$, такой что $P_n(x_i) = f(x_i),\ x_i \in [a;b],\ i = 0,1,\ldots,n$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} f(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n)$$

При $n=1$

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1);$$

при $n=2$

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

Формула линейной интерполяции

Для точек $(x_i; f(x_i))$, $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$

$$f(x) = f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Для равноотстоящих точек

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

$h = x_{i+1} - x_i$ – шаг,

конечные разности первого порядка: $\Delta y_0 = y_1 - y_0$; $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ и т.д.;

конечные разности первого порядка: $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$; $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$ и т.д.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

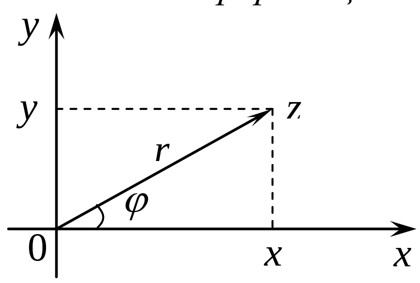
при $n=2$

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Алгебраическая форма: $z = x + yi$, где $i^2 = -1$

Геометрическая интерпретация



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа;

φ – аргумент комплексного числа,

$tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, $(-\pi < \varphi \le \pi)$

Основные понятия

1. $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть z,
   $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть z
2. $\bar{z} = x - yi$ – число сопряженное z.
3. $-z = -x - yi$, число противоположное z.
4. Условие равенства двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i:$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Действия над комплексными числами:

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad z_2 = x_2 + y_2 i.$$

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$.
2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$.
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$.

Тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$.
3. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$
4. $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Показательная форма: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ 2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ 3. $z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Понятие функции комплексной переменной

$D=\{z\,|\,z=x+iy\}$, $E=\{w\,|\,w=u+iv\}$ - числовые множества.

Функция комплексной переменной – правило, по которому каждому числу $z\in D$ ставится в соответствие число $w\in E$.

Обозначается $w=f(z)$, то есть $f(x+iy)=u(x;y)+iv(x;y)$,

где $u(x;y)=\operatorname{Re} f(z)$ - действительная часть функции $f(z)$;

$v(x;y)=\operatorname{Im} f(z)$ - мнимая часть функции $f(z)$.

Дифференцирование функции комплексной переменной

Производная функции

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

Условия существования производной

(условия Коши-Римана или Эйлера-Даламбера)

$w=u(x;y)+iv(x;y)$ – дифференцируема в точке $z=x+iy \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Формулы для нахождения производной

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x};\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y};\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение

Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом:*

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования;

C – постоянная интегрирования;

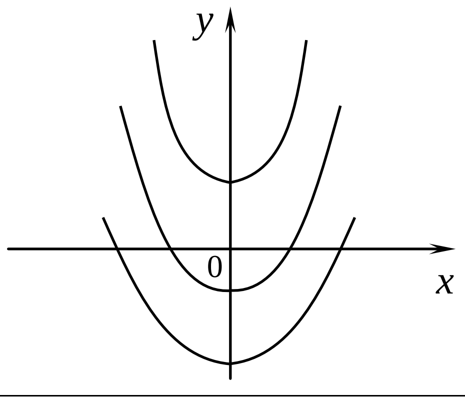
$F(x)$ – первообразная $f(x)$, т.е. $F'(x)= f(x)$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right)= f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x)+C$
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, $a = \text{const}$
5. $\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
6. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a,\ b$ – const.

Геометрическое представление

$y = F(x)+C$ – семейство интегральных кривых



Методы интегрирования

1. Метод подстановки:

$$\int f(x)dx = \int f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx}$$

2. Метод интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
2. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
3. $\int dx = x + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ или $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\operatorname{arcctg} x + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	18. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert \cos x \rvert + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$	19. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert \sin x \rvert + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	21. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\rvert + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	22. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x) \rvert + C$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

<table>
<tr><th>№</th><th>Вид интеграла</th><th>u</th><th>dv</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>$\int P_n(x)\cdot e^{kx}dx$,
$\int P_n(x)\cdot a^{kx}dx$,
$\int P_n(x)\cdot \cos kxdx$,
$\int P_n(x)\cdot \sin kxdx$,
$P_n(x)$ – многочлен</td><td>$P_n(x)$
$P_n(x)$
$P_n(x)$
$P_n(x)$</td><td>$e^{kx}dx$
$a^{kx}dx$
$\cos kxdx$
$\sin kxdx$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\int P_n(x)\cdot \ln xdx$,
$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} xdx$,
$\int P_n(x)\cdot \operatorname{arcctg} xdx$,
$\int P_n(x)\cdot \arcsin xdx$,
$\int P_n(x)\cdot \arccos xdx$</td><td>$\ln x$
$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{arcctg} x$
$\arcsin x$
$\arccos x$</td><td>$P_n(x)dx$
$P_n(x)dx$
$P_n(x)dx$
$P_n(x)dx$
$P_n(x)dx$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\int e^{ax}\cdot \cos bxdx$,
$\int a^{kx}\cdot \cos bxdx$,
$\int e^{ax}\cdot \sin bxdx$,
$\int a^{kx}\cdot \sin bxdx$,
$\int \sin(\ln x)dx$,
$\int \cos(\ln x)dx$</td><td colspan="2">Метод интегрирования по частям использовать дважды, оба раза в качестве U взять функцию одного и того же типа (оба раза либо показательную функцию, либо тригонометрическую). Полученное уравнение разрешить относительно искомого интеграла.</td></tr>
</table>

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБЕЙ	
Вид интеграла	*Метод интегрирования*
1. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ $(D<0)$	Выделить в знаменателе полный квадрат и ввести подстановку $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=t$.
2. $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$	а) Если $n \ge m$ выделить целую часть; б) разложить знаменатель $Q_m(x)$ на множители, т.е. представить в виде $Q_m(x)=(x-a)^k\left(x^2+px+q\right)^s$; в) представить правильную дробь в виде суммы простейших дробей по принципу: $(x-a)\to\frac{A_1}{x-a}$; $(x-a)^k\to\underbrace{\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}}_{k\text{ – дробей}}$ $\left(x^2+px+q\right)\to\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $\left(x^2+px+q\right)^k\to\underbrace{\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}}_{k\text{ – дробей}}$

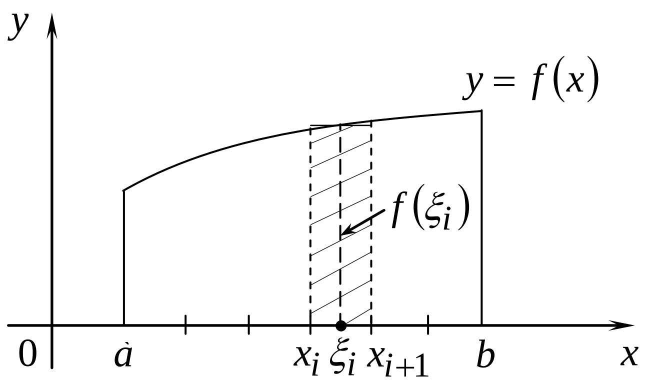
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

№	*Вид интеграла*	*Метод интегрирования*
1	$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$	Выделить в подкоренном выражении полный квадрат и ввести подстановку $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=t$.
2	$\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$	Подстановка $(ax+b)=t^s$, где s - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1};\frac{m_2}{n_2};\ldots$
3	$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$	Подстановка $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^s$, где s - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1};\frac{m_2}{n_2};\ldots$
4	Интеграл от дифференциального бинома $\int x\cdot\left(a+bx^n\right)^p dx$ а) p – целое число; б) $\frac{m+1}{n}$ – целое число; в) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число	Подстановки Чебышева а) $x=t^k$, где k – общий знаменатель дробей m и n; б) $(a+bx^n)=t^k$, где k – знаменатель дроби p; в) $(a+bx^n)=t^k\cdot x^n$, где k – знаменатель дроби p.
5	$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$ $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx.$	Подстановка (соответственно): $x=a\cdot\sin t,\ \left(x=a\cdot\cos t\right),$ $x=\frac{a}{\sin t},\ \left(x=\frac{a}{\cos t}\right),$ $x=a\cdot\operatorname{tg} t,\ \left(x=a\cdot\operatorname{ctg} t\right).$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

№	*Вид интеграла*	*Метод интегрирования*
1	$\int R(\sin x, \cos x)dx$	Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
2	$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$	
	а) m, n – четные, положительные;	а) Понизить степени $\sin x$, $\cos x$ по формулам: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$;
	б) m, n – положительные, хотя бы одно нечетное;	б) от функции, стоящей в нечетной степени, отделить множитель и внести его под знак дифференциала;
	в) m, n – четные, хотя бы одно отрицательное или $(m+n)$ – четное, отрицательное;	в) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$ $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
3	$\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$	Подстановка $\operatorname{tg} x = t$, $\operatorname{ctg} x = t$
4	$\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$	Применить соответственно формулы: $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$, $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$, $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\lambda = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

$F(x)$ – первообразная $f(x)$

Основные свойства

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k = \text{const}.$

Методы интегрирования

Замена переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \left|\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ \alpha\le t\le\beta \end{array}\right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

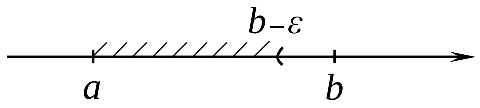
Несобственные интегралы I рода (с бесконечными пределами)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

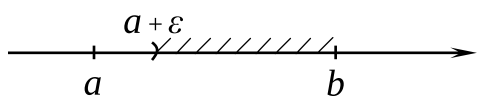
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$
$$c \in (-\infty;+\infty)$$

Несобственные интегралы II рода (от разрывных функций)



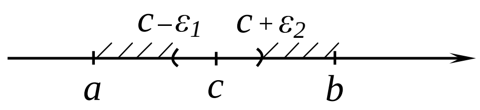
b – точка разрыва функции $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$



a – точка разрыва функции $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

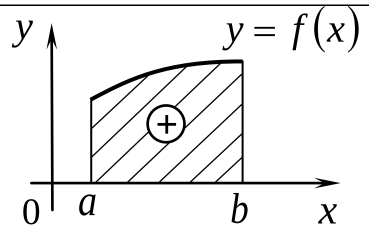
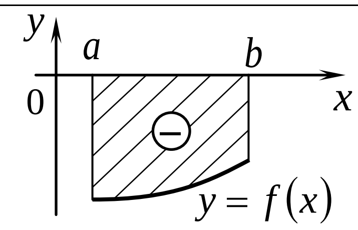
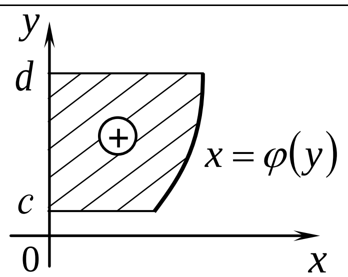
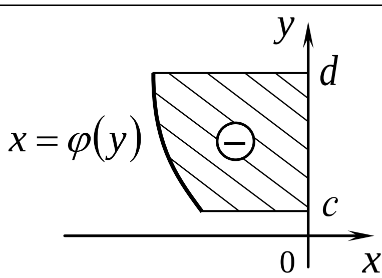
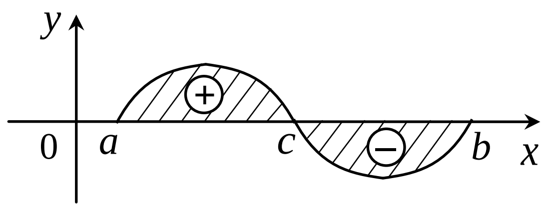
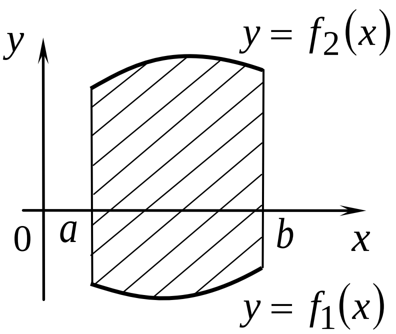


c – точка разрыва функции $f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

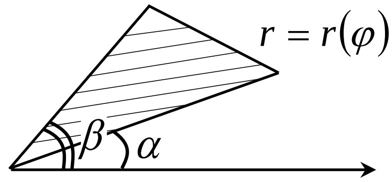
НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

<table>
<tr><td>
</td><td>$$S=\int_a^b f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_a^b f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S=\left|\int_c^d \varphi(y)dy\right|=-\int_c^d \varphi(y)dy$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$$</td></tr>
</table>

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь в полярных координатах



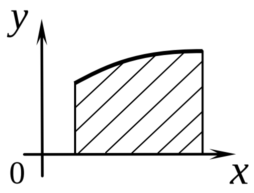
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией, заданной параметрически

$x = x(t)$

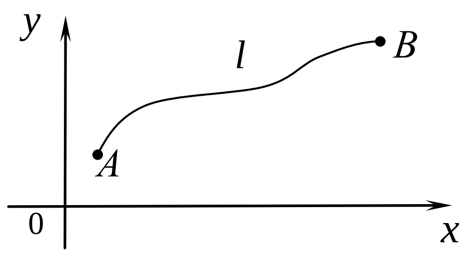
$y = y(t)$

$t_1 \le t \le t_2$



$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Длина дуги плоской кривой



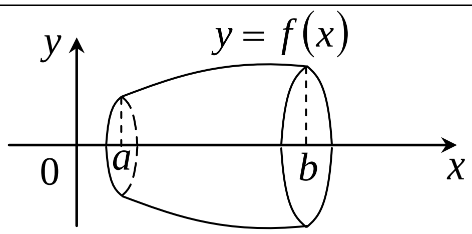
$l: y = f(x), \quad a \le x \le b$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

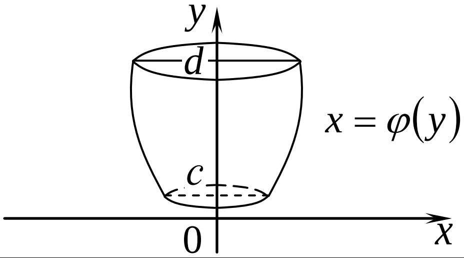
$l: x = x(t),\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$$

тела вращения



$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$$



$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$$

Площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx$$

НЕКОТОРЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Работа переменной силы $F(x)$	$A=\int_a^b F(x)dx$
Путь, пройденный телом ($v(t)$ – скорость)	$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Статические моменты дуги плоской кривой ($\rho(x)$ – плотность)	$M_x=\int_a^b \rho(x)ydl$ $M_y=\int_a^b \rho(x)xdl$
Моменты инерции дуги плоской кривой ($\rho(x)$ – плотность)	$J_x=\int_a^b \rho(x)y^2dl$ $J_y=\int_a^b \rho(x)x^2dl$
Масса кривой ($\rho(x)$ – плотность)	$m=\int_a^b \rho(x)dl$
Координаты центра тяжести плоской кривой	$x_c=\frac{M_y}{m}$ $y_c=\frac{M_x}{m}$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

$z = f(x;y)$ – *функция независимых переменных* x *и* y, если каждой паре $(x;y)$ из некоторой области D по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение z.

Область определения функции $z = f(x;y)$ – это совокупность пар $(x;y)$, при которых z существует (определена).

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ $z = f(x;y)$

Производные первого порядка

$z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x}$ $y = \text{const}$	$z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$ $x = \text{const}$

Производные второго порядка

$z''_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\quad$ $z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	$z''_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $\quad$ $z''_{yx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Полный дифференциал функции $z = f(x;y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

частные дифференциалы

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Производная сложной функции

$z = f(x, y)$ $x = x(t)$, $y = y(t)$	$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$
$z = f(x, y)$ $y = y(x)$	$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$
$z = f(x, y)$ $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$	$\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$

Производная функции, заданной неявно

$F(x; y) = 0$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)}$
$F(x; y; z) = 0$	$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}$

Производная по направлению поля $u = u(x; y; z)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Градиент скалярного поля $u = u(x; y; z)$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Схема исследования функции $z = f(x, y)$ *на экстремум*

1. Найти область определения функции

2. Найти z'_x, z'_y.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

и найти критические точки (M_0 и т.д.) функции.

4. Найти значение вторых производных в критических точках, используя следующие обозначения:

$$A = z''_{xx}(M_0),$$
$$B = z''_{xy}(M_0),$$
$$C = z''_{yy}(M_0).$$

5. Вычислить $\Delta = AC - B^2$ для каждой критической точки.

6. На основании достаточного условия существования экстремума сделать вывод о наличии экстремума в критических точках, т.е.
   в точке M_0 функция $z = f(x, y)$ имеет:
   а) минимум, если $\Delta > 0$ и $A > 0$;
   б) максимум, если $\Delta > 0$ и $A < 0$;
   в) не имеет экстремума, если $\Delta < 0$;
   г) требуются дополнительные исследования, если $\Delta = 0$.

7. Найти экстремальные значения функции.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Уравнение поверхности S: $F(x;y;z)=0$

Уравнение поверхности S: $z=f(x;y)$

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$

$$F'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0)(z-z_0)=0$$

$$z-z_0=f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)$$

Уравнение нормали к поверхности

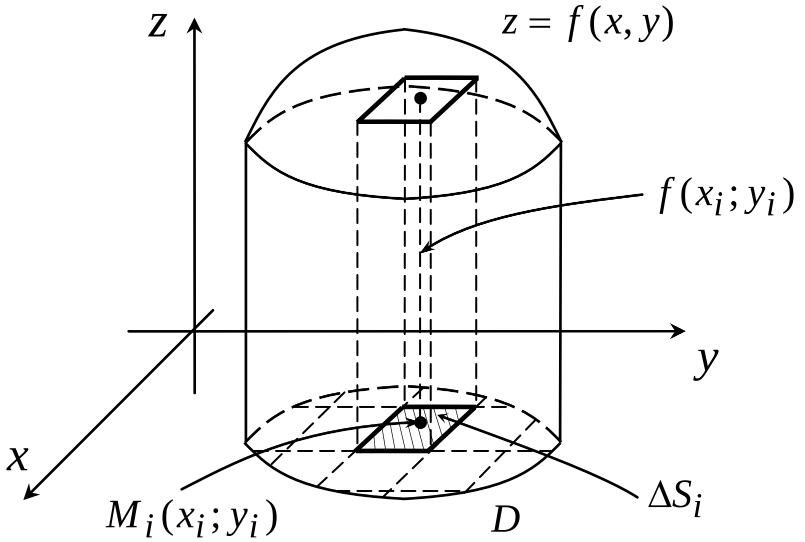
Нормаль – прямая, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной плоскости

Уравнение нормали

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0)}$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ



$$\iint_D f(x;y)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i\,,$$

где $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$,

d_i – диаметр элементарной площадки

Геометрический смысл

$$V_{\text{цилиндрического тела}} = \iint_D f(x;y)dS$$

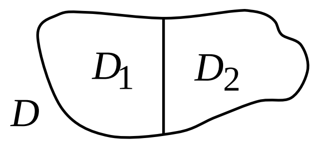
$$m_{\text{плоской пластины}} = \iint_D \rho(x;y)\,dS$$

$\rho(x;y)$ – плотность

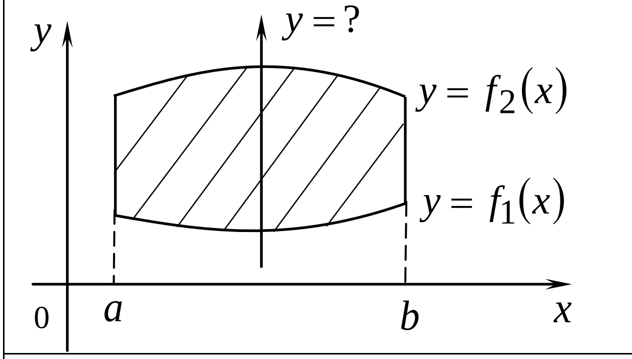
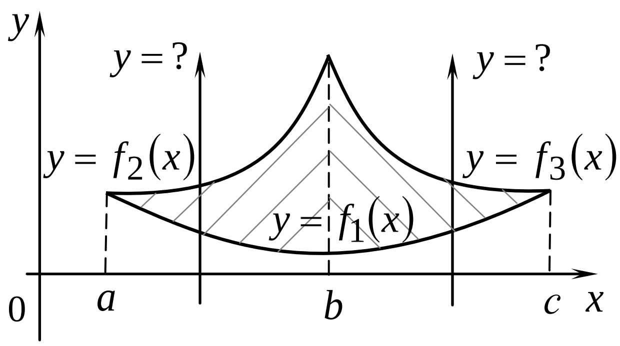
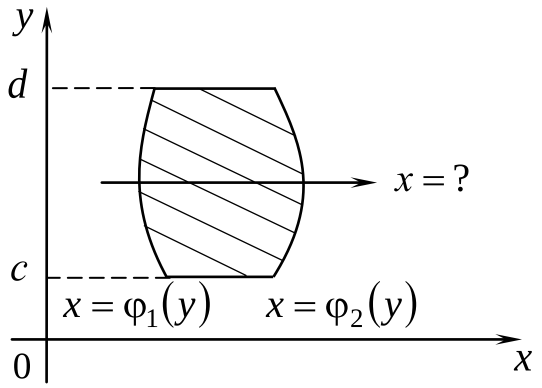
Основные свойства

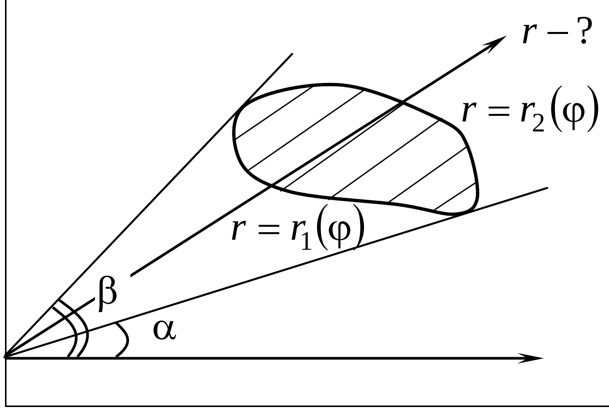
1. $\iint_D kf(x;y)dS = k\iint_D f(x;y)dS\,,\quad k = \mathrm{const}$

2. $\iint_D (f_1 \pm f_2)dS = \iint_D f_1 dS \pm \iint_D f_2 dS$

3. 

$$\iint_D f(x;y)dS = \iint_{D_1} fdS + \iint_{D_2} fdS$$

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	
	$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x;y)dy$
	$\iint\limits_D f(x;y)dxdy =$ $\int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x;y)dy + \int\limits_b^c dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_3(x)} f(x;y)dy$
	$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x;y)dx$

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах	
	$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dxdy = rdrd\varphi \end{vmatrix} =$ $\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)rdr$

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА	
Статические моменты плоской фигуры D	$M_x = \iint\limits_D y\rho(x;y)dxdy$ $M_y = \iint\limits_D x\rho(x;y)dxdy$ $\rho(x;y)$ – поверхностная плотность фигуры D
Моменты инерции плоской фигуры D	$J_{xx} = \iint\limits_D y^2\rho(x;y)dxdy$ $J_{yy} = \iint\limits_D x^2\rho(x;y)dxdy$ $J_0 = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\rho(x;y)dxdy$ $\rho(x;y)$ – поверхностная плотность фигуры D
Координаты центра тяжести C плоской фигуры D	$x_C = \dfrac{M_y}{m}$, $y_C = \dfrac{M_x}{m}$, $m = \iint\limits_D \rho(x;y)dxdy$ – масса D, $\rho(x;y)$ – поверхностная плотность фигуры D
Площадь области D	$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D rdrd\varphi$

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

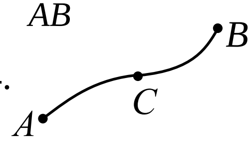
Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги)

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta l_i$$

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta l_i$$

AB – путь интегрирования,
dl – дифференциал длины дуги

Свойства

1. $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl$
2. $\int\limits_{AB} (f_1 \pm f_2)dl = \int\limits_{AB} f_1 dl \pm \int\limits_{AB} f_2 dl$
3. $\int\limits_{AB} kf(x;y)dl = k \int\limits_{AB} f(x;y)dl$
4. 

$\int\limits_{AB} fdl = \int\limits_{AC} fdl + \int\limits_{CB} fdl$

Физический смысл

$m = \int\limits_{AB} \rho(x;y)dl$ – масса дуги AB

ρ – плотность

Криволинейный интеграл II рода (по координатам)

$$\int\limits_{L} P(x;y)dx + Q(x;y)dy == \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i;y_i)\Delta x_i + Q(x_i;y_i)\Delta y_i$$

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta L_i$$

L – путь интегрирования

Свойства

1. $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int\limits_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$
2. $\int\limits_{L} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{L} P(x;y)dx + \int\limits_{L} Q(x;y)dy$

Свойства 2–4, сформулированные для криволинейного интеграла I рода, выполняются и для криволинейного интеграла II рода.

Физический смысл

$A = \int\limits_{L} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ – работа

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

I рода (по длине дуги)

$AB: y = y(x),\ a \le x \le b$

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$\int_{AB} f(x;y)\,dl = \int_a^b f(x;y(x))\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$AB: x = x(t),\quad y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$$

$$\int_{AB} f(x;y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$$

Связь между двойным и криволинейным интегралами

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L P dx + Q dy -$$

формула Грина

II рода (по координатам)

$L:\ y = y(x),\ a \le x \le b$

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_a^b P(x;y(x))dx + Q(x;y(x))y'(x)dx$$

$L:\ x = x(y),\ c \le y \le d$

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_c^d P(x(y);y)x'(y)dy + Q(x(y);y)dy$$

$L:\ x = x(t) \qquad \alpha \le t \le \beta$
$\quad\ y = y(t)$

$$\int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t))x'_t dt + Q(x(t),y(t))y'_t dt$$

<table>
<tr><td colspan="2">ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА</td></tr>
<tr><td>Вид уравнения</td><td>Способ решения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнения с разделяющимися переменными</td></tr>
<tr><td>$y' = f(x)g(y)$</td><td rowspan="2">Разделить переменные</td></tr>
<tr><td>$M_1(x)N_1(y)dx + $
$+ M_2(x)N_2(y)dy = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Однородные уравнения</td></tr>
<tr><td>а) $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$</td><td rowspan="3">Использовать подстановку
$\frac{y}{x} = t$,
$y = t \cdot x$,
$y' = t' \cdot x + t$</td></tr>
<tr><td>б) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$,
где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – однородные функции одного порядка</td></tr>
<tr><td>в) $y' = f(x, y)$,
где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка</td></tr>
<tr><td colspan="2">Линейные уравнения</td></tr>
<tr><td>$y' + p(x)y = f(x)$</td><td>Использовать подстановку
$y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$
(u, v – функции от x)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнение Бернулли</td></tr>
<tr><td>$y' + p(x)y = f(x)y^n$,
где $n \neq 0$, $n \neq 1$</td><td>Использовать подстановку
$y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$
(u, v – функции от x)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнение в полных дифференциалах</td></tr>
<tr><td>$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$,
причем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$</td><td>Найти функцию, полный дифференциал которой стоит в левой части уравнения, по одной из формул
$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C$
$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C$
(точка $(x_0; y_0)$ выбирается произвольно, но так, чтобы не нарушалось условие непрерывности подынтегральных функций)</td></tr>
</table>

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА		
Вид уравнения	Пример	Способ решения
1. $y^{(n)} = f(x)$	$y'' = x^2 + \dfrac{1}{x^2+1}$	Проинтегрировать столько раз, каков порядок производной
2. $y'' = f(x, y')$ явно нет y	$y'' \cdot (x+7) = y'$	Подстановка $y' = z,\ y'' = z'$, где $z = z(x),\ z' = \dfrac{dz}{dx}$
3. $y'' = f(y, y')$ явно нет x	$y'' \cdot (y+3) = (y')^2$	Подстановка $y' = z,\ y'' = zz'$, где $z = z(y),\ z' = \dfrac{dz}{dy}$
4. $F(x, y, y', y'') = 0$; $F(x, y, y', y'')$ – однородная функция относительно y, y', y''	$x^2 yy'' = (y - xy')^2$	Подстановка $\dfrac{y'}{y} = z,\ y' = zy$; $y'' = y(z' + z^2),\ z' = \dfrac{dz}{dx}$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА	
Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	
ДУ: $y'' + py' + qy = 0$, где $p, q \in R$; $y'' \sim k^2,\ y' \sim k,\ y \sim 1$; $k^2 + pk + q = 0$ – характеристическое уравнение	
Корни характеристического уравнения	Вид общего решения ДУ
Корни характеристического уравнения действительные, различные, т.е. $k_1 \neq k_2,\ (D > 0)$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Корни характеристического уравнения действительные, равные, т.е. $k_1 = k_2,\ (D = 0)$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
Корни характеристического уравнения комплексные, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ (D < 0)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

$$\text{ДУ: } y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$$

$$k^2 + pk + q = 0 \text{ – характеристическое уравнение}$$

$$\text{Общее решение: } Y = y + \overline{y}$$

<table>
<tr><th>Корни характеристического уравнения</th><th>Вид частного решения</th><th>Вид многочлена</th></tr>
<tr><td>1. α – не корень характеристического уравнения, т.е.
$\alpha \neq k_1,\ \alpha \neq k_2$</td><td>$\overline{y} = Q_n(x)e^{\alpha x}$</td><td rowspan="3">$n = 0$
$Q_0(x) = A$,

$n = 1$
$Q_1(x) = Ax + B$,

$n = 2$
$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$,

$n = 3$
$Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$</td></tr>
<tr><td>2. α – однократный корень характеристического уравнения, т.е.
$\alpha = k_1$ или $\alpha = k_2$</td><td>$\overline{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x}$</td></tr>
<tr><td>3. α – двукратный корень характеристического уравнения, т.е.
$\alpha = k_1 = k_2$</td><td>$\overline{y} = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$</td></tr>
</table>

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

$$\text{ДУ: } y'' + py' + qy = M\cos\beta x + N\sin\beta x$$

$$k^2 + pk + q = 0 \text{ – характеристическое уравнение}$$

$$\text{Общее решение: } Y = y + \overline{y}$$

Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$\pm\beta i$ – не корень характеристического уравнения $\pm\beta i \neq k_{1,2}$	$\overline{y} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$
$\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения $\pm\beta i = k_{1,2}$	$\overline{y} = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЯДЫ $\sum^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

Необходимый признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (если ряд $\sum\limits^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim a_n = 0$)

← Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится или расходится? (исследовать дальше)

→ Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. КОНЕЦ!

↓

Достаточные признаки сходимости

Теорема Сравнения	*Признак Даламбера*	*Радикальный признак Коши*	*Интегральный признак Коши*
Если для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$, $\begin{matrix} k \neq 0 \\ k \neq \infty \end{matrix}$, то ряды ведут себя одинаково, либо оба сходятся, либо оба расходятся	Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l > 1$ ряд расходится; при $l < 1$ ряд сходится; при $l = 1$ признак ответа не дает	Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l > 1$ ряд расходится; при $l < 1$ ряд сходится; при $l = 1$ признак ответа не дает	Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на $[1;\infty)$ функции $f(x)$ так, что $a_1 = f(1), \ldots, a_n = f(n), \ldots$, то $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ одновременно сходятся или расходятся

ПРИМЕНЕНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЗНАКОВ СХОДИМОСТИ

<table>
<tr><th>Признак</th><th>a_n – содержит</th><th>Пример</th><th>Эталонные ряды (ряды для сравнения)</th></tr>
<tr><td>Теорема сравнения</td><td>а) многочлены (степень числителя меньше степени знаменателя);
б) корни;
в) синус, тангенс, арксинус, арктангенс.</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+3n}{n^3+1}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+3}}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$</td><td rowspan="4">1. Гармонический ряд
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ – ряд расходится

2. Общегармонический ряд (ряд Дирихле)
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha>0$
сходится при $\alpha>1$
расходится при $\alpha\le 1$

3. Геометрический ряд
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a\cdot q^{n-1}$
сходится при $\lvert q\rvert<1,\ S=\frac{a}{1-q}$
расходится при $\lvert q\rvert\ge 1$</td></tr>
<tr><td>Признак Даламбера</td><td>а) факториал;
б) показательную функцию.</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n+1}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n+2)}{(n+3)!}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4n+1}$</td></tr>
<tr><td>Радикальный признак Коши</td><td>выражение вида n^n</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{5n}\right)^{2n}$</td></tr>
<tr><td>Интегральный признак Коши</td><td>Применяется во всех остальных случаях</td><td>$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$</td></tr>
</table>

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \qquad a_n>0$$

Исследовать на сходимость

Применить теорему Лейбница:

1. $\grave{a}_n > a_{n+1}$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – <u>сходится</u>, $(S \le a_1)$

если оба условия теоремы Лейбница выполняются

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – <u>расходится</u>,

если хотя бы одно из условий теоремы Лейбница не выполняется

Исследовать на абсолютную, условную сходимость

Исследовать ряд из модулей, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}a_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,

по одному из достаточных признаков

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}a_n\right|$ – расходится

К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ применить т. Лейбница

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – сходится по т. Лейбница,

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – <u>сходится условно</u>

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – расходится по т. Лейбница,

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}a_n\right|$ – сходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ – <u>сходится абсолютно</u>

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ РЯД

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad u_n(x)\text{ – функции}$$

Степенной ряд

По степеням x, 0 – центр ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

По степеням $(x-x_0)$, x_0 – центр ряда

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

Радиус сходимости: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Интервал сходимости:

ряд расходится | ряд сходится | ряд расходится

$-R$ $\quad 0 \quad$ R

Интервал сходимости:

ряд расходится | ряд сходится | ряд расходится

x_0-R $\quad x_0 \quad$ x_0+R

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Ряд Тейлора

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ряд Маклорена

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Схема разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора (Маклорена)

1. Найти все последовательные производные функции.
2. Вычислить $f(x_0),\ f'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$.
3. Записать формально ряд Тейлора (Маклорена):

$$f(x)\ \sim f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

4. Найти интервал сходимости полученного ряда Тейлора.
5. Найти множество таких x из этого интервала, для которых

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad \text{или} \quad \left|f^{(n)}(x)\right|<C.$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД МАКЛОРЕНА

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + 1$$

$$-1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$-1 < x \le 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$-1 \le x \le 1$$

РЯДЫ ФУРЬЕ

Ряд Фурье для функции $f(x)$ с периодом 2π на интервале $(-\pi;\pi)$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\ \text{где}\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

Ряды Фурье для четных и нечетных функций с периодом 2π

$f(x)$ – *четная*: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$,

где $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$, $b_n=0$

$f(x)$ – *нечетная*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$,

где $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$

Ряд Фурье для функции с периодом 2ℓ

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right),\ \text{где}\ a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx$$

Ряды Фурье для четных и нечетных функций с периодом 2ℓ

$f(x)$ – *четная*: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{\ell}x$,

где $a_0=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}f(x)dx$, $a_n=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}f(x)\cos\dfrac{\pi nx}{\ell}dx$, $b_n=0$

$f(x)$ – *нечетная*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi}{\ell}x$,

где $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n=\dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell}f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{\ell}dx$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баврин, И. И. Высшая математика : учеб. для студ. естественно-научных специальностей педагогических вузов / И. И. Баврин. – М. : Академия, 2004, – 616 с.

2. Мордкович, А. Г. Математический анализ : учеб. пособие / А. Г. Мордкович, А. С. Солодовников. – М. : Вербум-М, 2000. – 416 с.

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко и др. ; под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 567 с.

4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для втузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов – М. : Интеграл-Пресс, 2003.

Т. 1. – 416 с.

Т. 2. – 544 с.

Приложение

Степени с действительным показателем

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$.
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.
5. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.
7. $a^0 = 1,\ a \neq 0$.
8. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a \neq 0$.
9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Логарифмы

1. Определение: $\log_a x = b \Rightarrow a^b = x$, где $a > 0, a \neq 1$.
2. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$.

Свойства логарифмов

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.
2. $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$.
3. $\log_a x^n = n \log_a x$.
4. $\log_a a = 1$.
5. $\log_a 1 = 0$.

Формулы перехода к новому основанию

1. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.
2. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.
3. $\log_{a^m} b = \dfrac{1}{m}\log_a b$.
4. $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$.
5. $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$.

Формулы сокращенного умножения

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Прогрессии

	Определение	Формула n-го члена	Сумма
Арифметическая прогрессия	$a_n = a_{n-1} + d$, где d – разность арифметической прогрессии	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$
Геометрическая прогрессия	$b_n = b_{n-1} \cdot q$, где q – знаменатель геометрической прогрессии	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{(1-q)},\ q \neq 1$ $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ – сумма всей убывающей прогрессии

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Основные тригонометрические формулы

Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента

1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. 2. $tgx\cdot ctgx=1$. 3. $tg^2x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. 4. $ctg^2x+1=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Формулы двойного аргумента

1. $\sin 2x=2\sin x\cos x$. 2. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. 3. $tg2x=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$.

Формулы понижения степени

1. $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$. 2. $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

3. $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$. 4. $1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$

Формулы сложения

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$. 2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

3. $tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$. 4. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

5. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. 6. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

7. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Уравнения

1. $\sin x=a \;\Rightarrow\; x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\quad \sin x=0 \;\Rightarrow\; x=\pi n,\; n\in Z.$

$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$

2. $\cos x=a \;\Rightarrow\; x=\pm\arccos a+2\pi n,\quad \cos x=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\; n\in Z.$

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$

3. $tgx=a \;\Rightarrow\; x=arctga+\pi n,\quad tgx=0 \;\Rightarrow\; x=\pi n,\; n\in Z.\quad arctg(-x)=-arctgx.$

РЯДЫ ФУРЬЕ

Ряд Фурье для функции $f(x)$ с периодом 2π на интервале $(-\pi;\pi)$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\ \text{где}\ \ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ \ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

Ряды Фурье для четных и нечетных функций с периодом 2π

$f(x)$ – *четная*: $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$, $b_n=0$

$f(x)$ – *нечетная*: $$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$

Ряд Фурье для функции с периодом 2ℓ

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right),\ \text{где}\ \ a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ \ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx$$

Ряды Фурье для четных и нечетных функций с периодом 2ℓ

$f(x)$ – *четная*: $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x,$$

где $a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx$, $b_n=0$

$f(x)$ – *нечетная*: $$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

где $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx$

Учебное пособие

ЗНАЕНКО

Наталья Сергеевна

ОПОРНЫЕ СХЕМЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Редактор Т. Е. Мещерякова

Компьютерная верстка И. А. Ерёмина

Подписано в печать 2011. Формат 60×90/8. Бумага офсетная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 11,25. Уч.-изд. л. 4,73.

Тираж Заказ

РИО и типография УВАУ ГА(И). 432071, г. Ульяновск, ул. Можайского, 8/8