



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда модель (2.2) можно записать в матричном виде

$$X = AX + C. \quad (2.3)$$

Перенесем член  $AX$  в левую часть для нахождения неизвестного вектора  $X$ :

$$(E - A)X = C.$$

Здесь  $E$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если матрица  $E - A$  не вырождена (ее определитель  $|E - A| \neq 0$ ), то она имеет обратную матрицу  $(E - A)^{-1}$ , и, по определению,

$$(E - A) \cdot (E - A)^{-1} = (E - A)^{-1} (E - A) = E.$$

С помощью обратной матрицы вектор выпуска находится по формуле

$$X = (E - A)^{-1} C. \quad (2.4)$$

Модель Леонтьева называется **продуктивной**, если вектор-решение  $X$  содержит неотрицательные компоненты  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## ***2.2. Модель Леонтьева-Форда межотраслевого баланса с экологической составляющей.***

Первыми моделями, связывающими экономику и экологию, были балансовые модели эколого-экономических систем, базирующиеся на модели межотраслевого баланса Леонтьева и являющиеся выражением закона сохранения вещества в биосфере.

Учет затрат на природоохранные мероприятия в модели межотраслевого баланса осуществляется при следующих предположениях.

1. Промышленность, кроме  $n$  конечных продуктов, производит  $k$  загрязнителей.

2. Все технологические процессы обезвреживания производственных отходов определенного типа выделяются в чистую отрасль, продукцией которой считается объем обезвреженных отходов.

3. Затраты на ликвидацию загрязнителей прямо пропорциональны массе обрабатываемого загрязнителя, т.е. стоимость обезвреживания единицы

каждого загрязнителя постоянна.

В этом случае матрица  $A$  коэффициентов прямых затрат является блочной и имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $A_{11}$  – обычная матрица коэффициентов прямых затрат размерности  $n \times n$ , коэффициенты  $a_{ij}$  которой характеризуют величину поставок  $i$ -того продукта для производства единицы продукта  $j$ -той отрасли без учета затрат на ликвидацию отходов;

$A_{12}$  – матрица размера  $n \times k$ , коэффициенты которой  $a_{il}$  характеризуют затраты продукта  $i$ -той отрасли, необходимые для обезвреживания единицы  $l$ -того загрязнителя;

$A_{21}$  – матрица размера  $k \times n$ , коэффициенты которой  $a_{lj}$  характеризуют количество  $l$ -того вредного вещества, сопутствующее выпуску единицы продукции  $j$ -той отрасли;

$A_{22}$  – матрица размера  $k \times k$ , коэффициенты которой  $a_{lj}$  характеризуют производство загрязнителя  $i$ -того типа, сопутствующее ликвидации единицы  $j$ -того загрязнителя.

Уравнение межотраслевого баланса в этом случае будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где  $X_1$  – вектор валовых выпусков отраслей материального производства;  $X_2$  – вектор ликвидации загрязнителей;  $C_1$  – вектор конечного продукта;  $C_2$  – вектор выпуска загрязнителей.

Это матричное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} E - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E - A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Эта модель межотраслевого баланса называется **моделью Леонтьева-Форда**. Она позволяет сравнивать различные технологии производства продуктов и ликвидации отходов по соответствующему им вектору выпуска загрязнителей  $C_2$ , а также определять суммарные затраты отраслей на природоохранные мероприятия.

Далее рассмотрим более подробно использование модели Леонтьева-Форда для учета затрат на очистку промышленных выбросов. В этом случае матрицы  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  и векторы  $X_1, X_2, C_1, C_2$  в уравнении (2.5) имеют следующие виды:

$A_{11} = A_0$ , где  $A_0$  – матрица коэффициентов  $a_{ij}^0$ , характеризующих величину поставок  $i$ -того продукта для производства единицы  $j$ -того продукта без учета

затрат на очистку выбросов  $j$ -той отрасли;

$A_{12} = \tilde{A}$ , где  $\tilde{A}$  – матрица коэффициентов  $\tilde{a}_{ij}$ , отражающих затраты продукта  $i$ -той отрасли на очистку единицы объема выбросов  $j$ -той отрасли до санитарных норм;

$A_{21} = A_d$ , где  $A_d$  – диагональная матрица коэффициентов  $d_i$ , обозначающих объем выбросов  $i$ -той отрасли, выпускаемых при производстве единицы продукции вида  $i$  и поступающих на очистку;

$A_{22} = 0$ , поскольку предполагается, что процесс очистки не сопровождается появлением новых загрязнителей;

$X_1 = X$  – по-прежнему вектор валовых выпусков отраслей материального производства;

$X_2 = V$ , где  $V$  – вектор с координатами  $V_i$ , определяющими весь объем выбросов  $i$ -той отрасли;

$C_1 = C$  – вектор конечного продукта;

$C_2 = 0$ , поскольку основная цель моделирования состоит в учете затрат на очистку выбросов, и неочищенные выбросы в модели не учитываются.

Получаем следующее матричное уравнение расширенного межотраслевого баланса:

$$\begin{pmatrix} E - A_0 & -\tilde{A} \\ -A_d & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, от матрицы  $A$  традиционной схемы межотраслевого баланса мы перешли к матрице

$$A' = \begin{pmatrix} A_0 & \tilde{A} \\ A_d & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае балансовое уравнение

$$X = AX + C$$

преобразуется в систему уравнений

$$\begin{cases} X = A_0X + \tilde{A}V + C, \\ V = A_dX. \end{cases} \quad (2.6)$$

Смысл уравнений первого вида состоит в том, что валовой выпуск  $i$ -той отрасли  $x_i$  должен покрывать спрос на ее продукт со стороны всех  $n$  отраслей материального производства, потребность в нем процессов очистки выбросов всех отраслей и заданный конечный продукт  $c_i$ . Уравнения второго типа определяют весь объем стоков  $i$ -той отрасли.

Подставив второе из уравнений (2.6) в первое, перепишем его в следующей форме:

$$X = (A_0 + \tilde{A}A_d)X + C. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что матрица технологических коэффициентов в случае учета затрат на очистку стоков имеет следующий вид:

$$A = A_0 + \tilde{A}A_d.$$

Решение уравнения (2.7) запишется в виде:

$$X = (E - A_0 + \tilde{A}A_d)^{-1}C. \quad (2.8)$$

Таким образом, выделение в межотраслевом балансе деятельности по очистке выбросов ведет к изменению матрицы коэффициентов прямых затрат для всех отраслей, так как в исходной модели межотраслевые поставки продуктов для очистки выбросов отрасли учитываются вместе с поставками продуктов, непосредственно идущих на производство. Поэтому коэффициенты прямых затрат  $a_{ij}$ , соответствующие отрасли материального производства, должны уменьшиться на величину средств, которые необходимы для обезвреживания выброса, сопутствующего выпуску единицы продукции  $j$ -той отрасли:

$$a_{ij}^0 = a_{ij} - a_{ij}v_j.$$

Недостатки рассмотренной модели:

1. Предположение о том, что затраты на очистные мероприятия прямо пропорциональны массе обрабатываемого загрязнителя, на практике выполняются не всегда. Например, при очистке сточных вод затраты на очистку пропорциональны не массе загрязнителя, а его концентрации.

2. В выбросах обычно присутствует несколько загрязнителей, и обезвреживание одного из них производится одновременно с обезвреживанием остальных. В этом случае выделить чистую отрасль, ликвидирующую один загрязнитель, затруднительно.

3. Не учитываются затраты на утилизацию отходов, в которые превращается любое изделие, отслужившее свой срок.

### ***2.3. Глобальные балансовые модели.***

Простейшие модели, описывающие глобальные процессы взаимодействия экономических и экологических процессов, базируются на модели межотраслевого баланса. Основная идея, лежащая в основе их построения, заключается в том, что поток вещества из природной среды должен быть равен потоку вещества из производства обратно в природную среду. Таким образом, эти модели по своему содержанию являются выражением закона сохранения вещества и энергии в глобальных процессах взаимодействия производства и биосферы.

Исторически первой моделью такого рода является балансовая **модель Дейли**. Она представляет собой замыкание балансовой модели Леонтьева за счёт включения в неё кроме промышленных отраслей биологических и косных компонентов биосферы. Матрица этой модели приведена на рис. 2.1.

Третий квадрант представляет собой традиционную межотраслевую матрицу. Первый квадрант отражает материальные потоки из производственной сферы в природную среду. Второй квадрант содержит показатели использования природных ресурсов в экономике. Четвертый квадрант характеризует внутренние взаимосвязи элементов биосферы. Модель Дейли удовлетворяет основным принципам моделирования межотраслевых связей. Во-первых, вследствие того, что изменения в экологических системах происходят гораздо более медленно, чем в экономических, все технологические коэффициенты можно считать постоянными. Во-вторых, потоки вещества в производственной сфере меньше потоков вещества в экологических и эколого-экономических блоках I, II и IV, и, следовательно, справедливо предположение о линейности модели.

	Сельское хозяйство	Промышленность	Услуги	Животный мир	Растительный мир	Бактерии	Атмосфера	Гидросфера	Литосфера	Солнечная энергия
Сельское хозяйство										
Промышленность		I					II			
Услуги										
Животный мир										
Растительный мир										
Бактерии										
Атмосфера		III					IV			
Гидросфера										
Литосфера										
Солнечная энергия										

Рис. 2.1. Матрица балансовой модели Дейли.

Для построения замкнутой балансовой модели Дейли необходим большой объём информации обо всех материальных потоках в экономике и биосфере. При этом модель перестаёт быть чисто экономической, в ней учитывается взаимодействие хозяйственных и природных процессов. Практическое построение такой модели требует участия специалистов многих отраслей науки.

Более точной эколого-экономической моделью является **модель Айзарда**. В основе этой модели лежит модель Дейли, в которой выделены регионы моря и суши. Это связано с существенными различиями их физических свойств и протекающих в них процессов. В зависимости от цели исследования могут выделяться и другие регионы. Например, при изучении отраслей, выделяющих в атмосферу большое число вредных веществ, целесообразно выделить регион «воздух».

В самом общем виде двухрегиональная балансовая модель, учитывающая



$$F = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0$$

принимает наибольшее (наименьшее) значение.

Для превращения экономической модели в эколого-экономическую достаточно к экономическим ограничениям добавить ограничения экологические.

Покажем на примере, как решается указанная задача геометрическим методом, для чего ограничимся рассмотрением совместной системы неравенств с двумя переменными.

Пусть предприятие выпускает два вида продукции, объемы которых  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно, используя два исходных продукта. На производство единицы первого вида продукции тратится 1 единица первого исходного продукта, а на производство единицы второго вида продукции – 4 единицы. При этом запас первого исходного продукта превышает 4 единицы. На производство единицы первого и второго видов продукции тратится по 1 единице второго исходного продукта. Запас второго исходного продукта не превышает 6 единиц. Объем  $x_2$  не превышает 2 единиц. Стоимость единицы первого вида продукции – 1 у.е., стоимость единицы второго вида продукции – 3 у.е. Какое количество первого и второго вида продукции нужно произвести для получения максимальной прибыли?

Целевая функция будет иметь вид:

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (2.9)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \\ 0 \leq x_2 \leq 2. \end{cases} \quad (2.10)$$

$ABCDE$  – область допустимых решений (рис. 2.2). Решим задачу геометрическим методом. Для этого построим прямую  $L: x_1 + 3x_2 = 0$  и вектор  $\vec{c}(1,3)$  ей перпендикулярный. Этот вектор указывает направление возрастания функции  $F(x_1, x_2)$ . Параллельным переносом перемещаем прямую  $L$  до пересечения ее с точкой выхода прямой из области допустимых решений. Такой точкой является точка  $B(4,2)$  пересечения прямых  $x_1 + x_2 = 6$  и  $x_2 = 2$ , в которой и будет оптимальное решение:

$$F_{\max} = F(4,2) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 10.$$



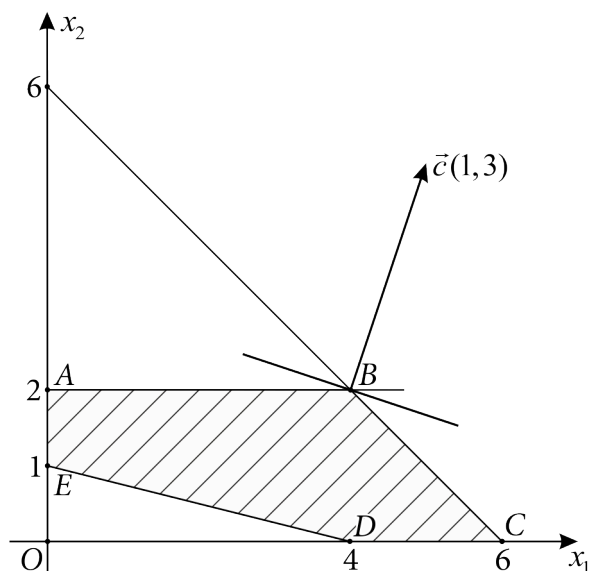


Рис. 2.2. Геометрическое решение задачи линейного программирования.

Введем в экономическую задачу экологические ограничения. Пусть при производстве первого вида продукции производится 1 единица загрязнителя на единицу объема, а при производстве второго вида продукции – 2 единицы. Тогда имеем неравенство

$$x_1 + 2x_2 \leq m, \quad (2.11)$$

где  $m$  – максимально допустимая норма выбросов. При различных значениях  $m$  получаем разные решения задачи (2.9)-(2.11). Если  $m=1$ , то задача не имеет решения (рис. 2.3), область  $OEF$ , задаваемая неравенствами (2.11) и  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , не пересекается с областью  $ABCDE$ . Если  $m=6$ , то имеем область допустимых

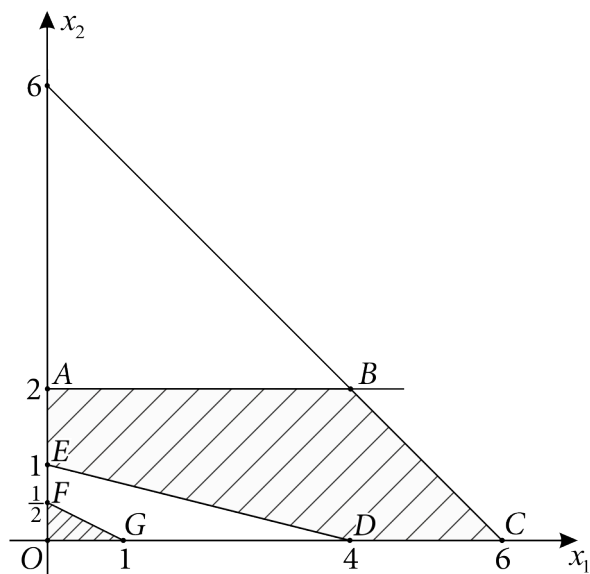


Рис. 2.3. Решение задачи линейного программирования при сильном экологическом ограничении.

решений  $AMCDE$  (рис. 2.4) и максимальное значение целевой функции достигается в точке  $M$  :

$$F_{\max} = F(2,2) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 8.$$

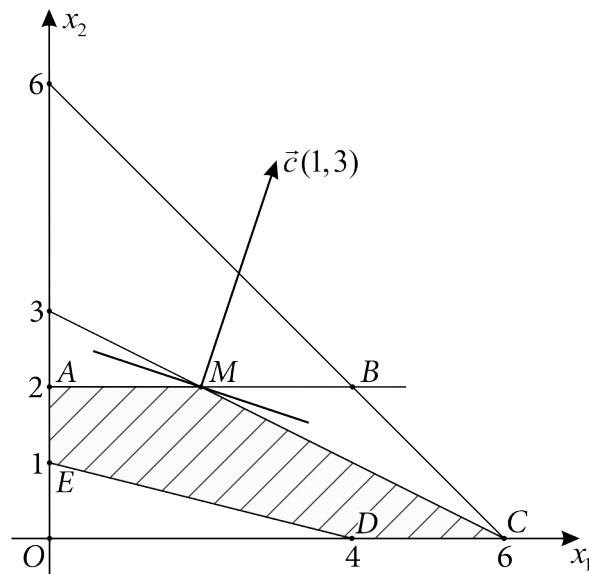


Рис. 2.4. Уменьшение максимума целевой функции при экологическом ограничении.

Если же  $m = 10$ , то сохраняется область допустимых решений экономической задачи и, по-прежнему,  $F_{\max} = 10$  (рис. 2.5).

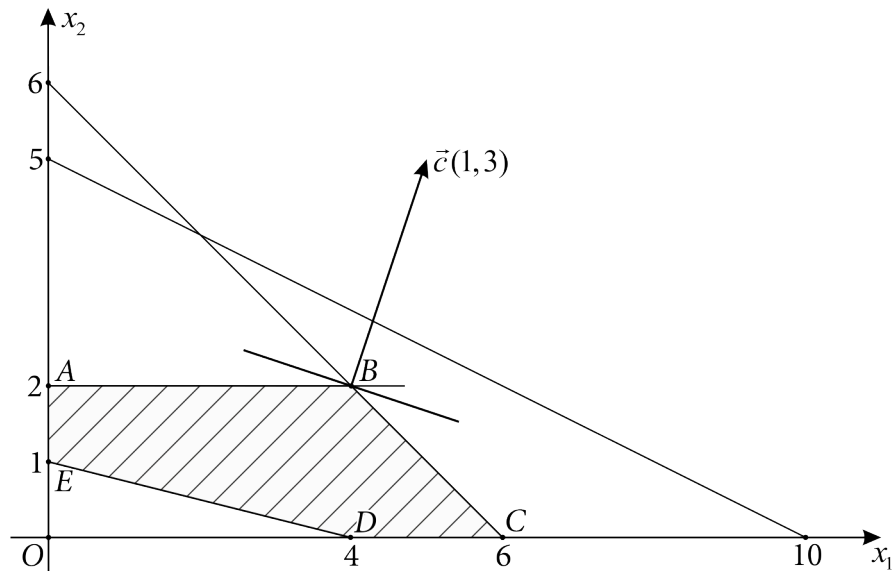


Рис. 2.5. Сохранение решения задачи линейного программирования при экологическом ограничении.

Таким образом, дополнительные экологические ограничения могут приводить к уменьшению максимального значения целевой функции или вообще к отсутствию оптимального решения.

## 2.5. Модель системы «предприятие-ресурс» с восстановлением ресурса.

Рассмотрим модель однопродуктовой экономики. В этой экономике производится продукт, для изготовления которого нужен некоторый ресурс, источником которого является биосфера. Природный ресурс из добывающей отрасли передается в производящую отрасль, где из него производится конечный продукт. Произведенный продукт поступает в сферу потребления, где находится в течение некоторого времени, равного времени жизни изделия. Отслужившие свой срок изделия в виде отходов поступают в восстанавливающую отрасль, которая возвращает использованный ресурс в биосферу. Предполагается, что других источников отходов, кроме вышедших из строя изделий, нет. Дополнительный учет отходов, возникающих в процессе производства, не вызывает принципиальных трудностей и может быть легко выполнен.

Пусть  $V$  – мощность предприятия, перерабатывающего природный ресурс. Предприятие перерабатывает природный ресурс, производя из него некоторый конечный продукт. Постоянную долю своих доходов предприятие тратит на рост производственной мощности. При достаточно большом запасе ресурса, который не ограничивает рост производства, такая стратегия приводит к экспоненциальному росту производственной мощности, описываемому следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dV}{dt} = aV.$$

Здесь  $a$  – идеальный темп роста производственной мощности при неограниченном запасе ресурса.

С уменьшением запаса природного ресурса темп роста производственной мощности уменьшается, и её динамика описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\frac{dV}{dt} = \left( a - \frac{g}{R} \right) V.$$

Такой вид уравнения отражает рост затрат на добычу сырья при уменьшении его запасов. В этом уравнении  $g$  – некоторая константа, зависящая от вида ресурса и условий его добычи,  $R$  – величина ресурса. Если производственное потребление ресурса происходит с интенсивностью  $cV$ , где  $c$  – некоторая константа, то динамика запаса ресурса описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dR}{dt} = -cV.$$

Это уравнение соответствует случаю использования невозобновимого минерального ресурса или использованию биологического ресурса при скорости его производственного потребления, значительно превосходящей скорость его естественного восстановления.

Таким образом, динамика системы «предприятие – ресурс» описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \left(a - \frac{g}{R}\right)V, \\ \frac{dR}{dt} = -cV. \end{cases} \quad (2.12)$$

Графики решения этой системы уравнений при различных темпах роста производственной мощности  $a$  приведены на рис. 2.6 и 2.7.

В начальный период добычи ресурса производственная мощность непрерывно нарастает. Однако по мере истощения ресурса его запас все более влияет на поведение всей системы «предприятие – ресурс», которое приобретает кризисный характер: производственная мощность переходит через максимум и начинает резко падать. При большем темпе роста предприятие развивает большую производственную мощность, но и кризис, связанный с нехваткой ресурса, наступает быстрее. Этот характер зависимостей сохраняется при любых значениях константы  $g$ .

Из приведенных графиков видно, что чем быстрее потребляется ресурс, тем меньше максимальная достижимая производственная мощность и быстрее наступает кризис.

Такой же качественный характер изменения во времени производственной мощности и запаса ресурса сохраняется при различных начальных запасах ресурса и начальной производственной мощности.

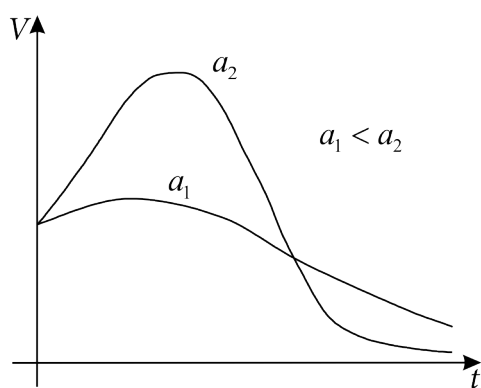


Рис. 2.6. Динамика производственной мощности.

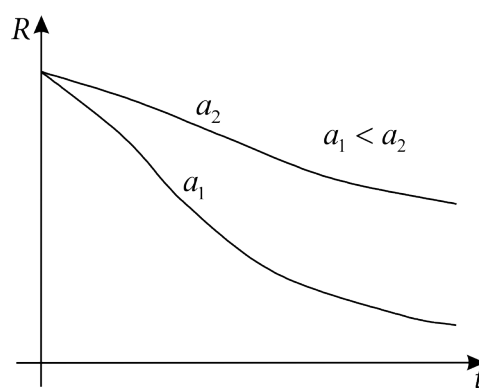


Рис. 2.7. Динамика запаса сырьевого ресурса.

Предприятие может развивать большую производственную мощность при большем начальном запасе ресурса, но кризис в этом случае заставит значительно сокращать производство, когда запасы ресурса начнут быстро уменьшаться из-за их быстрого использования. С другой стороны, при прочих равных условиях большая начальная мощность предприятия приводит к достижению большей максимальной мощности и к более быстрому истощению ресурса.

Избежать кризиса до какого-то отдаленного момента времени можно, используя две стратегии поведения:

1. Уменьшать темп роста производственной мощности – при этом, очевидно, кризис можно оттянуть.

2. Принимать меры к восстановлению ресурса либо путем утилизации отработавших срок изделий для невозстановимого ресурса, либо стимулированием его воспроизводства в случае биологического ресурса.

В обоих случаях необходимо затрачивать на восстановление ресурса определенную долю средств, что приведет к снижению темпа роста производственной мощности предприятия на некоторую величину  $u$ .

Рассмотрим вторую стратегию поведения предприятия, считая скорость восстановления ресурса пропорциональной  $u$  с коэффициентом эффективности затрат  $\alpha$ . В этом случае часть инвестиций, первоначально предназначенных на развитие производства, направляется на восстановление запаса ресурса, например, на лесопосадки в случае лесоперерабатывающего предприятия или на сбор и утилизацию вышедших из строя изделий. Можно задать эту часть такой, что запас ресурса будет стабилизирован. Это означает, что предприятие будет потреблять только восстановленный ресурс. Поскольку с ростом производственной мощности будет постоянно увеличиваться и размер инвестиций, направляемых на восстановление ресурса, то такая стратегия в идеале может обеспечить непрерывный рост производства. В реальных условиях этот рост будет ограничен какими-либо внешними факторами (недостаток площадей для лесопосадок, рост затрат на восстановление при увеличении его объема и пр.).

Динамика системы «предприятие – ресурс» в этом случае описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \left[ \left( a - \frac{g}{R} \right) - u \right] V, \\ \frac{dR}{dt} = -cV + \alpha u. \end{cases} \quad (2.13)$$

Результаты моделирования показывают, что если предприятие при восстановлении ресурса не придерживается стратегии поддержания его запаса на постоянном уровне, то в системе «предприятие – ресурс» возможен колебательный режим. На рис. 2.8 приведены графики изменения производственной мощности предприятия в зависимости от темпа роста  $a$ .

Рост производственной мощности предприятия ведет к истощению запаса ресурса, что приводит к кризису и быстрому снижению производственного потребления ресурса. Поскольку потребляемый ресурс обладает способностью самовосстановления, это приводит к увеличению его запаса, и при некоторой его накопленной величине снова начинается рост производства. В системе устанавливается колебательный режим. Хорошо это или плохо, зависит от конкретного вида ресурса и конкретных условий. Примером такой ситуации может служить сезонная переработка сельскохозяйственной продукции. Аналогичный вид имеют и графики изменения запаса сырьевого ресурса.

С увеличением идеального темпа роста производственной мощности

предприятия все процессы в системе «предприятие – ресурс» идут быстрее и частота колебаний запаса ресурса и производственной мощности увеличивается.

Эксперимент показывает принципиальную возможность создания стабильного замкнутого ресурсного цикла. Для этого в состав ресурсного цикла должна быть включена восстанавливающая отрасль, и часть инвестиций направлена на создание ее производственных мощностей. В идеальном случае при отсутствии безвозвратных потерь возможен переход производящей отрасли на работу полностью за счет утилизации отходов производства.

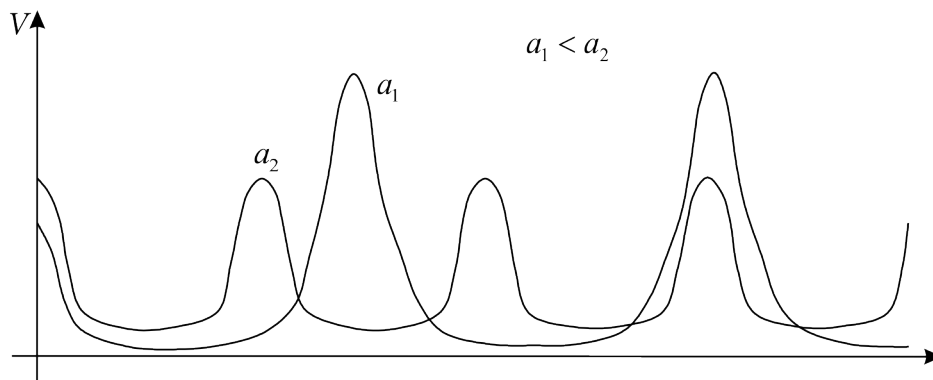


Рис. 2.8. Колебания в системе «предприятие – ресурс».

В этой главе использованы следующие источники:

1. Данилов Н.Н. Курс математической экономики. – Новосибирск: Наука, 2003. – 453 с.
2. Липенков А.Д. Моделирование эколого-экономических систем: Учеб. пособие / Под ред. Т.Б. Бигильдеевой. – Челябинск: Изд-во Челябинского госуниверситета, 2005. – 130 с.
3. Красс М.С. Моделирование эколого-экономических систем. – М.: Инфра-М, 2013. – 272 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М.: ИД «Оникс», 2014. – 304 с.