3. Модели регулирования качества окружающей среды.

3.1. Назначение штрафов за загрязнение окружающей среды.

Предположим, что на территории региона действуют N предприятий. Каждое предприятие выпускает в единицу времени продукцию в количестве

$$P_i = F_i(K_i),\ i = 1,2,...,N, \tag{3.1}$$

где F_i – производственная функция i-того предприятия, K_i – производственные фонды i-того предприятия.

Будем предполагать, что изменение производственных фондов предприятий описывается моделью Солоу в абсолютных показателях:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + Y_i,\quad i = 1,2,...,N, \tag{3.2}$$

где Y_i – инвестиции в производственные фонды i-того предприятия, μ_i – коэффициент амортизации фондов *i-то*го предприятия.

Предприятия, кроме полезного продукта, производят отходы, загрязняющие окружающую среду. Обозначим через π_i поток загрязняющих веществ, производимых i-тым предприятием:

$$\pi_i = f_i(K_i, V_i), \tag{3.3}$$

где V_i – затраты предприятия на совершенствование технологий или очистных сооружений.

За загрязнение окружающей среды предприятие облагается штрафом w_i, размер которого пропорционален количеству загрязняющих веществ, сбрасываемых в окружающую среду:

$$w_i = c\pi_i = cf_i(K_i, V_i). \tag{3.4}$$

Величина коэффициента штрафа c находится в распоряжении регионального центра управления. Управления V_i и K_i находятся в распоряжении предприятий, в деятельность которых центр не имеет права вмешиваться.

Для простоты будем предполагать, что все финансовые средства, полученные предприятием от реализации продукции, расходуются только на развитие производства, создание очистных сооружений и уплату штрафов. Это условие можно записать в виде следующего выражения:

$$F_i(K_i) = Y_i + V_i + w_i. \tag{3.5}$$

Дальнейший анализ будем проводить с точки зрения регионального центра управления. Он имеет возможность назначения величины коэффициента штрафа за загрязнение c, которую сообщает производителям.

Будем предполагать, что предприятие выбирает свое управляющее воздействие V_i из условия минимизации своих затрат на очистные сооружения и штрафы:

$$V_i + w_i \to \min. \tag{3.6}$$

Поскольку в момент принятия решений производители знают цену, которую они должны платить за загрязнение, их стратегии определяются из условий

$$V_i + c\pi_i = V_i + cf_i(F_i(K_i), V_i) \to \min,\ i = 1,2,...,N \tag{3.7}$$

при ограничениях

$$V_i + cf_i(F_i(K_i), V_i) \le F_i(K_i),\ \ V_i \ge 0,\ i = 1,2,...,N. \tag{3.8}$$

Решение этой задачи позволяет региональному центру определить капитальные затраты предприятий на усовершенствование технологий и внутреннюю очистку. Они будут зависеть только от объема фондов K_i и штрафа за загрязнение *c*. Решая задачу (3.7), (3.8), найдем, что

$$V_i = \Psi_i(c, K_i). \tag{3.9}$$

Рассмотрим простейший случай. Будем предполагать, что производственная функция зависит только от величины фондов. Тогда объем выпускаемой продукции будет равен

$$P_i = s_i K_i. \tag{3.10}$$

Допустим, что поток загрязняющих веществ прямо пропорционален объему выпускаемой продукции и обратно пропорционален затратам на очистку и совершенствование технологии:

$$\pi_i = \frac{l_i P_i}{a_i + V_i}$$

или с учетом (3.10)

$$\pi_i = \frac{l_i s_i K_i}{a_i + V_i}. \tag{3.11}$$

Здесь l_i и a_i – некоторые константы.

Тогда величина штрафа за загрязнение с учетом (3.4) будет определяться выражением

$$w_i = \frac{c l_i s_i K_i}{a_i + V_i}. \tag{3.12}$$

Подставив (3.12) в (3.7), получим выражение для целевой функции:

$$J_i = V_i + \frac{c l_i s_i K_i}{a_i + V_i}. \tag{3.13}$$

Предположим, что значение V_i, обеспечивающее минимум целевой функции, лежит внутри интервала, который определяется условиями (3.8). Тогда выбор предприятия можно найти из условия

$$\frac{\partial J_i}{\partial V_i} = 0. \tag{3.14}$$

Целевая функция J_i, определяемая равенством (3.14), приведена на рис. 3.13. Она имеет единственный минимум $V_i = V_i^*$, определяемый из уравнения (3.14):

$$V_i^* = \sqrt{cl_i s_i K_i} - a_i. \tag{3.15}$$

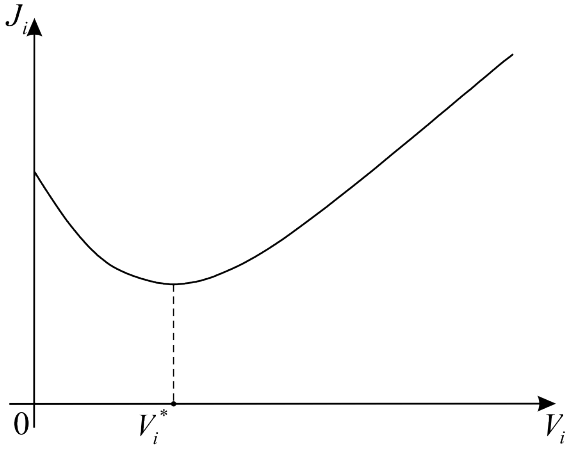

Рис. 3.1. Целевая функция

Подставив (3.15) в формулы (3.11) и (3.12), найдем поток загрязняющих веществ

$$\pi_i = \sqrt{\frac{l_i s_i K_i}{c}}$$

и величину штрафа за загрязнение

$$w_i = \sqrt{cl_i s_i K_i}.$$

Пусть по-прежнему на территории региона расположено N предприятий, загрязняющих окружающую среду. Рассмотрим случай, когда средства $q = \sum_{i=1}^{N} w_i$, полученные региональным центром за счет штрафов, расходуются на централизованную очистку среды.

Обозначим уровень загрязнения среды, выражаемый, например, концентрацией вредных веществ, через x. Тогда балансовое дифференциальное уравнение, описывающее динамику уровня загрязнения среды, будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \pi_i - f(x) - W(q), \qquad i = 1,...,N. \tag{3.16}$$

Здесь $f(x)$ – поток загрязняющих веществ, уничтожаемых естественной самоочисткой среды, $W(q)$ – поток загрязняющих веществ, уничтожаемых централизованной очисткой.

Функция $f(x)$, как правило, является выпуклой и имеет порог насыщения, поскольку эффективность самоочистки не может превзойти некоторого предела f^* (рис. 3.14).

Пусть функция $W(q)$ имеет следующий вид:

$$W = k \sum_{i=1}^{N} w_i ,$$

где k – константа.

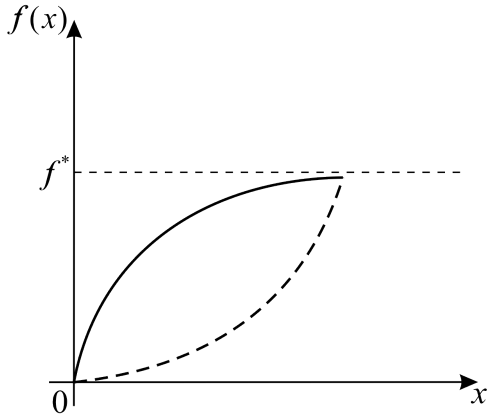

Рис. 3.2. Эффективность самоочистки.

Будем считать, что штраф w_i пропорционален потоку загрязняющих веществ:

$$W = kc \sum_{i=1}^{N} \pi_i .$$

Постоянная c является величиной штрафа, которую назначает региональный центр за поток загрязнения единичной мощности.

При этих предположениях дифференциальное уравнение (3.16) можно записать так:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (1 - kc) \sum_{i=1}^{N} \pi_i - f(x). \tag{3.17}$$

Каждое предприятие в момент принятия решения о выборе величины затрат V_i на очистку знает политику назначения штрафов регионального центра и может найти оптимальную величину $V_i = \Psi_i(c, K_i),$ решая задачу оптимизации (3.7), (3.8). Региональный центр тоже может вычислить величину V_i аналогичным образом. Это позволит найти поток загрязняющих веществ *i*-того предприятия

$$\pi_i = f_i(P_i, V_i).$$

С учетом (3.3) и (3.9) получим

$$\pi_i = f_i\left[F_i(K_i), \Psi_i(c, K_i)\right].$$

Введя обозначение

$$f_i^*(K_i, c) = f_i\left[F_i(K_i), \Psi_i(c, K_i)\right],$$

поток загрязняющих веществ можно записать так:

$$\pi_i = f_i^*(K_i, c). \tag{3.18}$$

Тогда уравнение динамики загрязнения среды (3.17) примет следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (1 - kc)\sum_{i=1}^{N} f_i^*(K_i, c) - f(x). \tag{3.19}$$

Рассмотрим мотивы, которыми руководствуется региональный центр при назначении штрафа. Прежде всего, он стремится, чтобы качество окружающей среды не ухудшалось, то есть, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial x}{\partial t} \le 0, \quad \forall t, \tag{3.20}$$

или хотя бы

$$\frac{\partial x}{\partial t} \to \min, \quad \forall t, \tag{3.21}$$

если условие (3.20) выполнить невозможно.

С учетом (3.20) этот критерий можно записать в следующем виде:

$$I_1(c) = (1 - kc)\sum_{i=1}^{N}(f_i^*(K_i, c) - f(x)) \to \min.$$

Региональный центр заинтересован также в промышленном развитии региона. Этот критерий можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} K_i \to \max$$

или

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{dK_i}{dt} \to \max.$$

Учитывая (3.2), можно записать

$$\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \mu_i K_i) \to \max. \tag{3.22}$$

Будем считать, что вся выручка предприятия $F_i(K_i)$ расходуется на инвестирование развития предприятия Y_i, очистку загрязняющих выбросов и на штрафы:

$$F_i(K_i) = Y_i + V_i + w_i.$$

Величина V_i определяется решением оптимизационной задачи (3.7), (3.8)

$$V_i = \Psi_i(c, K_i),$$

поэтому

$$F_i(K_i) = Y_i + \Psi_i(c, K_i) + w_i.$$

Найдя отсюда величину

$$Y_i = F_i(K_i) - \Psi_i(c, K_i) - w_i - \mu_i K_i$$

и подставив в (3.22), получим

$$\sum_{i=1}^{N} [F_i(K_i) - \Psi_i(c, K_i) - w_i - \mu_i K_i] \to \max.$$

Величина штрафа w_i с учетом (3.4) и (3.18) равна

$$w_i = c f_i^*(K_i, c).$$

Окончательно критерий промышленного развития можно записать следующим образом:

$$I_2(c) = \sum_{i=1}^{N} [F_i(K_i) - \Psi_i(c, K_i) - c f_i^*(K_i, c) - \mu_i K_i] \to \max.$$

Таким образом, региональный центр, для выбора величины c, решает двухкритериальную задачу

$$I_1(c) \to \min, \quad I_2(c) \to \max.$$

Для рассмотренного выше частного случая эта задача приобретает следующий вид:

$$I_1(c) = \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - k\sqrt{c}\right) \sum_{i=1}^{N} \sqrt{l_i s_i K_i} - f(x) \to \min, \tag{3.23}$$

$$I_2(c) = \sum_{i=1}^{N} [\bar{s}_i K_i - 2\sqrt{c l_i s_i} K_i - a_i] \to \max, \tag{3.24}$$

где $\bar{s}_i = s_i - k_i$.

Зависимости $I_1(c)$ и $I_2(c)$приведены на рис. 3.15. Обозначим через корень уравнения $I_1(c) = 0$ и через c'' корень уравнения $I_2(c) = 0$. Если $c' < c''$, то для любого c из интервала (c', c'') будут выполнены условия

$$\frac{\partial x}{\partial t} < 0, \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} K_i > 0. \tag{3.25}$$

Это означает, что можно назначать такие штрафы за загрязнение окружающей среды, которые будут обеспечивать, с одной стороны, снижение уровня загрязнения, а с другой, не будут препятствовать росту производственных фондов. Для решения вопроса о выборе величины c необходимо построить множество Парето. *Множество Парето* – это множество компромиссных решений в двухкритериальной задаче, для которых увеличение оптимальной величины по одному критериев возможно лишь за счет уменьшения оптимальной величины по другому критерию Для этого надо найти из равенства (3.24) $\sqrt{c}$ как функцию $I_2(c)$ и подставить в (3.23). В результате найдем зависимость $I_1 = \varphi(I_2)$.

Для рассматриваемого случая множество Парето приведено на рис. 3.16.

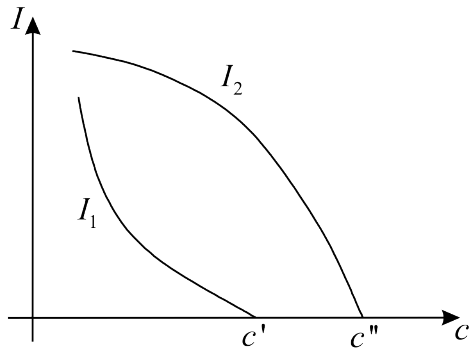

Рис. 3.3. Целевые функции.

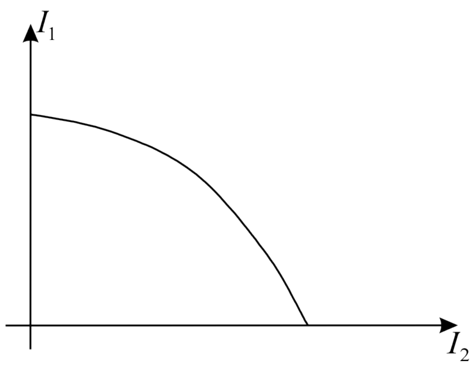

Рис. 3.4. Множество Парето.

Если $c' > c''$, то области значений c, где одновременно выполняются оба неравенства (3.25), не существует. В этом случае необходимо либо смириться с ростом загрязнения, если мы хотим, чтобы росли производственные фонды, либо пойти на сокращение производства с тем, чтобы увеличить затраты на очистные сооружения.

Если эффект естественной самоочистки невелик (например, при малом уровне загрязнения), то величина c' мало зависит от объема производственных фондов. В то же время величина c'' растет вместе с ростом фондов. Таким образом, если вначале $c' > c''$, то одним из рациональных вариантов стратегии регионального центра будет следующий. Пока промышленный потенциал низок, не назначать штрафов. Когда объем производственных фондов достигнет некоторой критической величины, которая определяется из условия $c' = c''$, надо начинать вводить штраф за загрязнение окружающей среды, причем по мере роста производственных фондов величина штрафа должна увеличиваться.

3.2. Распространение загрязнений в водной среде.

3.2.1. Штрафы и налоги за выбросы в водную среду.

Рассмотрим регион, в котором на одном водотоке расположены n предприятий (рис. 3.17). Руководит данным регионом центр, назначающий налоги за пользование водными ресурсами и штрафы за сверхнормативное содержание загрязнителя в стоках. Все предприятия перечисляют налоги центру в зависимости от доли очищенных ими стоков, исходя из единой ставки налога, установленной для всего региона. Если же в стоках какого-либо предприятия содержание загрязнителя будет превышать санитарную норму, принятую для всего региона, то с такого нарушителя будет взиматься штраф, размеры которого будут зависеть от степени превышения нормы, доли очищенных стоков и т.д. Помимо того, что центр осуществляет контроль за выбросами всех предприятий, он должен поддерживать экологическую чистоту региона, поэтому часть собранных налогов и штрафов тратится на централизованную очистку стоков каждого предприятия, т.е. полученные суммы расходуются для поддержания параметров окружающей среды в пределах, благоприятных для существования человека, и возмещения экологического ущерба.

Модель позволяет решать сразу две задачи:

- экономическую: определить оптимальные размеры налогов и штрафов за использование ресурсов;
- экологическую: добиться соблюдения санитарных норм с помощью определения оптимального объема очистки воды, используемой в промышленном производстве.

Рис. 3.5. Схема региона.

Рассмотрим задачу назначения центром A_0 налогов и штрафов за использование природного ресурса (воды) в регионе, где есть *n* потребителей ресурса B_i. Пусть x_i – доля очищенных стоков для *i*-того потребителя; y_i – величина налога за выбросы для *i*-того потребителя; $q_i(t)$ – концентрация загрязнителя в выбросах *i*-того потребителя в момент времени *t*; $q_i^0 = q_i(0)$ – концентрация загрязнителя в точке выброса; λ_i – величина штрафа за сверхнормативное содержание в единице объема загрязнителя для *i*-того потребителя; $H_i(x_i, y_i)$ – функция налогов; $h_i(\lambda_i, x_i)$ – функция штрафов для *i*-того потребителя; функции $Q_i(x_i, y_i, \lambda_i)$ и $C_i(q_i, x_i)$ описывают затраты центра A_0 на централизованную очистку стоков B_i и затраты *i*-того потребителя на строительство очистных сооружений; $D_i = A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}$ – функция доходов *i*-того предприятия; R_i – величина основных фондов предприятия; L_i – количество работающих, A_i, α_i – постоянные величины, $0<\alpha_i<1$.

В математической постановке задача формулируется как иерархическая неантагонистическая игра $(n+1)$-го лица в нормальной форме

$$\Gamma = \left\langle I+1, U_0, \{V_i\}_{i\in I}, K_0, \{K_i\}_{i\in I} \right\rangle, \qquad (3.26)$$

где $I=1,2,...,n$, U_0 – множество стратегий игрока A_0, V_i – множество стратегий игрока B_i, K_0 – функция выигрыша игрока A_0, K_i – функция выигрыша игрока B_i:

$$\begin{cases} K_0(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\left[g_i A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} + H_i(x_i,y_i) - Q_i(x_i,y_i)\right], \\ K_i(x_i,y_i) = (1-g_i)A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} - C_i(q_i,x_i) - H_i(x_i,y_i), \end{cases} \qquad (3.27)$$

если $\sum_{i=1}^{n} q_i(t_j)(1-x_i) \le \beta$;

$$\begin{cases} K_0(X,Y,\Lambda) = \sum_{i=1}^{n}\left[g_i A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} + H_i(x_i,y_i) + h_i(\lambda_i,x_i) - Q_i(x_i,y_i)\right], \\ K_i(x_i,y_i,\lambda_i) = (1-g_i)A_i R_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} - C_i(q_i,x_i) - H_i(x_i,y_i) - h_i(x_i,\lambda_i), \end{cases} \qquad (3.28)$$

если $\sum_{i=1}^{n} q_i(t_j)(1-x_i) > \beta$.

Здесь β – действительное число, $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n), Y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $0\le x_i\le 1$, $0\le\lambda_i\le\lambda_i^0$, $0\le y_i\le y_i^0$, $0<g_i<1$; $y_i=0$ при $x_i=1$, $y_i=y_i^0$ при $x_i=0$. Функции $C_i(q_i,x_i)$, $Q(x_i,y_i,\lambda_i)$ – монотонно возрастающие и выпуклые вниз, $C(0,0)=0$; $q_i(t_j)$ – концентрация загрязнителя в стоках i-того предприятия в момент времени t_j.

Вектор $T=(Y,\Lambda)$ описывает стратегии игрока A_0. Каждый из игроков B_i, зная выбор A_0, выбирает управления x_i. Целью игроков является максимизация своего выигрыша.

В качестве принципа оптимальности можно выбрать равновесие по Нэшу, заключающееся в том, что ни один из игроков не может получить выгоду при одностороннем изменении своей стратегии.

Набор стратегий (s^*,h_i^*) называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в иерархической игре, если для любых стратегий s и h_i из соответствующих множеств стратегий имеют место неравенства

$$K_0(s^*,h_1^*,h_2^*,...,h_n^*) \ge K_0(s,h_1^*,h_2^*,...,h_n^*),$$

$$K_i(s^*,h_1^*,h_2^*,...,h_i^*,...,h_n^*) \ge K_i(s^*,h_1^*,h_2^*,...,h_i,...,h_n^*),\ i\in I.$$

Рассмотрим более простую задачу, когда центр получает доход только от штрафов за сверхнормативное загрязнение, а потребители тратят деньги не только на штрафы, но и на очистные сооружения. Функции выигрыша центра и потребителей имеют вид в случае $\sum_{i=1}^{n} q_i(t_j)(1-x_i) > \beta$:

$$\begin{cases} K_0(X,\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i (1-x_i), \\ K_i(x_i,\lambda_i) = -C_i x_i^2 - \lambda_i q_i (1-x_i), \end{cases} \tag{3.29}$$

где x_i – доля очищенных стоков для *i*-того потребителя, $1-x_i$ – доля неочищенных стоков; $q_i(t)$ – концентрация загрязнителя в выбросах *i*-того потребителя; λ_i – величина штрафа за сверхнормативное содержание в единице объема загрязнителя для *i*-того потребителя.

Пусть центр назначил для *i*-того потребителя ставку штрафа λ_i. Тогда оптимальное значение доли очищенных стоков x_i для потребителя ищется из уравнения

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_i} = -2C_i x_i + \lambda_i q_i = 0.$$

Отсюда

$$x_i^* = \frac{\lambda_i q_i}{2C_i}.$$

На втором шаге подставим полученное значение x_i^* в функцию выигрыша центра:

$$K_0(X,\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i \left(1 - \frac{\lambda_i q_i}{2C_i}\right).$$

Найдем оптимальное значение ставки налогов λ_i из уравнения

$$\frac{\partial K_0}{\partial \lambda_i} = q_i - \frac{\lambda_i q_i^2}{C_i} = 0.$$

Тогда

$$\lambda_i^* = \frac{C_i}{q_i}.$$

Функция выигрыша *i*-того потребителя приобретает вид:

$$K_i(x_i,\lambda_i) = -C_i x_i^2 - C_i(1-x_i).$$

На этом шаге оптимальное значение доли очищенных стоков x_i для потребителя ищется из уравнения

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_i} = -2C_i x_i + C_i = 0.$$

Имеем

$$x_i^* = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, к третьему шагу игры оптимальная доля очищенных стоков становится постоянной, какую бы ставку штрафа не назначал центр. Вид функции выигрыша центра

$$K_0(X, \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i q_i}{2}$$

показывает, что центр в этом случае должен назначить максимально возможную ставку λ_i из возможного диапазона значений.

3.2.2. Прогнозирование распространения загрязняющих веществ в водном потоке.

Рассмотрим небольшой водный поток, в котором произошло полное перемешивание загрязнителя и воды. В этом случае для прогнозирования применяются камерные модели, основанные на балансе перетоков однородных потоков из камеры в камеру. Подобные модели применяются для долгосрочных прогнозов.

Водоток разбивается на камеры таким образом, чтобы в каждой точке камеры скорость течения была одной и той же. Каждая камера делится на два слоя – поверхностный и придонный. Загрязнитель в общем случае – неконсервативное вещество. Считается, что загрязнение, поступающее в какую-либо камеру, равномерно распределяется в ней. Источники загрязнений также считаются камерами, загрязнитель из которых поступает в поверхностный слой смежной камеры.

Введем следующие обозначения: $X_i(t)$ – концентрация загрязнителя в поверхностном слое i-той камеры в момент времени t; $X_i^d(t)$ – концентрация загрязнителя в придонном слое i-той камеры в момент времени t; $\left\| a_{(i,s)(j,k)} \right\|$ – матрица коэффициентов перетоков для камер обоих слоев. Каждый коэффициент $a_{(i,s)(j,k)}$ характеризует долю концентрации загрязнителя, попадающую из s-того слоя i-той камеры в k-тый слой j-той камеры. Коэффициенты $\hat{a}_{(i,s)(i,s)}$ описывают общий отток из s-того слоя i-той камеры и вычисляются по формуле

$$\hat{a}_{(i,s)(i,s)} = \sum_{k=0}^{1} \sum_{j=1}^{N} a_{(i,s)(j,k)}.$$

Полагаем при этом и далее $a_{(i,s)(i,s)} = 0$, $i = 1,2,...,N$, N - количество камер. Для поверхностного слоя s и k равны нулю, а для придонного – единице. Если $a_{(i,s)(j,k)} = 0$, то камеры не сообщаются между собой.

Концентрации загрязнителя в поверхностном и придонном слоях i-той камеры в момент времени $t+1$ можно записать в виде:

$$X_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} a_{(j,0)(i,0)} X_j(t) + \sum_{j=1}^{N} a_{(j,1)(i,0)} X_i^d(t) - \hat{a}_{(i,0)(i,0)} X_i(t),$$

$$X_i^d(t+1) = \sum_{j=1}^{N} a_{(j,0)(i,1)} X_j^d(t) + \sum_{j=1}^{N} a_{(j,1)(i,1)} X_i^d(t) - \hat{a}_{(i,1)(i,1)} X_{id}(t).$$

Коэффициенты моделей определяются с помощью гидрологических данных. Если r-тая камера – источник загрязнения, то

$$a_{(j,s)(r,k)} = a_{(r,1)(j,0)} = a_{(r,1)(j,1)} = a_{(r,0)(j,1)} = 0,\ a_{(r,0)(j,0)} = \frac{\Theta_r}{\Theta_j},$$

где Θ_r – объем r-того стока, Θ_j – объем поверхностного слоя j-той камеры. Остальные коэффициенты выражаются для i-той камеры через объем придонного слоя Θ_i^d, скорости течения реки в поверхностном и придонном слоях V_i и V_i^d, площади поперечных сечений поверхностного и придонного слоев ω_i и ω_i^d, площадь дна s_i^d, скорость поступления загрязнителя из придонного слоя в поверхностный $\hat{V}_i^d$, скорость оседания примеси из поверхностного слоя в придонный $\breve{V}_i$.

Если k_n и k_n^d – коэффициенты неконсервативности вещества, содержащегося в воде и в придонном слое, то

$$a_{(i,0)(j,0)} = \left(-1 + \frac{\omega_i V_i}{\Theta_i}\right)\exp k_n,\ a_{(i,1)(j,1)} = \left(-1 + \frac{\omega_i^d V_i^d}{\Theta_i^d}\right)\exp k_n^d;$$

$$a_{(i,0)(i,1)} = \frac{s_i^d \breve{V}_i^d}{\Theta_i^d}\exp k_n^d,\ a_{(i,1)(i,0)} = \frac{s_i^d \hat{V}_i^d}{\Theta_i}\exp k_n,\ \text{для}\ j \neq i,\ a_{(j,0)(i,1)} = a_{(j,1)(i,0)} = 0;$$

$$a_{(j,0)(i,0)} = \frac{\omega_j V_j}{\Theta_i}\exp k_n,\ a_{(j,1)(i,1)} = \frac{\omega_j^d V_j^d}{\Theta_i^d}\exp k_i^d.$$

3.3. Построение модели добычи золота с помощью промывочной установки.

3.3.1. Описание работы промустановки.

При добыче рассыпного золота используются промывочные установки, расположенные на водотоках и работающие сезонно. Промывочная установка включает в себя отвал, куда транспортируются пески с галечным продуктом и где производится промывка песков, а также дражной котлован, в который забирается вода из источника и отстойника (схема промывочной установки приведена на следующей странице). Котлован представляет собой резервуар с водой, которая отправляется на подпитку отвала, соответственно после циркуляции в отвале, в котором идет непосредственное извлечение ценного компонента из песков, вода попадает обратно в котлован. Естественно в определенный момент времени наступает некоторое критическое значение мутности воды, и тогда на этом этапе загрязненная вода отправляется в отстойник, где будет отстаиваться до того времени, пока ее мутность не примет значение соответствующее нормам. На этой стадии либо происходит дальнейшее использование отстоявшейся воды, либо очищенная вода сливается в реку или ее приток.

Следует также отметить, что суровый климат предопределяет сезонность производства. Если период промывки металлосодержащих песков в восточной Сибири и Приморье ограничен 150-160 сутками, то в континентальных районах Магаданской области и Якутии – 140-150 сутками, а в северных районах Якутии и на Чукотке – 90-120 сутками.

3.3.2. Построение модели работы промывочной установки.

Введем обозначения: V_{0i} – объем воды в котловане; S_{1i} – объем промываемых песков; S_{2i} – объем песков, транспортируемых с галечным продуктом в отвал; ρ_{1i}, ρ_{2i} – плотность песков до и после промывки; v_{0i} – объем воды, подаваемой для подпитки котлована; v_{1i} – объем воды, подаваемой на промывку; k_0, k – концентрации взвеси в свежей и технологической воде; W_i, V_{1i} – количество воды, забираемые соответственно из реки и из отстойника; H – глубина отстойника; V_i – объем отстойника; v – средняя вертикальная скорость частиц в воде.

Обозначим через $F(k)$ потери металла в зависимости от мутности $k = k(t)$ в дражном котловане, выраженные в процентах. Тогда количество извлеченного при данной мутности металла составит величину $m(1 - F(k)/100)$, где m – содержание ценного компонента в песках. Если c – цена металла, то доход предприятия на промежутке времени $\lfloor 0, T \rfloor$

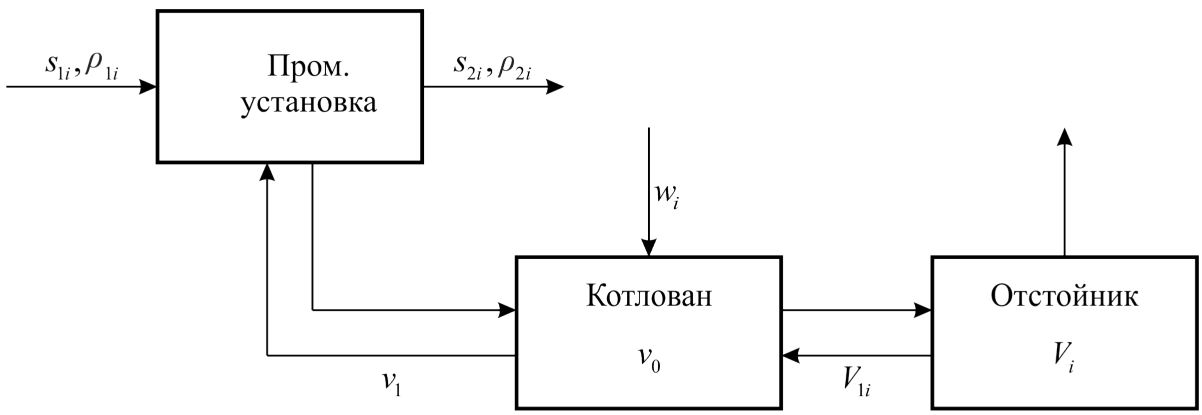

Рис. 3.6. Схема промустановки.

$$\int_0^T \left(1 - F(k(t))/100\right) mcdt \tag{3.30}$$

Определим вид функции $k(t)$ в зависимости от времени промывки. На промежутке времени $\lfloor t, t + \Delta t \rfloor$ будем иметь $k(t)V_{0i}$ и $k(t+\Delta t)V_{0i}$ – содержание глинистых частиц в разрезе соответственно в моменты t и $t + \Delta t$; $v_{0i}k_{0i}\Delta t$ – содержание взвеси, которое поступит с водой для подпитки разреза; $v_{1i}k(t)\Delta t$ – содержание глинистых частиц в воде, подаваемой на промывку; $\lfloor v_{1i}k_1(t) + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i} \rfloor \Delta t$ – содержание твердых частиц, которые поступят в разрез после промывки песков. Если предположить, что количество осевшей за малое Δt взвеси в разрезе составляет $1 - \exp(-\eta\Delta t)$ от всей массы (при малых Δt количество осевших минеральных частиц пропорционально Δt с коэффициентом η), то можно выписать разностное уравнение

$$k(t+\Delta t)V_{0i} = k(t)V_{0i} + v_{0i}k_{0i}\Delta t + \lfloor v_{1i}k_1(t) + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i} \rfloor \Delta t - \\ - k(t)V_{0i}\lfloor 1 - \exp(-\eta\Delta t) \rfloor.$$

Перенося $k(t)V_{0i}$ в левую часть и деля обе части уравнения на $V_{0i}\Delta t$ и затем, устремляя Δt к нулю, получим линейное дифференциальное уравнение

$$k'(t) = \frac{v_{0i}k_{0i} + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i}}{V_{0i}} - \eta k(t). \tag{3.31}$$

Если в начальный момент времени $k(0) = k_1$, то решение уравнения (3.31) имеет вид

$$k(t) = a + (k_1 - a)\exp(-\eta t), \tag{3.32}$$

где $a = (v_{0i}k_{0i} + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i})/\eta V_{0i}$.

Функция $k(t)$ – возрастающая. С ростом $k(t)$ потери металла будут расти, поэтому в какой-то момент времени, когда концентрация взвеси в разрезе станет равной некоторому критическому значению k_2, воду в разрезе следует освежить путем подпитки воды из реки и отстойника, направив стоки из разреза в отстойник. При смене воды в разрезе драга не прекращает работы.

Найдем время t_1, за которое $k(t)$ станет равной k_2 (k_2 должна быть меньше a, иначе нужная концентрация не будет достигнута). Оно находится из уравнения

$$a + (k_1 - a)\exp(-\eta t) = k_2$$

откуда получаем

$$t_1 = \frac{1}{\eta}\ln\left(\frac{a - k_1}{a - k_2}\right). \tag{3.33}$$

Предполагаем, что в разрезе оседания частиц не происходит, т.е. $\eta = 0$. Тогда уравнение (3.3.1) будет иметь вид

$$k'(t) = \frac{v_{0i}k_{0i} + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i}}{V_{0i}}. \tag{3.34}$$

Решение этого уравнения для $k(t)$, при условии, что в начальный момент времени $k(0) = k_1$, принимает вид

$$k(t) = at + k_1, \tag{3.35}$$

где $a = (v_{0i}k_{0i} + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i})/V_{0i}$.

3.3.3. Смена воды в разрезе до нужной концентрации.

Определим вид функции $k(t)$ при смене воды в разрезе от верхнего уровня концентрации взвеси k_2 до нижнего k_1, и найдем время t_2 этой процедуры. Рассуждая по аналогии с предыдущим, с той лишь разницей, что в котлован за время Δt поступит из реки и отстойника соответственно $W_i k_0 \Delta t$ и $V_{1i}k_3\Delta t$ твердых частиц, где концентрация взвеси в отстойнике

$$k_3(t) = k(t)\exp\left(-\frac{V_i}{H_i}\cdot\frac{v_i}{W_i}\right), \tag{3.36}$$

и уйдет в отстойник $W_i k(t)\Delta t$, получим следующее уравнение:

$$k'(t) = \frac{W_i k_{0i} + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i}}{V_{0i}} - k(t)\left[\eta + \frac{W_i + V_{1i}}{V_{0i}} - \frac{V_{1i}}{V_{0i}}\exp\left(-\frac{V_i}{H_i}\cdot\frac{v_i}{W_i}\right)\right]. \tag{3.37}$$

Решая (3.37) с учетом $k(0) = k_2$, найдем

$$k(t) = \frac{G}{Z} + \left(k_2 - \frac{G}{Z}\right)\exp(-Zt), \tag{3.38}$$

где $G = (W_i k_{0i} + S_{1i}\rho_{1i} - S_{2i}\rho_{2i})/V_{0i}$, $Z = \eta + \frac{W_i + V_{1i}}{V_{0i}} - \frac{V_{1i}}{V_{0i}}\exp\left(-\frac{V_i}{H_i}\cdot\frac{v_i}{W_i}\right)$.

Приравнивая $k(t_2) = k_1$ (при этом k_1 должно быть больше G), определим время t_2 смены воды в разрезе:

$$t_2 = \frac{1}{Z}\ln\left(\frac{k_2 - \frac{G}{Z}}{k_1 - \frac{G}{Z}}\right). \tag{3.39}$$

При отсутствии оседания частиц в выражении Z нет слагаемого η.

Смена воды начинается при достижении концентрации взвеси в воде разреза значения k_2, причем очистка производится до тех пор, пока концентрация не упадет до значения k_1. При этом из реки вода берется в количестве W_i, а из отстойника – V_{1i}.

Весь промывочный сезон T разбивается на $T/(t_1+t_2)$ временных интервалов, на каждом из которых доход предприятия составляет постоянную величину. Выпишем доход на одном из таких интервалов.

На промежутке $[0,t_1]$, когда происходит промывка в разрезе, концентрация взвеси в котором растет от k_1 до k_2, доход составляет величину

$$P_1 = P_1(c) = \int_0^{t_1} \bigl(1 - F(k(t))/100\bigr) mcdt, \tag{3.40}$$

где m - суточная производительность драги; $k(t)$ имеет вид (3.32), а t_1 – вид (3.33). В (3.38) выражается доход предприятия от добытого металла (с учетом потерь от увеличения мутности воды) на временном интервале $[0,t_1]$.

На интервале $[t_1, t_1+t_2]$, когда происходит смена воды в разрезе, доход составляет величину

$$P_2 = P_2(c) = \int_{t_1}^{t_2} \bigl(1 - F(k(t))/100\bigr) mcdt. \tag{3.41}$$

где $k(t)$ меняется в соответствии с законом (3.36), а t_2 имеет вид (3.37). Теперь мы можем выписать доход предприятия за весь промывочный сезон:

$$D_i = (P_1 + P_2)\frac{T}{t_1 + t_2} \tag{3.42}$$

Итак, получена функция доходов *i*-того предприятия (производственная функция) D_i.

3.3.4. Метод наименьших квадратов.

Кратко опишем суть метода наименьших квадратов. При экспериментальном изучении зависимости переменной y от переменной x проводят измерения величины y при различных значениях величины x. Результаты измерений образуют *временной ряд:*

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Необходимо найти аналитическую функцию $f(x, a_1, a_2, ..., a_m)$ так, чтобы

$$f(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) \approx y_i,$$

и приближение было наиболее точным, что достигается подбором параметров $a_1, a_2, ..., a_m$.

Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами $a_1, a_2, ..., a_m$, считаются те, для которых сумма квадратов уклонений от наблюденных значений y_i, $i = 1,2,...,n$,

$$N(x, a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a_1, a_2, ..., a_m) - y_i]^2,$$

будет минимальной. Отсюда, используя необходимые условия экстремума функции нескольких переменных, получаем так называемую нормальную систему для определения коэффициентов a_i, $i = 1,2,...,m$:

$$\frac{\partial N}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial N}{\partial a_m} = 0.$$

Если $f(x, a_1, a_2, ..., a_m)$ есть линейная функция $y = a_1 x + a_2$, то

$$\frac{\partial N}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i + a_2 - y_i]^2\right\} = 2\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i + a_2 - y_i]\cdot x_i = 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i + a_2 - y_i]^2\right\} = 2\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i + a_2 - y_i]\cdot 1 = 0.$$

Отсюда получаем алгебраическую линейную систему для нахождения коэффициентов a_1, a_2:

$$\begin{cases} a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \tag{3.43}$$

Для квадратичной функции $f(x, a_1, a_2, ..., a_m) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

$$\frac{\partial N}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 - y_i]^2\right\} = 2\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 - y_i]\cdot x_i^2 = 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 - y_i]^2\right\} = 2\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 - y_i]\cdot x_i = 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial a_3} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left\{\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 - y_i]^2\right\} = 2\sum_{i=1}^{n}[a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 - y_i]\cdot 1 = 0.$$

Таким образом, коэффициенты квадратичной функции определяем из системы алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_3 n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_3 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases} \tag{3.44}$$

3.3.5. Приближение экспериментальных данных.

Очистка использованной при промывке золота воды производится прудах-отстойниках, экранируемых намороженной земляной плотиной. Для предотвращения фильтрации ее замораживают в зимнее время путем принудительной циркуляции хладоносителя через систему замораживающих колонок. По оценкам стоимости подобных работ нами, с помощью метода наименьших квадратов, была получена зависимость $C(V_i)$ стоимости постройки очистного сооружения от его объема V_i.

По имеющимся экспериментальным данным строились аппроксимации зависимости с помощью линейной, гиперболической, полиномов второго и третьего порядков и экспоненциальной функций. Из всех вышеперечисленных полученных функций наименьшая сумма квадратов уклонений оказалась у полинома третьего порядка:

$$C(V_i) = 0{,}129V_i^3 - 0{,}466V_i^2 + 0{,}761V_i + 0{,}691, \quad N = 0{,}03099. \tag{3.45}$$

На рис. 3.7 представлен график наиболее точной аппроксимирующей функции для экспериментальных данных. Знаком «+» обозначены реальные данные. Вычисления производились в пакете Mathcad. Аппроксимация полиномом второго порядка дал результат

$$C(V_i) = 0{,}523V_i^2 - 1{,}14V_i + 1{,}248, \quad N = 0{,}9773,$$

а экспоненциальной функцией –

$$C(V_i) = 0{,}63\exp(0{,}494V_i), \quad N = 2{,}7409.$$

Таким образом, зависимость стоимости очистных сооружений от их объема описывается следующей функцией:

$$C_i(V_i) = \begin{cases} 0, \quad V_i = 0, \\ 0{,}129V_i^3 - 0{,}466V_i^2 + 0{,}761V_i + 0{,}691, \quad V_i > 0. \end{cases} \tag{3.46}$$

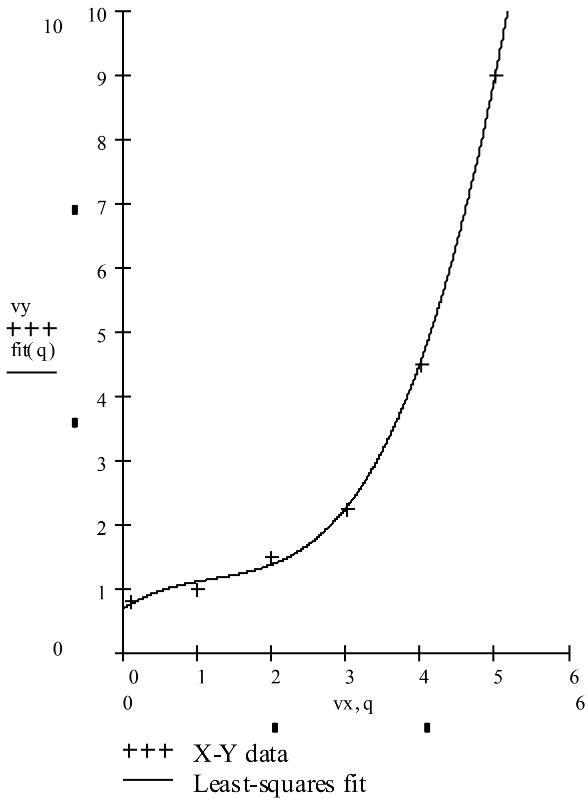

Рис.3.7. Аппроксимация стоимости постройки полиномом третьего порядка.

3.3.6. Оптимизация объема отстойника.

Начнем данный пункт с того, что построим функции выигрыша в игре (3.26), задав функции и параметры, входящие в их выражения. Налоги за использование природного ресурса введем через максимальную ставку y, единую для всего региона, и $y_i = (1 - x_i)y$, т.е. размер максимальной ставки изменяется для i-того игрока пропорционально доле очистки, где $x_i = V_i / W_i$.

Функцию, описывающую затраты центра на централизованную очистку стоков i-того предприятия, определим в виде:

$$Q_i(x_i, y_i, \lambda_i) = p_i(W_i - V_i)y_i + r_i q_i(W_i - V_i)\lambda_i,\ 0 < p_i < 1,\ 0 < r_i < 1.$$

Построенная функция равна сумме частей собранных налогов и штрафов. Также стоит напомнить о функции $C(V_i)$, рассмотренной в п. 3.3.5.

Теперь, при сделанных предположениях и подстановке полученной производственной функции D_i, функции выигрыша центра и игроков первого уровня для случая превышения игроками санитарной нормы β запишутся в виде

$$K_0(V, Y, \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ g_i(P_1 + P_2)\frac{T}{t_1 + t_2} + y_i(W - V_i) + q_i(W_i - V_i) \right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left\{ p_i y_i (W_i - V_i) + r_i q_i \lambda_i (W_i - V_i) \right\},$$

$$K_i(v_i, y_i, \lambda_i) = (P_1 + P_2)\frac{T}{t_1 + t_2} - 0{,}129V_i^3 + 0{,}466V_i^2 - 0{,}761V_i - 0{,}691 -$$
$$- y_i(W_i - V_i) - q_i\lambda_i(W_i - V_i).$$

Поскольку K_0 – линейная функция относительно y_i и λ_i, поэтому ее наибольшее значение достигается при максимально возможных значениях $\widetilde{y}$ и $\widetilde{\lambda}_i$.

На следующем шаге нахождения оптимального решения подставим полученные значения $\widetilde{y}$, $\widetilde{\lambda}_i$ в функции выигрыша игроков B_i. Имеем

$$K_i(v_i, y_i, \lambda_i) = (P_1 + P_2)\frac{T}{t_1 + t_2} - 0{,}129V_i^3 + 0{,}466V_i^2 - 0{,}761V_i - 0{,}691 -$$
$$- \widetilde{y}_i(W_i - V_i) - q_i\widetilde{\lambda}_i(W_i - V_i).$$

Из уравнения $\frac{dK_i}{dV_i} = 0$ оптимальная величина V_i может быть найдена численно.

3.3.7. Частный случай работы промывочной установки.

В случае отсутствия вторичного использования воды из отстойника (т.е. $V_{1i} = 0$) производственная функция не зависит от V_i, и условие $\frac{dK_i}{dV_i} = 0$ будет выглядеть следующим образом

$$\frac{dK_i}{dV_i} = \widetilde{y} + q_i\lambda_i - 0{,}387V_i^2 + 0{,}932V_i - 0{,}761 = 0.$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях V_i и, умножая обе части уравнения на (-1), получим квадратное уравнение

$$0{,}387V_i^2 - 0{,}932V_i + 0{,}761 - \widetilde{y} - q_i\lambda_i = 0. \qquad (3.47)$$

Следовательно, оптимальное значение объема отстойника V_i в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$V_i = \frac{0{,}466 \pm \sqrt{0{,}466^2 + 0{,}387(\widetilde{y} + q_i\lambda_i - 0{,}761)}}{0{,}387}$$

Окончательно, аналитическая формула для вычисления оптимального объема отстойника в случае отсутствия вторичного использования воды примет следующий вид:

$$V_i = \begin{cases} \dfrac{0,466 + \sqrt{0,466^2 + 0,387(\tilde{y} + q_i\tilde{\lambda}_i - 0,761)}}{0,387}, & \tilde{y} + q_i\tilde{\lambda}_i > 0,761, \\ \dfrac{0,466 - \sqrt{0,466^2 + 0,387(\tilde{y} + q_i\tilde{\lambda}_i - 0,761)}}{0,387} & 0,2 \le \tilde{y} + q_i\tilde{\lambda}_i \le 0,761. \end{cases} \qquad (3.48)$$

3.3.8. Численный расчет оптимального объема отстойника

Рассмотрим работу промустановки ПКС-1-700 в течение сезона, равного 100 суткам, что соответствует условиям северных районов Якутии. Золотосодержащие пески содержат мелкие, не оседающие при промывке, взвеси.

Производительность ПКС-1-700 составляет 30 м^3/ч, тогда за сезон, равный 100 суткам, объем песков, поступивших на промывку, составит 72000 м^3, а объем песков после промывки – 65000 м^3, таким образом оседание составляет 10 %. Исходя из того, что расход воды в промустановке ПКС-1-700 равен 100 л/с, а забранной из источника в котлован воды должно хватать на 10 суток работы, объем котлована равен 90000 м^3. Потери воды в течение всего сезона составляют 9 % (испарение, впитываемость и т.д.), поэтому общий объем забранной из реки воды составляет 1000000 м^3. Плотности песков до и после промывки берутся равными соответственно 2,6 т/м^3 и 2,3 т/м^3. Концентрации взвеси в свежей, технологической воде и критическая концентрация составляют 1,5 г/м^3, 6 г/м^3 и 15 г/м^3, соответственно. Цена золота за один грамм равна 10 у.е.., а содержание золота в песках 1г/м^3.

Вычисления производились в случае, когда коэффициент оседания частиц в котловане равен нулю. Вычислялось время t_1 (4 суток), за которое концентрация загрязнителя станет критической, и время t_2 (1 сутки), за которое происходит смена воды в котловане. Выписывались с численными коэффициентами функция концентрации взвеси в котловане за этот период

$$k_1(t) = 2,08t + 6,$$

и функция концентрации взвеси при смене воды в разрезе от верхнего уровня до нижнего

$$k_2(t) = 7,08/(11,1 + 2 \cdot 10^{-12} V_i).$$

Вышеуказанные числовые данные были подставлены в интегралы, определяющие доход предприятия на упомянутых этапах работы

$$P_i = \int_0^{t_i} [1 - F(k_i(t))/100] mc\,dt, \quad i = 1,2,$$

где потери металла с галей и эфелями в зависимости от мутности – $F(k(t)) = 23 - 0,23k(t)$.

Из полученного выражения вычитаются затраты на постройку отстойника, налоги и штрафы, причем налоговая ставка принимает единое для всего региона значение, а величина штрафа будет превышать налоговую ставку в 10 раз.

Дифференцируя функцию выигрыша по V_i и решая получившееся уравнение численно с помощью пакета Mathcad, получаем оптимальный объем отстойника:

$$V_i = 11600 \text{ м}^3.$$

В случае отсутствия вторичного использования воды по формуле (3.48) получили

$$V_i = 12200 \text{ м}^3.$$

По результатам численных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Если налоговая ставка в сумме со ставкой штрафа будут менее 0,2 р/м^3, то выгоднее сбрасывать неочищенные стоки в водоток и подпитывать котлован напрямую из водотока.
2. При вторичном использовании воды уменьшаются затраты на постройку очистных сооружений, поскольку объем отстойника будет меньшим.
3. Прямой подсчет показывает, что при существующих ставках штрафов выгоднее строить очистные сооружения, чем напрямую сбрасывать стоки в водоток.
4. Уменьшение размеров котлована приводит к возрастанию размеров отстойника.
5. К уменьшению размеров отстойника приводит применение химических реагентов, убыстряющих осаждение мелких взвесей.

3.4. Размещение предприятий в окрестностях населенного пункта.

3.4.1. Размещение одного предприятия.

Рассмотрим задачу размещения одного предприятия, загрязняющего атмосферу своими выбросами, относительно населенного пункта, в котором расположен транспортный узел. Необходимо определить местоположение предприятия – источника выбросов с соблюдением санитарных норм при минимуме затрат на доставку продукции до перевозчика. Будем решать линейную стационарную задачу, когда на оси Ox в точке x_0 расположен постоянно действующий источник с объемом выбросов Q, а в точке $x = 0$ размещен населенный пункт. Пусть $q(x)$ – концентрация загрязняющих веществ в точке x. Тогда имеем одномерное уравнение диффузии

$$-\mu \frac{d^2 q}{dx^2} + \sigma q = Q\delta(x - x_0), \qquad (3.49)$$

где μ – коэффициент диффузии, σ – коэффициент распада загрязняющих веществ, $\delta(x-x_0)$ – дельта-функция. Задача является симметричной ввиду отсутствия ветра, пусть для определенности источник загрязнений находится правее точки $x=0$. Аналитическое решение уравнения (3.49) имеет вид

$$q(x,x_0)=\frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}}\exp\left\{-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}|x-x_0|\right\}.$$

Концентрация загрязнителей в населенном пункте (при $x=0$)

$$q(0,x_0)=\frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}}\exp\left\{-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}x_0\right\}.$$

Пусть c – санитарная норма выбросов, тогда $q(0,x_0)\le c$ и

$$\frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}}\exp\left\{-\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}x_0\right\}\le c.$$

Отсюда допустимое положение источника загрязнения определяется по формуле

$$x_0=\max\left\{0,\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\ln\frac{Q}{2c\sqrt{\mu\sigma}}\right\}.$$

Если

$$c\ge\frac{Q}{2\sqrt{\mu\sigma}},$$

то $\ln\dfrac{Q}{2c\sqrt{\mu\sigma}}\le 0$, и промышленный объект может находиться в самом населенном пункте, т.е. в точке $x=0$. В противном случае затраты на перевозки продукции будут минимальными, если

$$x_0=\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\ln\frac{Q}{2c\sqrt{\mu\sigma}}.$$

3.4.2. Размещение одного предприятия. Несимметричный случай.

В предположении, что скорость потока воздуха $u>0$, получим уравнение переноса загрязнителей

$$u\frac{dq}{dx}-\mu\frac{d^2q}{dx^2}+\sigma q=Q\delta(x-x_0). \tag{3.50}$$

При определении оптимального местоположения источника загрязнений необходимо учитывать, что он должен быть расположен с наветренной стороны относительно населенного пункта, т.е. $x_0 > 0$. Решение (3.50) в области $x \le x_0$ имеет вид:

$$q(x,x_0) = \frac{Q}{\sqrt{4\mu\sigma + u^2}} \exp\left\{ -\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu} \right) |x - x_0| \right\},$$

и концентрация загрязняющих веществ в точке $x = 0$ равна

$$q(0,x_0) = \frac{Q}{\sqrt{4\mu\sigma + u^2}} \exp\left\{ -\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu} \right) x_0 \right\}.$$

Из санитарных требований $q(0,x_0) \le c$ и

$$x_0 \ge \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{\mu^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu}} \ln \frac{Q}{c\sqrt{4\mu\sigma + u^2}}.$$

Если

$$c \ge \frac{Q}{\sqrt{4\mu\sigma + u^2}},$$

то, как и в симметричном случае, источник выбросов может располагаться в самом населенном пункте.

3.4.3. Размещение двух предприятий. Стационарный случай.

Пусть в точках x_1 и x_2 на оси Ox располагаются постоянно действующие источники загрязнения с объемами выбросов Q_1 и Q_2. Тогда уравнение переноса имеет вид:

$$u\frac{dq}{dx} - \mu\frac{d^2q}{dx^2} + \sigma q = Q_1\delta(x - x_0) + Q_2\delta(x - x_0). \qquad (3.51)$$

Допустим, что экономическая эффективность расположения предприятий определяется их удаленностью от начала координат и равна

$$G = c_1|x_1| + c_2|x_2|.$$

Требуется минимизировать эту величину при условии, что концентрация загрязнителя в точке x не превышает величины c.

Учитывая наличие ветра, источники загрязнения должны располагаться правее точки $x = 0$, т.е. $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. В силу линейности уравнения (3.51), его решение в точке $x = 0$ представляет собой сумму (см. решение уравнения (3.50))

$$q(0) = Q_1 q^*(x_1) + Q_2 q^*(x_2),$$

где

$$q^*(x) = \frac{1}{\sqrt{4\mu\sigma + u^2}} \exp\left\{ -\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu} \right) x \right\}. \qquad (3.52)$$

Экологические ограничения имеют вид

$$q(0) = Q_1 q^*(x_1) + Q_2 q^*(x_2) \le c.$$

Таким образом, необходимо найти

$$\min G = \min \{ c_1 |x_1| + c_2 |x_2| \}$$

при ограничении

$$Q_1 \exp(-\nu x_1) + Q_2 \exp(-\nu x_2) \le c_0,$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu} + \frac{u^2}{4\mu^2}} - \frac{u}{2\mu}, \;\; c_0 = c\sqrt{4\sigma\mu + u^2}. \qquad (3.53)$$

Для нахождения условного экстремума составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \lambda \left[Q_1 \exp(-\nu x_1) + Q_2 \exp(-\nu x_2) - c_0 \right],$$

и, определяя ее седловую точку из равенств

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \;\; \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \;\; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

получаем систему уравнений для нахождения оптимальных значений x_1^* и x_2^*:

$$\begin{cases} c_1 - \lambda\nu Q_1 \exp(-\nu x_1) = 0, \\ c_2 - \lambda\nu Q_2 \exp(-\nu x_2) = 0, \\ Q_1 \exp(-\nu x_1) + Q_2 \exp(-\nu x_2) = c_0. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений $Q_1 \exp(-\nu x_1) = \dfrac{c_1}{\lambda\nu}$, $Q_2 \exp(-\nu x_2) = \dfrac{c_2}{\lambda\nu}$. Подставляя полученные выражения в третье уравнение, имеем $\dfrac{c_1 + c_2}{\lambda\nu} = c_0$, откуда $\lambda\nu = \dfrac{c_1 + c_2}{c_0}$. При таком значении $\lambda\nu$ первое и второе уравнения, с помощью логарифмирования, дают нам оптимальные значения x_1 и x_2:

$$x_1^* = \frac{1}{\nu} \ln \frac{(c_1 + c_2) Q_1}{c_1 c_0}, \;\; x_2^* = \frac{1}{\nu} \ln \frac{(c_1 + c_2) Q_2}{c_2 c_0}. \qquad (3.54)$$

Рассмотрим возможность размещения предприятий в самом населенном пункте. Т.к. $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, то в этом случае логарифмы в правых частях должны быть отрицательными, а это означает, что

$$\frac{(c_1 + c_2)Q_1}{c_1 c_0} \le 1,\ \frac{(c_1 + c_2)Q_2}{c_2 c_0} \le 1.$$

Тогда $(c_1 + c_2)Q_1 \le c_1 c_0$ и $(c_1 + c_2)Q_2 \le c_2 c_0$. Складывая левые и правые части последних неравенств, окончательно получаем условие размещения предприятий в точке $x = 0$:

$$Q_1 + Q_2 \le c_0.$$

Если же $Q_1 + Q_2 > c_0$ и $\frac{(c_1 + c_2)Q_1}{c_1 c_0} \le 1$ $\left(\frac{(c_1 + c_2)Q_2}{c_2 c_0} \le 1\right)$, то оптимальными будут решения

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = \frac{1}{\nu}\ln\frac{Q_2}{c_0 Q_1} \quad \text{или} \quad x_1^* = \frac{1}{\nu}\ln\frac{Q_1}{c_0 Q_2},\ x_2^* = 0.$$

Во всех остальных случаях оптимальное решение определяется формулами (3.54).

3.4.4. Размещение двух предприятий. Теоретико-игровой подход.

Рассмотрим размещение двух источников загрязнения как неантагонистическую игру двух игроков, размещающих на числовой оси два источника загрязнения Q_1 и Q_2. При этом используется уравнение (3.50), а функции выигрышей игроков имеют вид:

$$H_i(x_1, x_2) = \begin{cases} -c_i|x_i|, & q(0) \le c, \\ -c_i|x_i| - \lambda Q_i q^*(x_i), & q(0) > c. \quad i = 1,2. \end{cases} \tag{3.55}$$

Таким образом, если загрязнение в населенном пункте не превышает санитарной нормы c, то игроки несут затраты, связанные только с транспортировкой продукции, в противном случае, с них также взимается штраф λ, пропорциональный их доле загрязнения в точке $x = 0$. Необходимо выбрать размер штрафа так, чтобы игрокам было невыгодно превышать уровень загрязнения c.

Как и ранее, полагаем $x_i \ge 0$, $i = 1,2$. Учитывая вид $q^*(x)$ (3.52), находим ситуацию равновесия в игре с выигрышами (3.55) из равенств

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i} = -c_i + \frac{\lambda \nu Q_i \exp(-\nu x_i)}{\sqrt{4\sigma\mu + u^2}} = 0,\ \ i = 1,2$$

в области $q(0) > c$. Отсюда

$$x_i = \frac{1}{\nu}\ln\frac{\lambda\nu Q_i}{c_i\sqrt{4\sigma\mu + u^2}}, \quad i = 1,2.$$

Каждая из точек x_1, x_2 доставляет максимум выигрышам игроков. При таком расположении источников загрязнение в точке $x = 0$ будет равно

$$q(0) = Q_1 q^*(x_1) + Q_2 q^*(x_2) = \frac{c_1}{\lambda\nu} + \frac{c_2}{\lambda\nu} = \frac{c_1 + c_2}{\lambda\nu}.$$

Для игроков естественно выбрать штраф λ так, чтобы $q(0) = c$, тогда

$$\lambda = \frac{c_1 + c_2}{c\nu}.$$

При таком выборе размера штрафа производители сами могут выбирать место расположения производств.

3.5. Эколого-экономическая модель добычи популяции при наличии охраняемой территории.

3.5.1. Модель охраняемой популяции.

Возрастание антропогенного воздействия на природную среду приводит к разделению на части ареалов обитания различных популяций экологическими барьерами – дорогами, линиями электропередач, трубопроводами. К экологическим барьерам можно отнести и границы охраняемых территорий, создание которых является одним из методов сохранения природной среды. На них запрещена любая хозяйственная деятельность, в том числе и промысел различных животных и птиц. При этом ареал обитания популяции может быть разбит на две части – охраняемую и неохраняемую. Впервые билокальный ареал ввел А.Д. Базыкин, рассматривая на нем модель взаимодействия хищника и жертвы.

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений, описывающих развитие популяции при наличии охраняемой территории:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = gx + d_1(y - x) - kx^2 - w(x), \\ \dfrac{dy}{dt} = ay + d_2(x - y) - cy^2. \end{cases} \tag{3.56}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ – плотности популяции вне охраняемой территории и внутри ее; $w(x)$ – функция, описывающая добычу популяции на неохраняемой территории; a и g – коэффициенты прироста популяции вне охраняемой территории и внутри ее; c, k – коэффициенты конкуренции внутри популяции на охраняемой территории и вне ее; d_1 и d_2 – коэффициенты обмена особями между охраняемой территорией и остальной частью ареала популяции. Коэффициенты *a, g* – любого знака, все остальные коэффициенты неотрицательны.

Функция добычи рассматривается в виде $w(x) = hx + b$, где слагаемое $hx(t)$ интерпретируется как величина плановой добычи популяции, а слагаемое b – как величина браконьерской добычи.

Целью исследования системы (3.56) является выявление степени влияния эндогенных и экзогенных параметров популяции (прироста, уровня конкуренции, миграции, добычи и др.) на динамику ее плотности и оценка влияния конкуренции на обе части популяции.

Для выявления особенностей эволюционных процессов, описываемых системой (3.25), используется понятие устойчивости по первому приближению, введенное А.М. Ляпуновым. Рассматриваются фазовые портреты траекторий системы в окрестностях особых точек, в которых скорость изменения плотностей популяции равна нулю. Исходя из смысла задачи, плотности частей популяции $x(t) \geq 0$ и $y(t) \geq 0$, поэтому изучаются особые точки, лежащие в первой четверти. Таких особых точек может быть до двух, причем нет особых точек типа фокус и центр, а присутствуют седло, узел – устойчивый и неустойчивый, и седло-узел (рис. 3.8-3.11). В случае двух особых точек в первой четверти – это седло и устойчивый узел (рис. 3.12). Вторая устойчивая особая точка возникает из-за эффекта конкуренции хотя в одной из частей популяции. В системе наблюдается бифуркация типа «складка», приводящая к потере устойчивости одной из особых точек системы. Под *бифуркацией* понимаются существенные изменения в фазовых портретах траекторий из-за малых изменений значения параметров системы, которые называются *бифуркационными*. При значениях параметров планового и нелимитированного промыслов, приближающихся к бифуркационным, неустойчивое седло и устойчивый узел стягиваются в одну особую точку – седло-узел, которая исчезает при значениях параметров, превышающих бифуркационные (рис. 3.13-3.18). При этом обязательно должна существовать конкуренция за ресурсы хотя бы в одной из частей популяции. Это означает, что при больших величинах промысла, независимо какого, популяция вырождается.

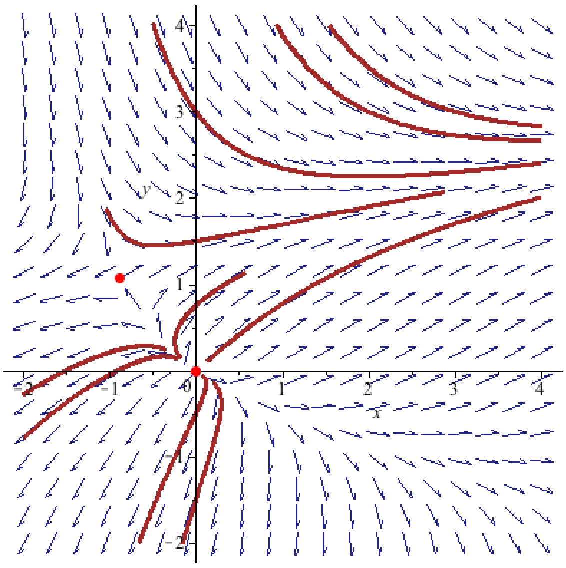

Рис. 3.8. Особая точка (0,0) – неустойчивый узел.

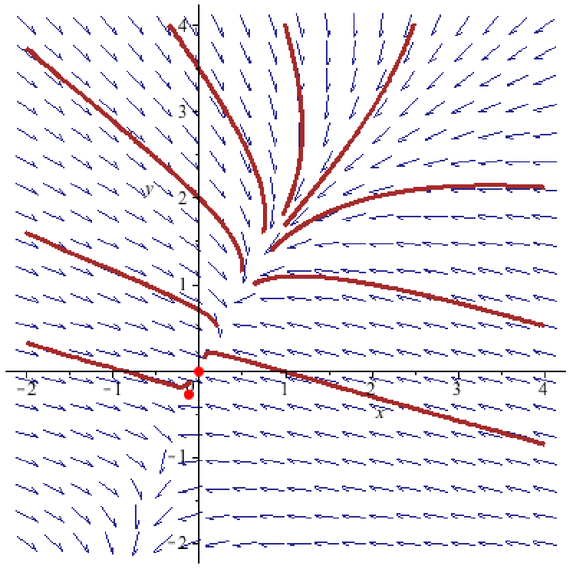

Рис.3. 9. Особая точка (0,0) – устойчивый узел.

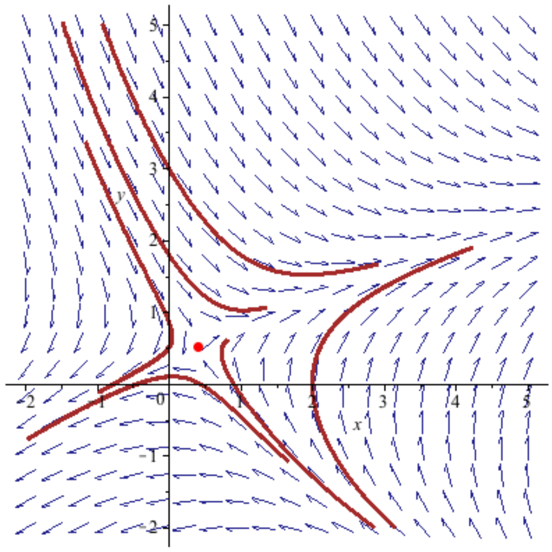

Рис. 3.10. Особая точка (0,0) – седло.

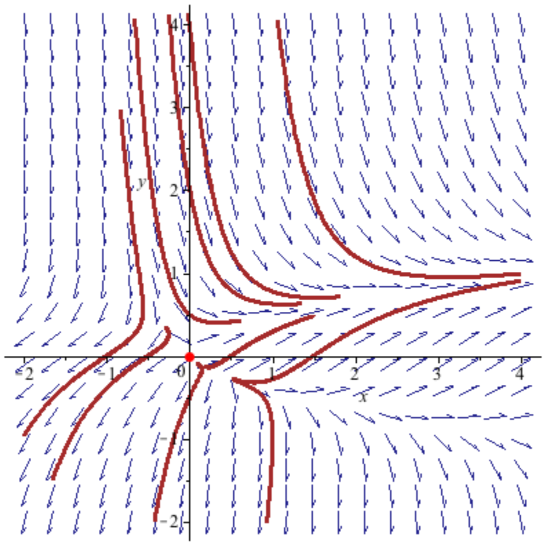

Рис. 3.11. Особая точка (0,0) – седло-узел.

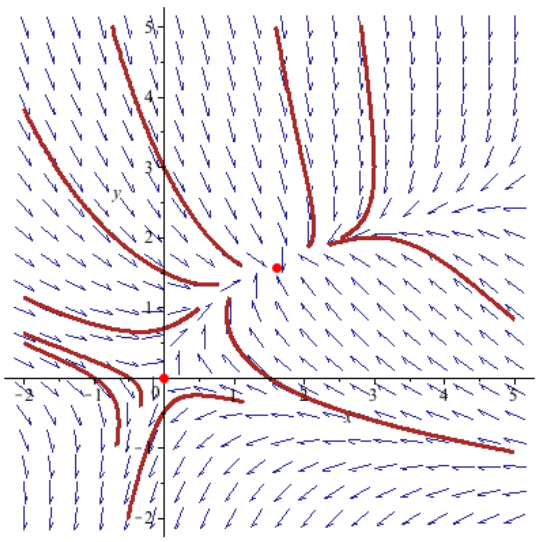

Рис. 3.12. Две особые точки: (0,0) – седло, (1.67,1.67) – устойчивый узел.

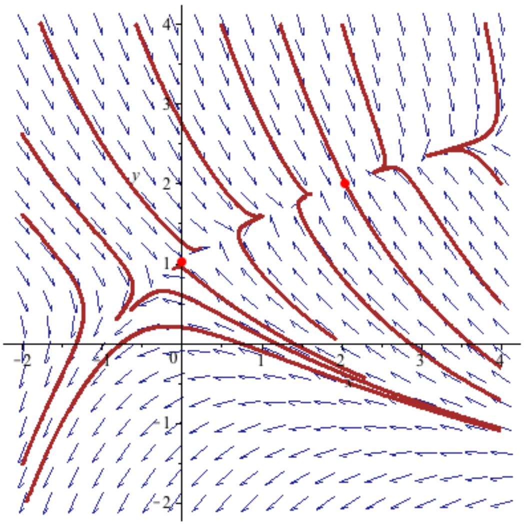

Рис. 3.13. (0,1) – седло,
(2,2) – устойчивый узел.

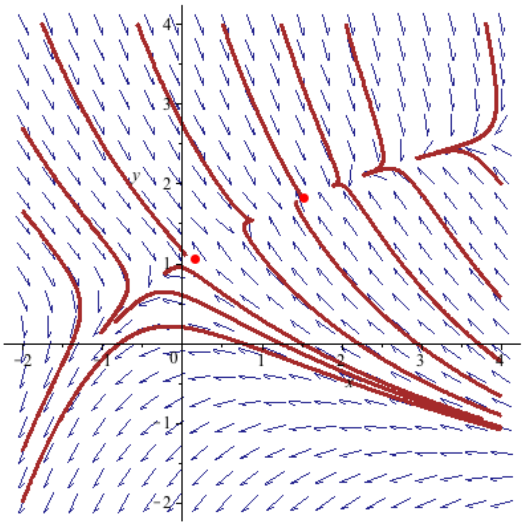

Рис. 3.14. (0.18,1.16) – седло,
(1.55,1.84) – устойчивый узел.

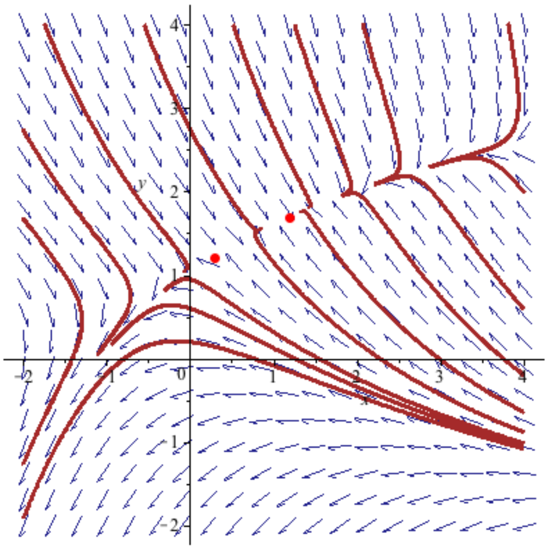

Рис. 3.15. (0.35,1.28) – седло,
(1.25,1.72) – устойчивый узел.

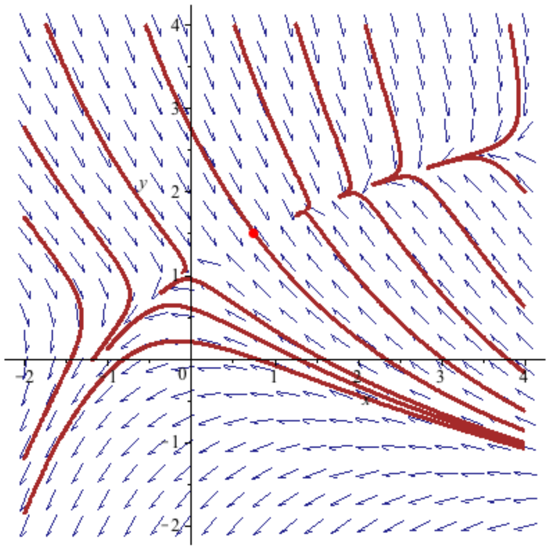

Рис. 3.16. (0.75,1.50) –
седло-узел.

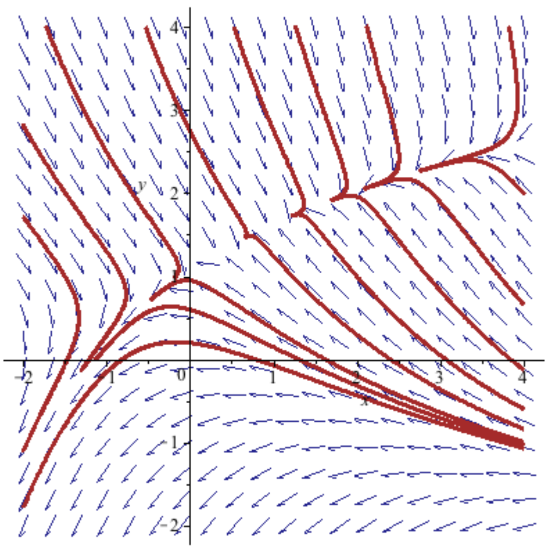

Рис. 3.17. Нет особых точек.

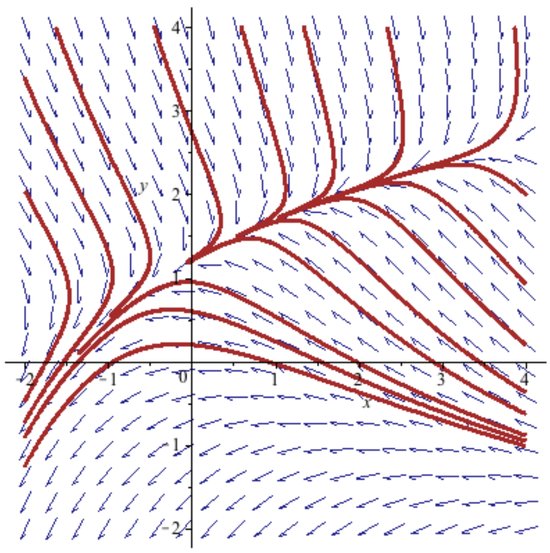

Рис. 3.18. Нет особых точек.

3.5.2. Иерархическая игра $n+1$-го агента.

Рассмотрим теперь экономический аспект создания охраняемой территории с сохранением добычи популяции на неохраняемой части ее ареала и возможностью существования миграции особей между охраняемой и остальной частями территории.

Пусть центр обладает величиной m некоторого ресурса, подвергаемого добыче. Центр распределяет эту величину между n потребителями на основе байесовского подхода. Предположим, что случайное событие A заключается в полном освоении ресурса m, H_i – случайные события (гипотезы) освоения ресурса i-тым пользователем, $i \in I$, $i = 1,2,...,n$, p_i – вероятности гипотез, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p(A|H_i)$ – условные вероятности освоения ресурса i-тым пользователем. При условии осуществления случайного события A пересчитанные вероятности гипотез

$$p(H_i \mid A) = \frac{p_i p(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} p_j p(A|H_j)}.$$

Центр распределяет ресурс между n потребителями в виде величин m_i в порядке уменьшения полученных вероятностей, причем $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Далее задача формулируется как неантагонистическая иерархическая игра $n+1$-го агента – управляющего центра и n пользователей природными ресурсами. Цели игроков заключаются в выработке оптимальных стратегий для получения максимального выигрыша. Стратегией центра является выбор оптимальной доли s заповедной территории, стратегией пользователя – выбор оптимальной доли добычи h_i, $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$ с учетом поведения центра. Функцию выигрыша центра обозначим $K_0(s, h_1, h_2, ..., h_n)$, функцию выигрыша i-того пользователя – $K_i(s, h_i)$. В функциях рассматриваются экономические факторы создания охраняемой территории при наличии экологических ограничений. Экологические ограничения заключаются во введении норм плановой добычи на неохраняемой части ареала. Центр назначает штрафы за превышение норм добычи.

В качестве принципа оптимальности можно выбрать равновесие по Нэшу, заключающееся в том, что ни один из игроков не может получить выгоду при одностороннем изменении своей стратегии.

Набор стратегий (s^*, h_i^*) называется *ситуацией равновесия по Нэшу* в иерархической игре, если для любых стратегий s и h_i из соответствующих множеств стратегий имеют место неравенства

$$K_0(s^*,h_1^*,h_2^*,...,h_n^*) \geq K_0(s,h_1^*,h_2^*,...,h_n^*),$$
$$K_i(s^*,h_1^*,h_2^*,...,h_i^*,...,h_n^*) \geq K_i(s^*,h_1^*,h_2^*,...,h_i\ ,...,h_n^*),\ \ i \in I.$$

Пусть I_1 – множество индексов, приписываемых потребителям, величина добычи которых превосходит выделенные им ресурсы.

Построим функции выигрыша каждого из агентов. Выигрыш управляющего центра имеет вид:

$$K_0(s,h_1,h_2,...,h_n) = l_1(1-s) - l_2 s - l_3 b + \frac{\lambda s}{1-s}\sum_{i \in I_1}(h_i x(t_0) - m_i),\ \ h_i x(t_0) > m_i, \tag{3.57}$$

где s – доля заповедной части ареала, $h_i x(t_0)$ – величина плановой добычи i-того потребителя в момент t_0, b – величина браконьерской добычи популяции, l_1 – затраты агентов второго уровня на использование неохраняемой территории, $l_1 = \sum_{i=1}^{n} l_{1i}$, l_2 – затраты центра на содержание охраняемой территории, m_i – величина ресурса, выделенного i-тому потребителю, λ – ставка штрафа за превышение нормы добычи. Величина штрафа зависит от отношения величин охраняемой и неохраняемой частей ареала $\dfrac{s}{1-s}$.

Выигрыш пользователя описывается функцией

$$K_i(s,h_i) = \begin{cases} h_i x(t_0)(p - q h_i x(t_0)) - l_{1i}(1-s) - \dfrac{\lambda s}{1-s}(h_i x(t_0) - m_i),\ \ h_i x(t_0) > m_i, \\ h_i x(t_0)(p - q h_i x(t_0)) - l_{1i}(1-s),\ \ h_i x(t_0) \leq m_i, \end{cases} \tag{3.58}$$

где p – цена продажи добычи, q – затраты на добычу.

Оптимальные решения находятся из уравнений

$$\frac{\partial K_0}{\partial s} = 0,\ \ \frac{\partial K_i}{\partial h_i} = 0.$$

Имеем следующие оптимальные значения s и $h_i x(t_0)$:

$$s^* = 1 - \sqrt{\frac{\lambda \sum_{i \in I_1}(h_i x(t_0) - m_i)}{l_1 + l_2}} \quad \text{при} \quad h_i x(t_0) > m_i,\ \ i \in I_1 \tag{3.59}$$

если $\lambda \leq \dfrac{l_1 + l_2}{\sum_{i \in I_1}(h_i x(t_0) - m_i)}$,

$$h_i^* x(t_0) = \begin{cases} \dfrac{p(1-s)-\lambda s}{2q(1-s)}, \; p > \dfrac{\lambda s}{1-s}, \\ 0, \; p \le \dfrac{\lambda s}{1-s} \end{cases} \quad \text{при} \;\; h_i x(t_0) > m_i;$$

$$h_i^* x(t_0) = \frac{p}{2q} \;\; \text{при} \;\; h_i x(t_0) \le m_i. \tag{3.60}$$

Если все пользователи при добыче не превышают назначенную им величину ресурса, то у центра нет оптимальной стратегии выбора доли охраняемой части ареала. Величина же оптимальной добычи зависит от цены продажи добычи. Если цена продажи добычи p меньше величины $\dfrac{\lambda s}{1-s}$, то промысел убыточен.

3.5.3. Случайная величина добычи популяции.

Значение функции добычи $w(x(t_0)) = hx(t_0) + b$, в момент времени t_0 в этом параграфе будем считать случайной величиной. При этом полагаем, что доли плановой добычи h_i, $i \in I$, распределены по нормальному закону и независимы, тогда их сумма $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\bar{h}$ и дисперсией σ^2, а случайная величина $hx(t_0)$ – по нормальному закону $N(\bar{h}x(t_0),\; \sigma^2 x^2(t_0))$. Случайную величину b считаем распределенной равномерно на отрезке $[r_1, r_2]$. Тогда плотность распределения случайной величины $w(x(t_0))$ получаем сверткой равномерного и нормального законов (рис. 3.19):

$$f_1(z) = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[\Phi\left(\frac{\bar{h} + r_2 - z}{\sigma x(t_0)}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{h} + r_1 - z}{\sigma x(t_0)}\right)\right]. \tag{3.61}$$

Здесь $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа.

Найдем плотности распределения функций выигрыша $K_0(s, h_1, h_2, ..., h_n)$ и $K_i(s, h_i)$. Плотность распределения функции выигрыша центра представляет собой распределение разности нормальной и равномерно распределенных случайных величин.

$$f_2(z) = \frac{1}{l_3(r_2 - r_1)}\left[\Phi\left(\frac{\bar{h}_1}{\sigma_1} - \frac{(1-s)(z + l_3 r_1 + Q)}{\lambda s \sigma_1 x(t_0)}\right) - \Phi\left(\frac{h_1}{\sigma_1} + \frac{(1-s)(z + l_3 r_2 + Q)}{\lambda s \sigma_1 x(t_0)}\right)\right]. \tag{3.62}$$

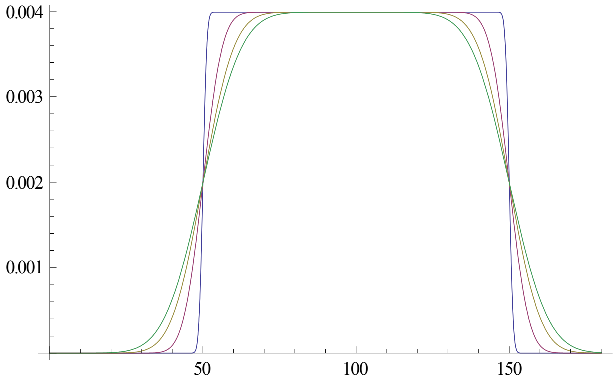

Рис. 3.19. Плотность распределения случайной величины добычи $w(x(t_0))$.

Здесь $\Phi(z)$ – функция Лапласа, $Q=\dfrac{\lambda s m_1}{1-s}-l_1(1-s)+l_2 s$, $\bar{h}_1$ и σ_1 – математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины $h=\sum\limits_{i\in I_1} h_i$, $m_1=\sum\limits_{i\in I_1} m_i$. Форма кривой распределения (3.31) аналогична форме кривой, приведенной на рис. 3.19.

Если добыча ни одного из пользователей не превышает выделенной нормы ресурса, то функция выигрыша центра имеет равномерное распределение на отрезке $[Q_1-l_3r_1,\ Q_1-l_3r_2]$, $Q_1=l_1(1-s)-l_2 s$.

Плотность распределения функции выигрыша $K_i(s,h_i)$ имеет вид плотности распределения линейной функции от квадрата нормальной случайной величины (рис. 3.20):

$$f_3(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi q(L-z)}}\exp\left\{-\frac{L-z+qA^2}{2qC^2}\right\}ch\frac{A\sqrt{L-z}}{\sqrt{q}C^2},\ \ L-z>0. \quad (3.63)$$

В формуле (3.32) при $h_i x(t_0)>m_i$

$$A=\bar{h}_i x(t_0)-\frac{1}{2q}\left(p-\frac{\lambda s}{1-s}\right),\ \ C=x(t_0)\sigma_i,$$

$$L=-l_1(1-s)+\frac{1}{4q}\left(p-\frac{\lambda s}{1-s}\right)^2+\frac{\lambda s m_i}{1-s};$$

при $h_i x(t_0)\le m_i$

$$A=\bar{h}_i x(t_0)-\frac{p}{2q},\ \ C=x(t_0)\sigma_i,\ \ L=-l_1(1-s)+\frac{p^2}{4q}.$$

Здесь $\bar{h}_i$ – математическое ожидание, σ_i^2 – дисперсия нормально распределенной случайной величины h_i.

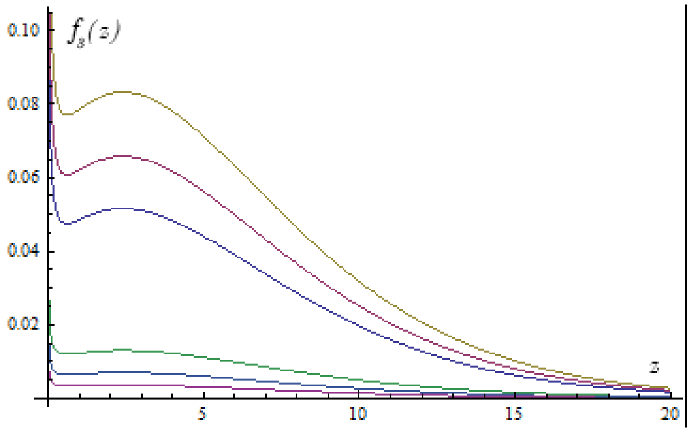

Рис. 3.20. Плотность распределения случайной величины выигрыша игрока второго уровня.

В этой главе использованы следующие источники:

1. Бадьянов В.И. О зависимости затрат на очистку стоков при добыче золота от ставок платы за использование водных ресурсов // III международная конференция по математическому моделированию. Тезисы докладов. – Якутск: Изд-во ЯГУ, 2001. – С. 71-72.

2. Васильев М.Д., Трофимцев Ю.И. Эколого-экономическая модель охраняемой популяции со случайной величиной добычи // Тр. Межд. науч. чтений «Приморские зори-2012» Вып. 1. – Владивосток: изд. ТАНЭБ, 2012. – С. 75-78.

3. Васильев М.Д., Трофимцев Ю.И. Модель охраняемой популяции при наличии конкуренции на билокальном ареале // Вестник Кем. ГУ, 2015, № 2(62), т.1. – С. 11-22.

4. Герасимович А.И., Кеда Н.П., Сугак М.Б. Математический анализ. Ч. 2. – Минск: Выш. школа, 1990. – 272 с.

5. Иларов Н.А., Парфенова А.С., Румянцев В.А. Очистное сооружение стоков. Патент РФ на изобретение. Решение о выдаче патента на изобретение по заявке 97105670/25(006080). ФИПС, 23.12.98.

6. Мазалов В.В., Винниченко С.В. Игровые схемы в дражных системах // Математические модели рационального природопользования. – Новосибирск: Наука, 1989. – С. 105-109.

7. Мазалов В.В., Раднаева Д.Б. Оптимизационные задачи на множестве решений уравнений переноса загрязняющих веществ // Моделирование природных систем и задачи оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 1993. – С. 18-29.

8. Мазалов В.В. Теория игр и приложения. – СПб: Лань, 2010. – 448 с.

9. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

10. Петросян Л.А., Захаров В.В. Введение в математическую экологию. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 224 с.

11. Толстихин О.Н., Трофимцев Ю.И. Экологический менеджмент. – Новосибирск: Наука, 1998. – 216 с.

12. Трофимцев Ю.И. Системные принципы: применения в экологии: Учеб. пособие. – Якутск: Изд-во ЯГУ, 1994. – 90 с.

13. Эколого-экономическая стратегия развития региона. – Новосибирск: Наука, 1990. – 184 с.