Глава IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Лекции 10–12

§ 12. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

12.1. Основные понятия

Поверхность и ее уравнение

Поверхность в пространстве, как правило, можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию. Например, ***сфера*** радиуса R с центром в точке O_1 есть геометрическое место всех точек пространства, находящихся от точки O_1 на расстоянии R.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел x, y и z — их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Уравнением данной поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

Уравнение поверхности позволяет изучение геометрических свойств поверхности заменить исследованием его уравнения. Так, для того, чтобы узнать, лежит ли точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на данной поверхности, достаточно подставить координаты точки M_1 в уравнение поверхности вместо переменных: если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют — не лежит.

Уравнение сферы

Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(x_0; y_0; z_0)$. Согласно определению сферы расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $O_1(x_0; y_0; z_0)$ равно радиусу R, т. е. $O_1M = R$. Но $O_1M = |\overline{O_1M}|$, где $\overline{O_1M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Следовательно,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

или
$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.}$$
Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

Если центр сферы O_1 совпадает с началом координат, то уравнение сферы принимает вид $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Если же дано уравнение вида $F(x;y;z)=0$, то оно, вообще говоря, определяет в пространстве некоторую поверхность.

Выражение «вообще говоря» означает, что в отдельных случаях уравнение $F(x;y;z)=0$ может определять не поверхность, а точку, линию или вовсе не определять никакой геометрический образ. Говорят, «поверхность вырождается».

Так, уравнению $2x^2+y^2+z^2+1=0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x, y, z. Уравнению $0\cdot x^2+y^2+z^2=0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси Ox (из уравнения следует: $y=0$, $z=0$, а x — любое число).

Итак, поверхность в пространстве можно задать геометрически и аналитически. Отсюда вытекает постановка двух основных задач:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек. Найти уравнение этой поверхности.

2. Дано уравнение $F(x;y;z)=0$. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей (см. рис. 66) или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x;y;z)=0$ и $F_2(x;y;z)=0$ — уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:
$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0,\\ F_2(x;y;z)=0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Уравнения системы (12.1) называются ***уравнениями линии в пространстве***. Например, $\begin{cases} y=0,\\ z=0 \end{cases}$ есть уравнения оси Ox.

Линию в пространстве можно рассматривать как траекторию движения точки (см. рис. 67). В этом случае ее задают *векторным уравнением*
$$\bar{r}=\bar{r}(t) \tag{12.2}$$

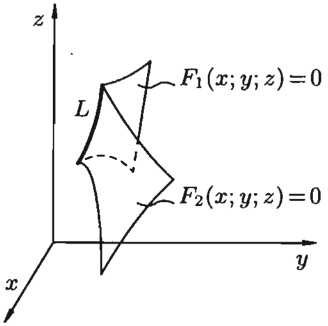

Рис. 66

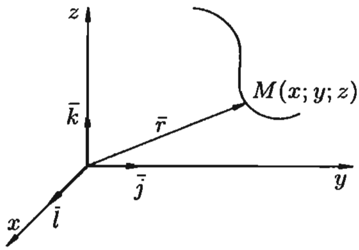

Рис. 67

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

проекций вектора (12.2) на оси координат.

Например, параметрические уравнения *винтовой линии* имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = \dfrac{h}{2\pi}t. \end{cases}$$

Если точка M равномерно движется по образующей кругового цилиндра, а сам цилиндр равномерно вращается вокруг оси, то точка M описывает винтовую линию (см. рис. 68).

12.2. Уравнения плоскости в пространстве

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами. Каждому из них соответствует определенный вид ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и вектором $\bar{n} = (A;B;C)$, перпендикулярным этой плоскости (см. рис. 69). Выведем уравнение плоскости Q. Возьмем на ней произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

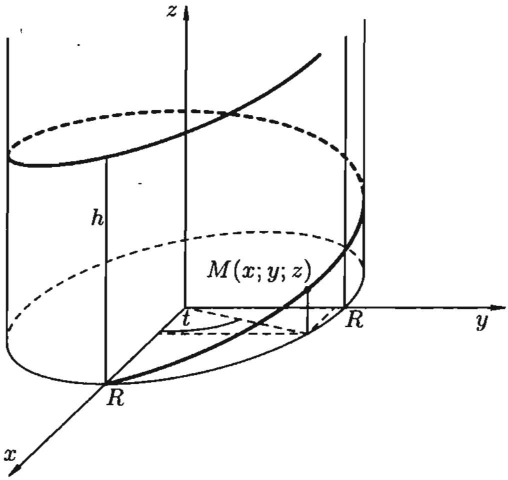

Рис. 68

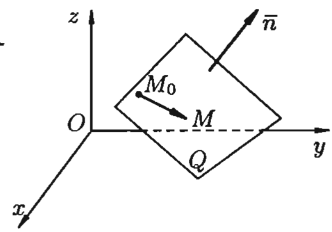

Рис. 69

При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \tag{12.3}$$

Координаты любой точки плоскости Q удовлетворяют уравнению (12.3), координаты точек, не лежащих на плоскости Q, этому уравнению не удовлетворяют (для них $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} \neq 0$).

Уравнение (12.3) называется ***уравнением плоскости, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{n} = (A; B; C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\bar{n} = (A; B; C)$ называется ***нормальным вектором плоскости***.

Придавая коэффициентам A, B и C уравнения (12.3) различные значения, можно получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку M_0. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*, а уравнение (12.3) — *уравнением связки плоскостей*.

Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя переменными x, y и z:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{12.4}$$

Полагая, что по крайней мере один из коэффициентов A, B или C не равен нулю, например $B \neq 0$, перепишем уравнение (12.4) в виде

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z-0) = 0. \qquad (12.5)$$

Сравнивая уравнение (12.5) с уравнением (12.3), видим, что уравнения (12.4) и (12.5) являются уравнением плоскости с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, проходящей через точку $M_1\left(0; -\frac{D}{B}; 0\right)$.

Итак, уравнение (12.4) определяет в системе координат $Oxyz$ некоторую плоскость. Уравнение (12.4) называется ***общим уравнением плоскости***.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. *Если* $D = 0$, то оно принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0;0;0)$. Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат*.

2. *Если* $C = 0$, то имеем уравнение $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\bar{n} = (A; B; 0)$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, *плоскость параллельна оси* Oz; если $B = 0$ — параллельна оси Oy, $A = 0$ — параллельна оси Ox.

3. *Если* $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0;0;0)$ параллельно оси Oz, т. е. плоскость $Ax + By = 0$ *проходит через ось* Oz. Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy.

4. *Если* $A = B = 0$, то уравнение (12.4) принимает вид $Cz + D = 0$, т. е. $z = -\frac{D}{C}$. Плоскость *параллельна плоскости* Oxy. Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz и Oxz.

5. *Если* $A = B = D = 0$, то уравнение (12.4) примет вид $Cz = 0$, т. е. $z = 0$. Это *уравнение плоскости* Oxy. Аналогично: $y = 0$ — уравнение плоскости Oxz; $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим векторы $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем

$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \tag{12.6}$$

Уравнение (12.6) есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b и c, т. е. проходит через три точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ (см. рис. 70).

Подставляя координаты этих точек в уравнение (12.6), получаем

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $bcx - abc + abz + acy = 0$, т. е. $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{12.7}$$

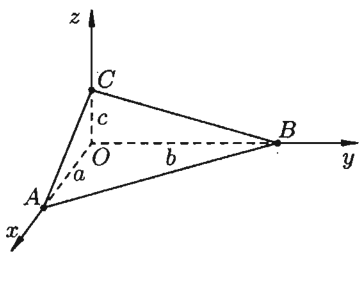

Рис. 70

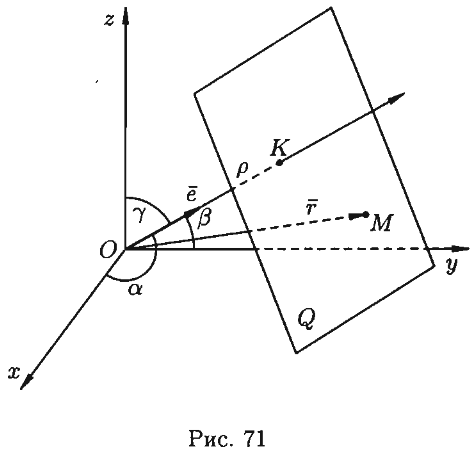

Рис. 71

Уравнение (12.7) называется ***уравнением плоскости в отрезках на осях.*** Им удобно пользоваться при построении плоскости.

Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости Q вполне определяется заданием единичного вектора $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра (см. рис. 71).

Пусть $OK = p$, а α, β, γ — углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$ с осями Ox, Oy и Oz. Тогда $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x; y; z)$ и соединим ее с началом координат. Образуем вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y; z)$.

При любом положении точки M на плоскости Q проекция радиус-вектора $\bar{r}$ на направление вектора $\bar{e}$ всегда равно p: $\text{пр}_{\bar{e}}\bar{r} = p$, т. е. $\bar{r} \cdot \bar{e} = p$ или

$$\boxed{\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0.} \qquad (12.8)$$

Уравнение (12.8) называется ***нормальным уравнением плоскости в векторной форме.*** Зная координаты векторов $\bar{r}$ и $\bar{e}$, уравнение (12.8) перепишем в виде

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.} \qquad (12.9)$$

Уравнение (12.9) называется ***нормальным уравнением плоскости в координатной форме.***

Отметим, что общее уравнение плоскости (12.4) можно привести к нормальному уравнению (12.9) так, как это делалось для уравнения прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения (12.4) на нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

12.3. Плоскость. Основные задачи

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов (см. рис. 72). Поэтому $\cos\varphi = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны (см. рис. 73, *а*), то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$,

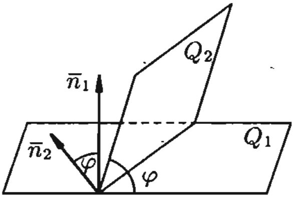

Рис. 72

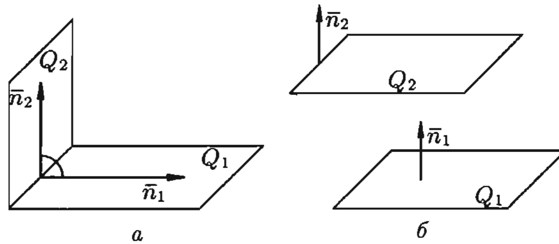

Рис. 73

т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны (см. рис. 73, *б*), то будут параллельны и их нормали $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (см. с. 73).

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — произвольная точка плоскости Q, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ (см. рис. 74). Следовательно,

$$d = |\,\text{пр}_{\bar{n}}\,\overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

А так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости Q, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Поэтому $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Отметим, что если плоскость Q задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Q может быть найдено по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|.$$

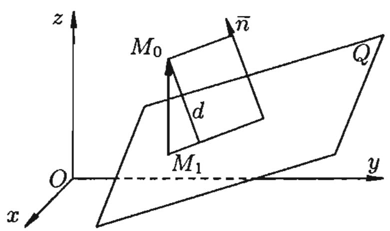

Рис. 74

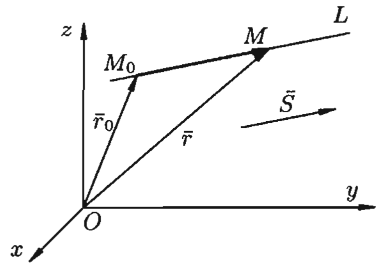

Рис. 75

12.4. Уравнения прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\bar{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{S}$ называется ***направляющим вектором прямой***. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}. \qquad (12.10)$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой (см. рис. 75).

Уравнение (12.10) можно записать в виде

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}.} \qquad (12.11)$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой.***

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение (12.11) можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}} \qquad (12.12)$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{S}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\bar{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.} \qquad (12.13)$$

Уравнения (12.13) называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Замечания: 1) Уравнения (12.13) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (12.12), исключив параметр t. Из уравнений (12.12) находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (12.13) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2; -4; 1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора $\bar{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т. е. $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ (см. рис. 76). Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то, согласно уравнениям (12.13), уравнения прямой L имеют вид

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \qquad (12.14)$$

Уравнения (12.14) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.***

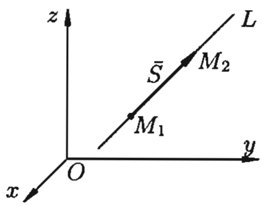

Рис. 76

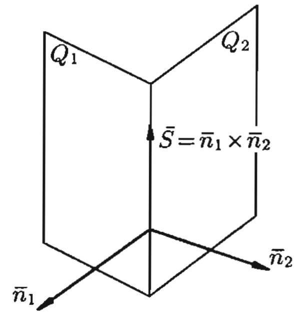

Рис. 77

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (12.15)$$

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система (12.15) определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (см. рис. 77). Уравнения (12.15) называют *общими уравнениями прямой.*

От общих уравнений (12.15) можно перейти к каноническим уравнениям (12.13). Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений (12.15), придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание: Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения (12.14).

Пример 12.1. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y-3z+5=0. \end{cases}$$

○ Решение: Положим $z=0$ и решим систему $\begin{cases} x+y=-1, \\ 2x-y=-5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2;1;0)\in L$. Положим $y=0$ и решим систему $\begin{cases} x-z=-1, \\ 2x-3z=-5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2;0;3)$ прямой L. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}.$$ ●

12.5. Прямая линия в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

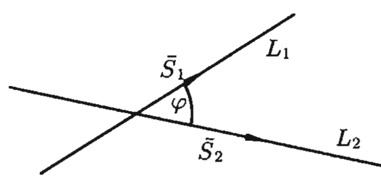

Рис. 78

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2= =(m_2;n_2;p_2)$ (см. рис. 78). Поэтому, по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем $\cos\varphi=\dfrac{\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2}{|\bar{S}_1|\cdot|\bar{S}_2|}$ или

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.} \qquad (12.16)$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (12.16) следует взять по модулю.

Если *прямые L_1 и L_2 перпендикулярны*, то в этом и только в этом случае имеем $\cos\varphi=0$. Следовательно, числитель дроби (12.16) равен нулю, т. е. $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Если *прямые L_1 и L_2 параллельны*, то параллельны их направляющие векторы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Пример 12.2. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3x + 5 = 0. \end{cases}$$

○ Решение: Очевидно, $\bar{S}_1 = (2; -1; 3)$, а $\bar{S}_2 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, где $\bar{n}_1 = (2; 1; -1)$, $\bar{n}_2 = (2; -1; 3)$. Отсюда следует, что $\bar{S}_2 = (2; -8; -4)$. Так как $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = 4 + 8 - 12 = 0$, то $\varphi = 90°$. ●

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

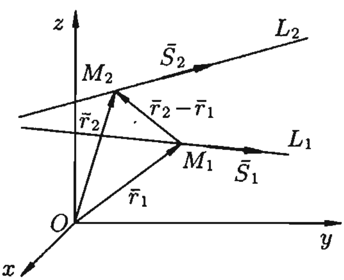

Рис. 79

Их направляющие векторы соответственно $\bar{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ (см. рис. 79).

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_2$. Тогда

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ и $\overline{M_1 M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{S}_1\bar{S}_2 = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\bar{S}_2 \neq \lambda \bar{S}_1$, либо параллельны, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$.

12.6. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ — угол между векторами $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\bar{S} = (m; n; p)$ (см. рис. 80). Тогда $\cos\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$. Найдем синус угла φ, считая $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$. И так как $\sin\varphi \geqslant 0$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (12.17)$$

Если *прямая L параллельна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны (см. рис. 81), а потому $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

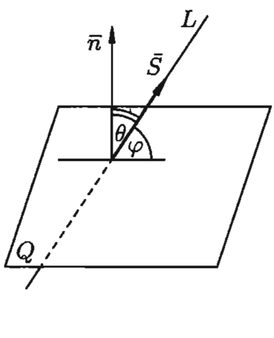

Рис. 80

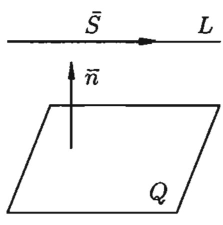

Рис. 81

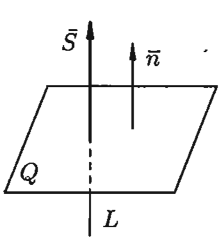

Рис. 82

Если *прямая L перпендикулярна плоскости Q*, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны (см. рис. 82). Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{12.18}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{12.19}$$

Для этого надо решить систему уравнений (12.18) и (12.19). Проще всего это сделать, записав уравнения прямой (12.18) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (12.19), получаем уравнение $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$ или

$$t(Am + Bn + Cp) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{12.20}$$

Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am+Bn+Cp \neq 0$, то из равенства (12.20) находим значение t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am + Bn + Cp = 0$ ($L \parallel Q$):

а) если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение (12.20) решения не имеет, так как имеет вид $0 \cdot t + F = 0$, где $F \neq 0$);

б) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение (12.20) имеет вид $t \cdot 0 + 0 = 0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости.***

12.7. Цилиндрические поверхности

Поверхность, образованная движением прямой L, которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая каждый раз некоторую кривую K, называется ***цилиндрической***

поверхностью или ***цилиндром***. При этом кривая K называется ***направляющей*** цилиндра, а прямая L — его ***образующей*** (см. рис. 83).

Будем рассматривать цилиндрические поверхности, направляющие которых лежат в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости.

Пусть в плоскости Oxy лежит некоторая линия K, уравнение которой

$$F(x;y) = 0. \qquad (12.21)$$

Построим цилиндр с образующими параллельными оси Oz и направляющей K.

Теорема 12.1. Уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz, имеет вид (12.21), т. е. не содержит координаты z.

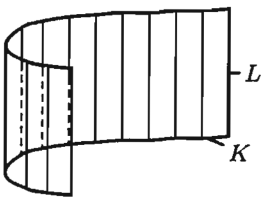

Рис. 83

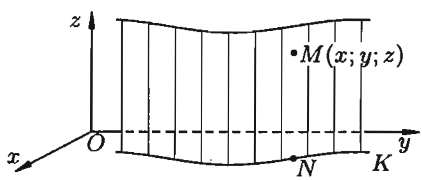

Рис. 84

❑ Возьмем на цилиндре любую точку $M(x;y;z)$ (см. рис. 84). Она лежит на какой-то образующей. Пусть N — точка пересечения этой образующей с плоскостью Oxy. Следовательно, точка N лежит на кривой K и ее координаты удовлетворяют уравнению (12.21).

Но точка M имеет такие же абсциссу x и ординату y, что и точка N. Следовательно, уравнению (12.21) удовлетворяют и координаты точки $M(x;y;z)$, так как оно не содержит z. И так как M — это любая точка цилиндра, то уравнение (12.21) и будет уравнением этого цилиндра. ■

Теперь ясно, что $F(x;z) = 0$ есть уравнение цилиндра с образующими, параллельными оси Oy, а $F(y;z) = 0$ — с образующими, параллельными оси Ox. Название цилиндра определяется названием направляющей. Если направляющей служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в плоскости Oxy, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется ***эллиптическим цилиндром*** (см. рис. 85).

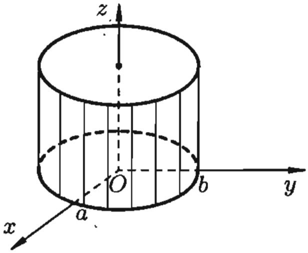

Рис. 85

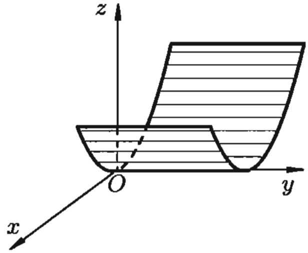

Рис. 86

Частным случаем эллиптического цилиндра является ***круговой цилиндр***, его уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Уравнение $x^2 = 2pz$ определяет в пространстве ***параболический цилиндр*** (см. рис. 86). Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

определяет в пространстве ***гиперболический цилиндр*** (см. рис. 87).

Все эти поверхности называются ***цилиндрами второго порядка***, так как их уравнения есть уравнения второй степени относительно текущих координат x, y и z.

12.8. Поверхности вращения. Конические поверхности

Поверхность, образованная вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, называется *поверхностью вращения.* Пусть некоторая кривая L лежит в плоскости Oyz. Уравнения этой кривой запишутся в виде

$$\begin{cases} F(y;z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \tag{12.22}$$

Найдем уравнение поверхности, образованной вращением кривой L вокруг оси Oz.

Возьмем на поверхности произвольную точку $M(x;y;z)$ (см. рис. 88). Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную оси Oz, и обозначим точки пересечения ее с осью Oz и кривой L соответственно через O_1 и N. Обозначим координаты точки N через $(0;y_1;z_1)$. Отрезки O_1M и O_1N являются радиусами одной и той же окружности. Поэтому $O_1M = O_1N$. Но $O_1M = \sqrt{x^2+y^2}$, $O_1N = |y_1|$. Следовательно, $|y_1| = \sqrt{x^2+y^2}$ или $y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Кроме того, очевидно, $z_1 = z$.

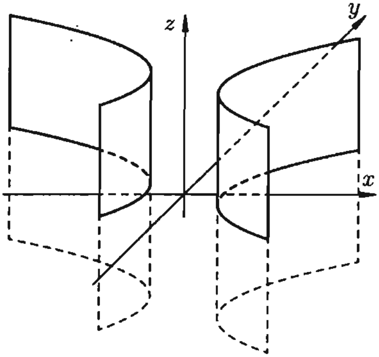

Рис. 87

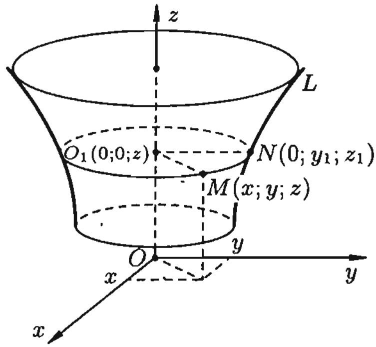

Рис. 88

Так как точка N лежит на кривой L, то ее координаты удовлетворяют уравнению (12.22). Стало быть, $F(y_1; z_1) = 0$. Исключая вспомогательные координаты y_1 и z_1 точки N, приходим к уравнению

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0. \tag{12.23}$$

Уравнение (12.23) — искомое уравнение поверхности вращения, ему удовлетворяют координаты любой точки M этой поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности вращения.

Как видно, уравнение (12.23) получается из (12.22) простой заменой y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, координата z сохраняется.

Понятно, что если кривая (12.22) вращается вокруг оси Oy, то уравнение поверхности вращения имеет вид

$$F(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0;$$

если кривая лежит в плоскости Oxy ($z = 0$) и ее уравнение $F(x; y) = 0$, то уравнение поверхности вращения, образованной вращением кривой вокруг оси Ox, есть $F(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$.

Так, например, вращая прямую $y = z$ вокруг оси Oz (см. рис. 89), получим поверхность вращения (ее уравнение $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$ или $x^2 + y^2 = z^2$). Она называется конусом второго порядка.

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную плоскую линию L (не проходящую через P), называется ***конической поверхностью*** или ***конусом***. При этом линия L называется ***направляющей*** конуса, точка P — ее ***вершиной***, а прямая, описывающая поверхность, называется ***образующей***.

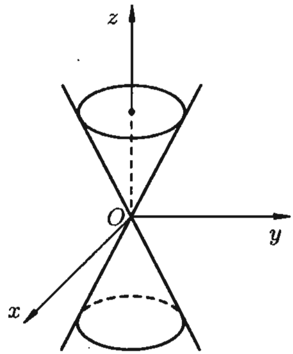

Рис. 89

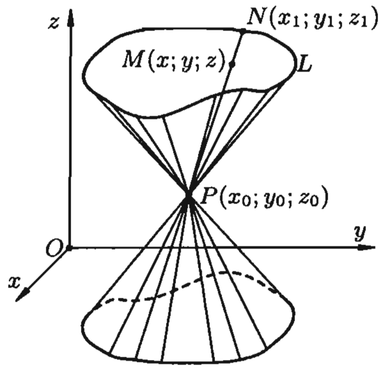

Рис. 90

Пусть направляющая L задана уравнениями

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0, \end{cases} \tag{12.24}$$

а точка $P(x_0; y_0; z_0)$ — вершина конуса. Найдем уравнение конуса.

Возьмем на поверхности конуса произвольную точку $M(x; y; z)$ (см. рис. 90). Образующая, проходящая через точки P и M, пересечет направляющую L в некоторой точке $N(x_1; y_1; z_1)$. Координаты точки N удовлетворяют уравнениям (12.24) направляющей:

$$\begin{cases} F_1(x_1; y_1; z_1) = 0, \\ F_2(x_1; y_1; z_1) = 0. \end{cases} \tag{12.25}$$

Канонические уравнения образующих, проходящих через точки P и N, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{12.26}$$

Исключая x_1, y_1 и z_1 из уравнений (12.25) и (12.26), получим уравнение конической поверхности, связывающее текущие координаты x, y и z.

Пример 12.3. Составить уравнение конуса с вершиной в точке $O(0; 0; 0)$, если направляющей служит эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащий в плоскости $z = c$.

◐ Решение: Пусть $M(x; y; z)$ — любая точка конуса. Канонические уравнения образующих, проходящих через точки $(0; 0; 0)$ и точку $(x_1; y_1; z_1)$ пересечения образующей OM с эллипсом будут $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} =$

$= \frac{z}{z_1}$. Исключим x_1, y_1 и z_1 из этих уравнений и уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \tag{12.27}$$

(точка $(x_1; y_1; z_1)$ лежит на эллипсе), $z_1 = c$. Имеем: $\frac{x}{x_1} = \frac{z}{c}$, $\frac{y}{y_1} = \frac{z}{c}$. Отсюда $x_1 = c \cdot \frac{x}{z}$ и $y_1 = c \cdot \frac{y}{z}$. Подставляя значения x_1 и y_1 в уравнение эллипса (12.27), получим

$$\frac{c^2 \cdot x^2}{z^2 \cdot a^2} + \frac{c^2 \cdot y^2}{z^2 \cdot b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Это и есть искомое уравнение конуса. ●

12.9. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

По заданному уравнению поверхности второго порядка (т. е. поверхности, уравнение которой в прямоугольной системе координат является алгебраическим уравнением второй степени) будем определять ее геометрический вид. Для этого применим так называемый *метод сечений:* исследование вида поверхности будем производить при помощи изучения линий пересечения данной поверхности с координатными плоскостями или плоскостями, им параллельными.

Эллипсоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.} \tag{12.28}$$

Рассмотрим сечения поверхности (12.28) с плоскостями, параллельными плоскости xOy. Уравнения таких плоскостей: $z = h$, где h — любое число.

Линия, получаемая в сечении, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \tag{12.29}$$

Исследуем уравнения (12.29):

а) Если $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$. Точек пересечения поверхности (12.28) с плоскостями $z = h$ не существует.

б) Если $|h| = c$, т. е. $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Линия пересечения (12.29) вырождается в две точки $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$. Плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются данной поверхности.

в) Если $|h| < c$, то уравнения (12.29) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

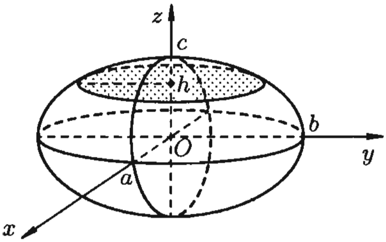

Рис. 91

Как видно, линия пересечения есть эллипс с полуосями (см. рис. 91)

$$a_1 = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b_1 = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

При этом чем меньше $|h|$, тем больше полуоси a_1 и b_1. При $h = 0$ они достигают своих наибольших значений: $a_1 = a$, $b_1 = b$. Уравнения (12.29) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ h = 0. \end{cases}$$

Аналогичные результаты получим, если рассмотрим сечения поверхности (12.28) плоскостями $x = h$ и $y = h$.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить поверхность (12.28) как замкнутую овальную поверхность. Поверхность (12.28) называется ***эллипсоидом***. Величины a, b и c называются ***полуосями*** эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехосным***; если какие-либо две полуоси равны, трехосный эллипсоид превращается в ***эллипсоид вращения***; если $a = b = c$, то — в ***сферу*** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Однополостный гиперболоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.} \qquad (12.30)$$

Пересекая поверхность (12.30) плоскостью $z = h$, получим линию пересечения, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Как видно, этой линией является эллипс с полуосями

$$a_1 = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad b_1 = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Полуоси a_1 и b_1 достигают своего наименьшего значения при $h = 0$: $a_1 = a$, $b_1 = b$. При возрастании $|h|$ полуоси эллипса будут увеличиваться.

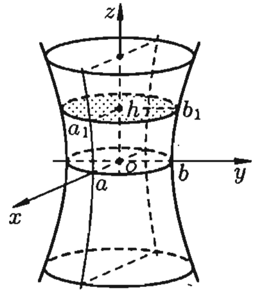

Рис. 92

Если пересекать поверхность (12.30) плоскостями $x = h$ или $y = h$, то в сечении получим гиперболы. Найдем, например, линию пересечения поверхности (12.30) с плоскостью Oyz, уравнение которой $x = 0$. Эта линия пересечения описывается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Как видно, эта линия есть гипербола (см. рис. 92).

Анализ этих сечений показывает, что поверхность, определяемая уравнением (12.30), имеет форму бесконечной расширяющейся трубки. Поверхность (12.30) называется ***однополостным гиперболоидом***.

Замечание: можно доказать, что через любую точку гиперболоида (12.30) проходят две прямые, лежащие на нем.

Двухполостный гиперболоид

Пусть поверхность задана уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \tag{12.31}$$

Если поверхность (12.31) пересечь плоскостями $z = h$, то линия пересечения определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \tag{12.32}$$

Отсюда следует, что:

а) если $|h| < c$, то плоскости $z = h$ не пересекают поверхности;

б) если $|h| = c$, то плоскости $z = \pm c$ касаются данной поверхности соответственно в точках $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$.

в) если $|h| > c$, то уравнения (12.32) могут быть переписаны так

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Эти уравнения определяют эллипс, полуоси которого возрастают с ростом $|h|$.

Пересекая поверхность (12.31) координатными плоскостями Oyz ($x = 0$) и Oxz ($y = 0$), получим в сечении гиперболы, уравнения которых соответственно имеют вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

У обеих гипербол действительной осью является ось Oz. Метод сечения позволяет изобразить поверхность (см. рис. 93), определяемую уравнением (12.31), как поверхность, состоящую из двух полостей, имеющих форму выпуклых неограниченных чаш. Поверхность (12.31) называется ***двухполостным гиперболоидом***.

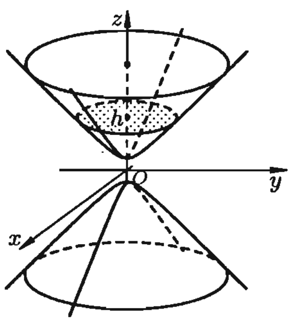

Рис. 93

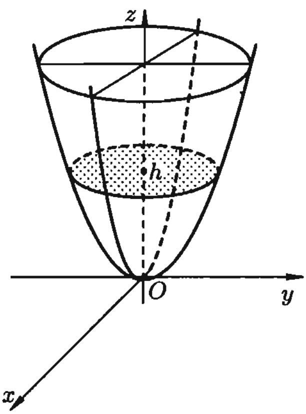

Рис. 94

Эллиптический параболоид

Исследуем поверхность, заданную уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,} \tag{12.33}$$

где $p > 0$, $q > 0$. Рассечем поверхность (12.33) плоскостями $z = h$. В сечении получим линию, уравнения которой есть

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Если $h < 0$, то плоскости $z = h$ поверхности не пересекают; если $h = 0$, то плоскость $z = 0$ касается поверхности в точке $(0;0;0)$; если $h > 0$, то в сечении имеем эллипс, уравнение которого имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Его полуоси возрастают с ростом h.

При пересечении поверхности (12.33) координатными плоскостями Oxz и Oyz получатся соответственно параболы $z = \dfrac{x^2}{2p}$ и $z = \dfrac{y^2}{2q}$. Таким образом, поверхность, определяемая уравнением (12.33), имеет вид выпуклой, бесконечно расширяющейся чаши (см. рис. 94). Поверхность (12.33) называется ***эллиптическим параболоидом.***

Гиперболический параболоид

Исследуем поверхность, определяемую уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,} \tag{12.34}$$

где $p > 0$, $q > 0$. Рассечем поверхность (12.34) плоскостями $z = h$. Получим кривую

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

которая при всех значениях $h \neq 0$ является гиперболой. При $h > 0$ ее действительные оси параллельны оси Ox; при $h < 0$ — параллельны оси Oy; при $h = 0$ линия пересечения $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0$ распадается на пару пересекающихся прямых $\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$ и $\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0$. При пересечении поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxz ($y = h$), будут получаться параболы

$$\begin{cases} x^2 = 2p\Big(z + \dfrac{h^2}{2q}\Big), \\ y = h, \end{cases}$$

ветви которых направлены вверх. При $y = 0$ в сечении получается парабола

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$$

с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Пересекая поверхность (12.34) плоскостями $x = h$, получим параболы $y^2 = -2q\Big(z - \dfrac{h^2}{2p}\Big)$, ветви которых направлены вниз.

Анализ линии пересечения позволяет определить вид поверхности: она имеет вид седла (см. рис. 95). Поверхность (12.34) называется ***гиперболическим параболоидом.***

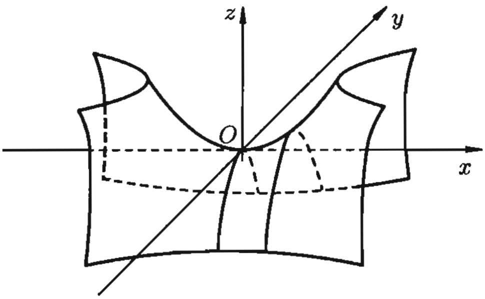

Рис. 95

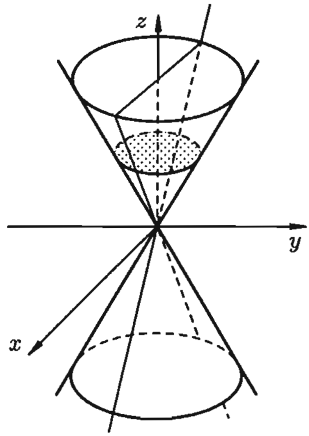

Рис. 96

Конус второго порядка

Исследуем уравнение поверхности

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.} \qquad (12.35)$$

Пересечем поверхность (12.35) плоскостями $z=h$. Линия пересечения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$, $z=h$. При $h=0$ она вырождается в точку $(0;0;0)$. При $h\neq 0$ в сечении будем получать эллипсы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}}=1,\\ z=h. \end{cases}$$

Полуоси этих эллипсов будут возрастать при возрастании $|h|$.

Рассечем поверхность (12.35) плоскостью Oyz ($x=0$). Получится линия

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ x=0, \end{cases}$$

распадающаяся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0 \quad \text{и} \quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

При пересечении поверхности (12.35) плоскостью $y=0$ получим линию

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=0, \end{cases}$$

также распадающуюся на две пересекающиеся прямые

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

Поверхность, определяемая уравнением (12.35), называется ***конусом второго порядка***, имеет вид, изображенный на рисунке 96.

Поверхности, составленные из прямых линий, называются ***линейчатыми***. Такими поверхностями являются цилиндрические, конические поверхности, а также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид.