○ Решение: Коротко: $y' = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \ln^{11} 2x \cdot \dfrac{1}{2x} \cdot 2.$

Решение с пояснениями: данную функцию можно представить следующим образом: $y = \cos u$, $u = t^{12}$, $t = \ln z$, $z = 2x$. Производную сложной функции найдем по правилу $y'_x = y'_u \cdot u'_t \cdot t'_z \cdot z'_x$ (здесь промежуточных аргументов три):

$$y'_x = -\sin u \cdot 12 \cdot t^{11} \cdot \frac{1}{z} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin t^{12} \cdot 12 \cdot (\ln z)^{11} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln z)^{12} \cdot 12 \cdot \ln^{11} z \cdot \frac{1}{x},$$

т. е.

$$y'_x = -\sin(\ln^{12} 2x) \cdot 12 \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

Окончательно

$$y'_x = -12 \cdot \sin(\ln^{12} 2x) \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$ ●

§ 21. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

21.1. Неявно заданная функция

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то функция *задана в явном виде* (явная функция).

Под ***неявным заданием*** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x; y) = 0$, не разрешенного относительно y.

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - x + y = 0$).

Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: ***достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x***, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

Пример 21.1. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

○ Решение: Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Из полученного соотношения

$$3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$$

следует, что $y^2y' - xy' = y - x^2$, т. е. $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$. ●

21.2. Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{21.1}$$

где t — вспомогательная переменная, называемая параметром.

Найдем производную y'_x, считая, что функции (21.1) имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{21.2}$$

Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (21.1), можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства (21.2) получаем

$$\boxed{y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \quad \text{т. е.} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.}$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x.

Пример 21.2. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти y'_x.

○ Решение: Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно, $y'_x = \frac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x = \frac{2}{3t}$. ●

В этом *можно* убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x.

Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y = \frac{2}{3t}$.