

# Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## Лекции 34–36

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных. Эти факты обобщаются на случай большего числа переменных. Кроме того, для функций двух переменных можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

## § 43. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 43.1. Основные понятия

Пусть задано множество  $D$  упорядоченных пар чисел  $(x; y)$ . Соответствие  $f$ , которое каждой паре чисел  $(x; y) \in D$  сопоставляет одно и только одно число  $z \in \mathbb{R}$ , называется **функцией двух переменных**, определенной на множестве  $D$  со значениями в  $\mathbb{R}$ , и записывается в виде  $z = f(x; y)$  или  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . При этом  $x$  и  $y$  называются **независимыми переменными (аргументами)**, а  $z$  — **зависимой переменной (функцией)**.

Множество  $D = D(f)$  называется **областью определения** функции. Множество значений, принимаемых  $z$  в области определения, называется **областью изменения** этой функции, обозначается  $E(f)$  или  $E$ .

Примером функции двух переменных может служить площадь  $S$  прямоугольника со сторонами, длины которых равны  $x$  и  $y$ :  $S = xy$ . Областью определения этой функции является множество  $\{(x; y) \mid x > 0, y > 0\}$ .

Функцию  $z = f(x; y)$ , где  $(x; y) \in D$  можно понимать (рассматривать) как функцию точки  $M(x; y)$  координатной плоскости  $Oxy$ . В частности, областью определения может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями. Линию, ограничивающую область, называют **границей области**. Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними**. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой**. Область с присоединенной к ней границей называется **замкнутой**, обозначается  $\overline{D}$ . Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Значение функции  $z = f(x; y)$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$  обозначают  $z_0 = f(x_0; y_0)$  или  $z_0 = f(M_0)$  и называют *частным значением функции*.

Функция двух независимых переменных допускает геометрическое истолкование. Каждой точке  $M_0(x_0; y_0)$  области  $D$  в системе координат  $Oxyz$  соответствует точка  $M(x_0; y_0; z_0)$ , где  $z_0 = f(x_0; y_0)$  — *аппликата* точки  $M$ . Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность, которая и будет геометрически изображать данную функцию  $z = f(x; y)$ .

Например, функция  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  имеет областью определения круг  $x^2 + y^2 \leq 1$  и изображается верхней полусферой с центром в точке  $O(0; 0; 0)$  и радиусом  $R = 1$  (см. рис. 204).

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком. Будем пользоваться, как правило аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

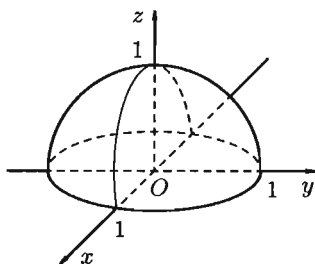


Рис. 204

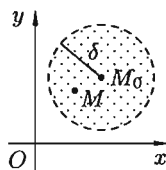


Рис. 205

## 43.2. Предел функции

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной. Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек  $M(x; y)$  плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ , называется  $\delta$ -окрестностью точки  $M_0(x_0; y_0)$ . Другими словами,  $\delta$ -окрестность точки  $M_0$  — это все внутренние точки круга с центром  $M_0$  и радиусом  $\delta$  (см. рис. 205).

☞ Пусть функция  $z = f(x; y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0; y_0)$ , кроме, быть может, самой этой точки. Число  $A$  называется **пределом функции**  $z = f(x; y)$  при  $x \rightarrow x_0$  и  $y \rightarrow y_0$  (или, что то же самое, при  $M(x; y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $x \neq x_0$  и  $y \neq y_0$  и удовлетворяю-

щих неравенству  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x; y) - A| < \varepsilon$ . Записывают:

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) \text{ или } A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому  $M$  стремится к  $M_0$  (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной  $x \rightarrow x_0$  по двум направлениям: справа и слева!)

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число  $\varepsilon > 0$ , найдется  $\delta$ -окрестность точки  $M_0(x_0; y_0)$ , что во всех ее точках  $M(x; y)$ , отличных от  $M_0$ , аппликаты соответствующих точек поверхности  $z = f(x; y)$  отличаются от числа  $A$  по модулю меньше, чем на  $\varepsilon$ .

**Пример 43.1.** Найти предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

○ Решение: Будем приближаться к  $O(0; 0)$  по прямой  $y = kx$ , где  $k$  — некоторое число. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Функция  $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  в точке  $O(0; 0)$  предела не имеет, т. к. при разных значениях  $k$  предел функции не одинаков (функция имеет различные предельные значения). ●

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной (см. п. 17.3). Это означает, что справедливы утверждения: если функции  $f(M)$  и  $g(M)$  определены на множестве  $D$  и имеют в точке  $M_0$  этого множества пределы  $A$  и  $B$  соответственно, то и функции  $f(M) \pm g(M)$ ,  $f(M) \cdot g(M)$ ,  $\frac{f(M)}{g(M)}$  ( $g(M) \neq 0$ ) имеют в точке  $M_0$  пределы, которые соответственно равны  $A \pm B$ ,  $A \cdot B$ ,  $\frac{A}{B}$  ( $B \neq 0$ ).

### 43.3. Непрерывность функции двух переменных

☞ Функция  $z = f(x; y)$  (или  $f(M)$ ) называется **непрерывной в точке**  $M_0(x_0; y_0)$ , если она:

- определена в этой точке и некоторой ее окрестности,
- имеет предел  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ ,

в) этот предел равен значению функции  $z$  в точке  $M_0$ , т. е.

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва  $z = f(x; y)$  могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, функция  $z = \frac{2}{y-x}$  имеет линию разрыва  $y = x$ .

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции  $z = f(x; y)$  в точке. Обозначим  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ ,  $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0)$ . Величины  $\Delta x$  и  $\Delta y$  называются *приращениями аргументов*  $x$  и  $y$ , а  $\Delta z$  — *полным приращением функции*  $f(x; y)$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$ .

☉ Функция  $z = f(x; y)$  называется непрерывной в точке  $M_0(x_0; y_0) \in D$ , если выполняется равенство  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ , т. е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов  $x$  и  $y$  стремятся к нулю.

Пользуясь определением непрерывности и теоремами о пределах, можно доказать, что арифметические операции над непрерывными функциями и построение сложной функции из непрерывных функций приводит к непрерывным функциям — подобные теоремы имели место для функций одной переменной (см. п. 19.4).

## 43.4. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

Приведем свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области (они аналогичны свойствам непрерывных на отрезке функций одной переменной — см. п. 19.5). Предварительно уточним понятие области.

☒ **Область** называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности.

**Свойство открытости:** каждая точка принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки.

**Свойство связности:** любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области.

☒ Точка  $N_0$  называется **граничной точкой** области  $D$ , если она не принадлежит  $D$ , но в любой окрестности ее лежат точки этой области (см. рис. 206). Совокупность граничных точек области  $D$  называется

ся **границей**  $D$ . Область  $D$  с присоединенной к ней границей называется **замкнутой** областью, обозначается  $\overline{D}$ . Область называется **ограниченной**, если все ее точки принадлежат некоторому кругу радиуса  $R$ . В противном случае область называется **неограниченной**. Примером неограниченной области может служить множество точек первого координатного угла, а примером ограниченной —  $\delta$ -окрестность точки  $M_0(x_0; y_0)$ .

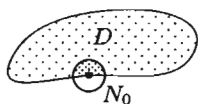


Рис. 206

**Теорема 43.1.** Если функция  $z = f(N)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области: а) ограничена, т. е. существует такое число  $R > 0$ , что для всех точек  $N$  в этой области выполняется неравенство  $|f(N)| < R$ ; б) имеет точки, в которых принимает наименьшее  $m$  и наибольшее  $M$  значения; в) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между  $m$  и  $M$ .

Теорема дается без доказательства.

## § 44. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 44.1. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование

Пусть задана функция  $z = f(x; y)$ . Так как  $x$  и  $y$  — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной  $x$  приращение  $\Delta x$ , сохраняя значение  $y$  неизменным. Тогда  $z$  получит приращение, которое называется **частным приращением**  $z$  по  $x$  и обозначается  $\Delta_x z$ . Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение  $z$  по  $y$ :

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение  $\Delta z$  функции  $z$  определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции  $z = f(x; y)$  в точке  $M(x; y)$  по переменной  $x$  и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по  $x$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$  обычно обозначают символами  $f'_x(x_0; y_0)$ ,  $f'_x|_{M_0}$ .

Аналогично определяется и обозначается частная производная от  $z = f(x; y)$  по переменной  $y$ :

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функций нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции  $f(x; y)$  находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно  $x$  или  $y$  считается постоянной величиной).

**Пример 44.1.** Найти частные производные функции

$$z = 2y + e^{x^2-y} + 1.$$

○ Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x = \\ &= 0 + e^{x^2-y} \cdot (x^2 - y)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y}; \\ z'_y &= 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1). \end{aligned}$$

### Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции  $z = f(x; y)$  является некоторая поверхность (см. п. 12.1). График функции  $z = f(x; y_0)$  есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью  $y = y_0$ . Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной (см. п. 20.2), заключаем, что  $f'_x(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между осью  $Ox$  и касательной, проведенной к кривой  $z = f(x; y_0)$  в точке  $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$  (см. рис. 207).

Аналогично,  $f'_y(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \beta$ .

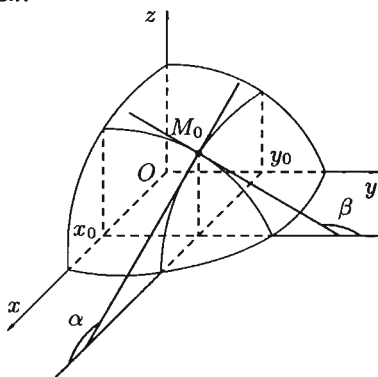


Рис. 207

## 44.2. Частные производные высших порядков

Частные производные  $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y}$  называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от  $(x; y) \in D$ . Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x; y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков. Так,  $z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2}$  (или  $(z'''_{xyx})'_x = z^{(4)}_{xyx^2}$ ) и т. д.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется **смешанной частной производной**. Таковыми являются, например,  $z''_{xy}$ ,  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ ,  $z'''_{xyx}$ .

**Пример 44.2.** Найти частные производные второго порядка функции  $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$ .

○ Решение: Так как  $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$  и  $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$ , то

$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, что  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

Этот результат не случаен. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

**Теорема 44.1 (Шварц).** Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для  $z = f(x; y)$  имеем:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

### 44.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция  $z = f(x; y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M(x; y)$ . Составим полное приращение функции в точке  $M$ :

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

☞ Функция  $z = f(x; y)$  называется **дифференцируемой** в точке  $M(x; y)$ , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (44.1)$$

где  $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$  и  $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ . Сумма первых двух слагаемых в равенстве (44.1) представляет собой **главную часть приращения функции**.

Главная часть приращения функции  $z = f(x; y)$ , линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается символом  $dz$ :

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y. \quad (44.2)$$

Выражения  $A \cdot \Delta x$  и  $B \cdot \Delta y$  называют **частными дифференциалами**. Для независимых переменных  $x$  и  $y$  полагают  $\Delta x = dx$  и  $\Delta y = dy$ . Поэтому равенство (44.2) можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy. \quad (44.3)$$

**Теорема 44.2 (необходимое условие дифференцируемости функции).** Если функция  $z = f(x; y)$  дифференцируема в точке  $M(x; y)$ , то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , причем  $\frac{\partial z}{\partial x} = A, \frac{\partial z}{\partial y} = B$ .

☐ Так как функция дифференцируема в точке  $M$ , то имеет место равенство (44.1). Отсюда вытекает, что  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ . Это означает, что функция непрерывна в точке  $M$ . Положив  $\Delta y = 0, \Delta x \neq 0$  в равенстве (44.1), получим:  $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ . Отсюда находим  $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$ . Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$ , т. е.  $\frac{\partial z}{\partial x} = A$ . Таким образом, в точке  $M$  существует частная производная  $f'_x(x; y) = A$ . Аналогично доказывается, что в точке  $M$  существует частная производная  $f'_y(x; y) = \frac{\partial z}{\partial y} = B$ . ■



Равенство (44.1) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \gamma, \quad (44.4)$$

где  $\gamma = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ .

Отметим, что обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Так, непрерывная функция  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  не дифференцируема в точке  $(0; 0)$ .

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (44.3) принимает вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (44.5)$$

или

$$dz = d_x z + d_y z,$$

где  $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ ,  $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$  — частные дифференциалы функции  $z = f(x; y)$ .

**Теорема 44.3 (достаточное условие дифференцируемости функции).** Если функция  $z = f(x; y)$  имеет непрерывные частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  в точке  $M(x; y)$ , то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (44.5).

Примем теорему без доказательства.



Отметим, что для функции  $y = f(x)$  одной переменной существование производной  $f'(x)$  в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция  $z = f(x; y)$  была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

## 44.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции  $z = f(x; y)$  следует, что при достаточно малых  $|\Delta x|$  и  $|\Delta y|$  имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz. \quad (44.6)$$

Так как полное приращение  $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ , равенство (44.6) можно переписать в следующем виде:

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y. \quad (44.7)$$

Формулой (44.7) пользуются в приближенных расчетах.

**Пример 44.3.** Вычислить приближенно  $1,02^{3,01}$ .

○ Решение: Рассмотрим функцию  $z = x^y$ . Тогда  $1,02^{3,01} = (x + \Delta x)^{y + \Delta y}$ , где  $x = 1$ ,  $\Delta x = 0,02$ ,  $y = 3$ ,  $\Delta y = 0,01$ . Воспользуемся формулой (44.7), предварительно найдя  $z'_x$  и  $z'_y$ :  $z'_x = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}$ ,  $z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$ . Следовательно,  $1,02^{3,01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0,02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0,01$ , т. е.  $1,02^{3,01} \approx 1,06$ .

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим:  
 $1,02^{3,01} \approx 1,061418168$ . ●

Отметим, что с помощью полного дифференциала можно найти: границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях; приближенное значение полного приращения функции и т. д.

## 44.5. Дифференциалы высших порядков

Введем понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал функции (формула (44.5)) называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция  $z = f(x; y)$  имеет непрерывные частные производные второго порядка. Дифференциал второго порядка определяется по формуле  $d^2 z = d(dz)$ . Найдем его:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_x \cdot dx + \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_y \cdot dy = \\ &= \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy \right) \cdot dx + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) \cdot dy. \end{aligned}$$

Отсюда:  $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$ . Символически это записывается так:

$$d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 \cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для *дифференциала третьего порядка*:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 \cdot z,$$

где

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} dy + 3 \frac{\partial}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные  $x$  и  $y$  функции  $z = f(x; y)$  являются независимыми.

**Пример 44.4.** (Для самостоятельного решения.) Найти  $d^2 z$ , если  $z = x^3 y^2$ .

Ответ:  $d^2 z = 6xy^2 dx^2 + 12x^2 y dx dy + 2x^3 dy^2$ .

## 44.6. Производная сложной функции. Полная производная

Пусть  $z = f(x; y)$  — функция двух переменных  $x$  и  $y$ , каждая из которых является функцией независимой переменной  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . В этом случае функция  $z = f(x(t); y(t))$  является сложной функцией одной независимой переменной  $t$ ; переменные  $x$  и  $y$  — *промежуточные переменные*.

**Теорема 44.4.** Если  $z = f(x; y)$  — дифференцируемая в точке  $M(x; y) \in D$  функция и  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  — дифференцируемые функции независимой переменной  $t$ , то производная сложной функции  $z(t) = f(x(t); y(t))$  вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (44.8)$$

□ Дадим независимой переменной  $t$  приращение  $\Delta t$ . Тогда функции  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  получают приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  соответственно. Они, в свою очередь, вызовут приращение  $\Delta z$  функции  $z$ .

Так как по условию функция  $z = f(x; y)$  дифференцируема в точке  $M(x; y)$ , то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  (см. п. 44.3). Разделим выражение  $\Delta z$  на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$  в силу непрерывности функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  (по условию теоремы — они дифференцируемые). Получаем:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

т. е.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

*Частный случай:*  $z = f(x; y)$ , где  $y = y(x)$ , т. е.  $z = f(x; y(x))$  — сложная функция одной независимой переменной  $x$ . Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной  $t$  играет  $x$ . Согласно формуле (44.8) имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}. \quad (44.9)$$

Формула (44.9) носит название *формулы полной производной*.

*Общий случай:*  $z = f(x; y)$ , где  $x = x(u; v)$ ,  $y = y(u; v)$ . Тогда  $z = f(x(u; v); y(u; v))$  — сложная функция независимых переменных  $u$  и  $v$ . Ее частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$  можно найти, используя формулу (44.8) следующим образом. Зафиксировав  $v$ , заменяем в ней  $\frac{dz}{dt}$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  соответствующими частными производными  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}$ :

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}}. \quad (44.10)$$

Аналогично получаем:  $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$ .

☞ Таким образом, производная сложной функции ( $z$ ) по каждой независимой переменной ( $u$  и  $v$ ) равна сумме произведений частных производных этой функции ( $z$ ) по ее промежуточным переменным ( $x$  и  $y$ ) на их производные по соответствующей независимой переменной ( $u$  и  $v$ ).

**Пример 44.5.** Найти  $\frac{\partial z}{\partial u}$  и  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , если  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x = u \cdot v$ ,  $y = \frac{u}{v}$ .

○ Решение: Найдем  $\frac{\partial z}{\partial u}$  ( $\frac{\partial z}{\partial v}$  — самостоятельно), используя формулу (44.10):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x \cdot v + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y \cdot \frac{1}{v}.$$

Упростим правую часть полученного равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{2}{x^2 + y^2} \left( x \cdot v + \frac{y}{v} \right) = \frac{2}{(uv)^2 + \left( \frac{u}{v} \right)^2} \cdot \left( uv \cdot v + \frac{u}{v \cdot v} \right) = \\ &= \frac{2v^2}{u^2(v^4 + 1)} \cdot \frac{u \cdot (v^4 + 1)}{v^2} = \frac{2}{u}, \end{aligned}$$

т. е.  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{u}.$

## 44.7. Инвариантность формы полного дифференциала

Используя правило дифференцирования сложной функции, можно показать, что полный дифференциал обладает *свойством инвариантности*: полный дифференциал функции  $z = f(x; y)$  сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.

□ Пусть  $z = f(x; y)$ , где  $x$  и  $y$  — независимые переменные. Тогда полный дифференциал (1-го порядка) функции имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

(формула (44.5)).

Рассмотрим сложную функцию  $z = f(x; y)$ , где  $x = x(u; v)$ ,  $y = y(u; v)$ , т. е. функцию  $z = f(x(u; v); y(u; v)) = F(u; v)$ , где  $u$  и  $v$  — независимые переменные. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv = \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right). \end{aligned}$$

Выражения в скобках представляют собой полные дифференциалы  $dx$  и  $dy$  функций  $x = x(u; v)$  и  $y = y(u; v)$ . Следовательно, и в этом случае,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy. \quad \blacksquare$$

## 44.8. Дифференцирование неявной функции

Функция  $z = f(x; y)$  называется *неявной*, если она задается уравнением

$$F(x; y; z) = 0, \quad (44.11)$$

неразрешенным относительно  $z$ . Найдем частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  неявной функции  $z$ , заданной уравнением (44.11). Для этого, подставив в уравнение вместо  $z$  функцию  $f(x; y)$ , получим тождество

$$F(x; y; f(x; y)) \equiv 0.$$

Частные производные по  $x$  и по  $y$  функции, тождественно равной нулю, также равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x; y; f(x; y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (y \text{ — считаем постоянным}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x; y; f(x; y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (x \text{ — считаем постоянным}),$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad (F'_z \neq 0). \quad (44.12)$$

*Замечания.*

а) Уравнение вида (44.11) не всегда определяет одну переменную как неявную функцию двух других. Так, уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$  определяет функции  $z_1 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  и  $z_2 = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , определенные в круге  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $z_3 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , определенную в полукруге  $x^2 + y^2 \leq 4$  при  $y \geq 0$  и т. д., а уравнение  $\cos(x + 2y + 3z) - 4 = 0$  не определяет никакой функции.

☉ Имеет место **теорема существования неявной функции** двух переменных: если функция  $F(x; y; z)$  и ее производные  $F'_x(x; y; z)$ ,  $F'_y(x; y; z)$ ,  $F'_z(x; y; z)$  определены и непрерывны в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , причем  $F(x_0; y_0; z_0) = 0$ , а  $F'_z(x_0; y_0; z_0) \neq 0$ , то существует окрестность точки  $M_0$ , в которой уравнение (44.11) определяет единственную функцию  $z = f(x; y)$ , непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки  $(x_0; y_0)$  и такую, что  $f(x_0; y_0) = z_0$ .

б) Неявная функция  $y = f(x)$  одной переменной задается уравнением  $F(x; y) = 0$ . Можно показать, что в случае, если удовлетворены условия существования неявной функции одной переменной (имеется теорема, аналогичная вышеуказанной), то производная неявной функции находится по формуле

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}} \quad (F'_y \neq 0).$$

**Пример 44.6.** Найти частные производные функции  $z$ , заданной уравнением  $e^z + z - x^2y + 1 = 0$ .

○ Решение: Здесь  $F(x; y; z) = e^z + z - x^2y + 1$ ,  $F'_x = -2xy$ ,  $F'_y = -x^2$ ,  $F'_z = e^z + 1$ . По формулам (44.12) имеем:  $\frac{\partial z}{\partial x} = +\frac{2xy}{e^z + 1}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}$ .

**Пример 44.7.** Найти  $\frac{dy}{dx}$ , если неявная функция  $y = f(x)$  задана уравнением  $y^3 + 2y = 2x$ .

○ Решение: Здесь  $F(x; y) = y^3 + 2y - 2x$ ,  $F'_x = -2$ ,  $F'_y = 3y^2 + 2$ . Следовательно,  $y'_x = -\frac{-2}{3y^2 + 2}$ , т. е.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3y^2 + 2}$ .

## § 45. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция  $z = f(x; y)$  дифференцируема в точке  $(x_0; y_0)$  некоторой области  $D \in \mathbb{R}^2$ . Рассечем

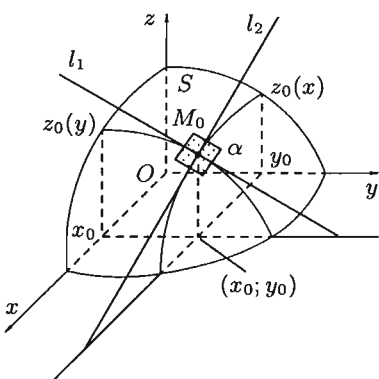


Рис. 208

поверхность  $S$ , изображающую функцию  $z$ , плоскостями  $x = x_0$  и  $y = y_0$  (см. рис. 208). Плоскость  $x = x_0$  пересекает поверхность  $S$  по некоторой линии  $z_0(y)$ , уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции  $z = f(x; y)$  вместо  $x$  числа  $x_0$ . Точка  $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$  принадлежит кривой  $z_0(y)$ . В силу дифференцируемости функции  $z$  в точке  $M_0$  функция  $z_0(y)$  также является дифференцируемой в точке  $y = y_0$ . Следовательно, в этой точке в плоскости  $x = x_0$  к кривой  $z_0(y)$  может быть проведена касательная  $l_1$ .

Проводя аналогичные рассуждения для сечения  $y = y_0$ , построим касательную  $l_2$  к кривой  $z_0(x)$  в точке  $x = x_0$ . Прямые  $l_1$  и  $l_2$  определяют плоскость  $\alpha$ , которая называется *касательной плоскостью* к поверхности  $S$  в точке  $M_0$ .

Составим ее уравнение. Так как плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , то ее уравнение может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

которое можно переписать так:

$$z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \quad (45.1)$$

(разделив уравнение на  $-C$  и обозначив  $\frac{A}{-C} = A_1$ ,  $\frac{B}{-C} = B_1$ ).

Найдем  $A_1$  и  $B_1$ .

Уравнения касательных  $l_1$  и  $l_2$  имеют вид

$$z - z_0 = f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0), \quad x = x_0;$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0), \quad y = y_0$$

соответственно.

Касательная  $l_1$  лежит в плоскости  $\alpha$ , следовательно, координаты всех точек  $l_1$  удовлетворяют уравнению (45.1). Этот факт можно записать в виде системы

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0). \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно  $B_1$ , получим, что  $B_1 = f'_y(x_0; y_0)$ .

Проводя аналогичные рассуждения для касательной  $l_2$ , легко установить, что  $A_1 = f'_x(x_0; y_0)$ .

Подставив значения  $A_1$  и  $B_1$  в уравнение (45.1), получаем искомое уравнение касательной плоскости:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).} \quad (45.2)$$

⇒ Прямая, проходящая через точку  $M_0$  и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее **нормалью**.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости (см. с. 103), легко получить канонические уравнения нормали:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.} \quad (45.3)$$

Если поверхность  $S$  задана уравнением  $F(x; y; z) = 0$ , то уравнения (45.2) и (45.3), с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции:

$$f'_x(x_0; y_0) = -\frac{F'_x(x_0; y_0)}{F'_z(x_0; y_0)}, \quad f'_y(x_0; y_0) = -\frac{F'_y(x_0; y_0)}{F'_z(x_0; y_0)}$$

(см. формулы (44.12)), примут соответственно вид

$$F'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0; y_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

и

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0)}.$$



**Замечание.** Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, т. е. не особых, точек поверхности. Точка  $M_0$  поверхности называется *особой*, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

**Пример 45.1.** Написать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения  $z = x^2 + y^2$  в точке  $M_0(1; -1; 2)$ .

○ Решение: Здесь  $z'_x = f'_x(x; y) = 2x$ ,  $f'_y(x; y) = 2y$ ,  $f'_x(1; -1) = 2$ ,  $f'_y(1; -1) = -2$ . Пользуясь формулами (45.2) и (45.3) получаем уравнение касательной плоскости:  $z - 2 = 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 1)$  или  $2x - 2y - z - 2 = 0$  и уравнение нормали:  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ . ●

## § 46. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 46.1. Основные понятия

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной (см. п. 25.4).

Пусть функция  $z = f(x; y)$  определена в некоторой области  $D$ , точка  $N(x_0; y_0) \in D$ .

☞ Точка  $(x_0; y_0)$  называется **точкой максимума** функции  $z = f(x; y)$ , если существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $(x_0; y_0)$ , что для каждой точки  $(x; y)$ , отличной от  $(x_0; y_0)$ , из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ .

☞ Аналогично определяется **точка минимума** функции: для всех точек  $(x; y)$ , отличных от  $(x_0; y_0)$ , из  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0; y_0)$  выполняется неравенство:  $f(x; y) > f(x_0; y_0)$ .

На рисунке 209:  $N_1$  — точка максимума, а  $N_2$  — точка минимума функции  $z = f(x; y)$ .

☞ Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции. Максимум и минимум функции называют ее **экстремумами**.

☼ Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют **локальный** (местный) характер: значение функции в точке

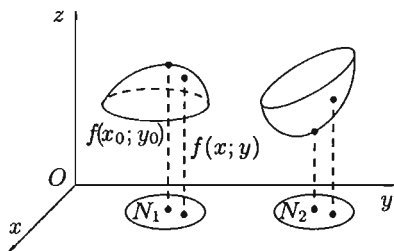


Рис. 209

$(x_0; y_0)$  сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к  $(x_0; y_0)$ . В области  $D$  функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

## 46.2. Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим условия существования экстремума функции.

**Теорема 46.1 (необходимые условия экстремума).** Если в точке  $N(x_0; y_0)$  дифференцируемая функция  $z = f(x; y)$  имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:  $f'_x(x_0; y_0) = 0$ ,  $f'_y(x_0; y_0) = 0$ .

□ Зафиксируем одну из переменных. Положим, например,  $y = y_0$ . Тогда получим функцию  $f(x; y_0) = \varphi(x)$  одной переменной, которая имеет экстремум при  $x = x_0$ . Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной (см. п. 25.4),  $\varphi'(x_0) = 0$ , т. е.  $f'_x(x_0; y_0) = 0$ .

Аналогично можно показать, что  $f'_y(x_0; y_0) = 0$ . ■

Геометрически равенства  $f'_x(x_0; y_0) = 0$  и  $f'_y(x_0; y_0) = 0$  означают, что в точке экстремума функции  $z = f(x; y)$  касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию  $f(x; y)$ , параллельна плоскости  $Oxy$ , т. к. уравнение касательной плоскости есть  $z = z_0$  (см. формулу (45.2)).

**Замечание.** Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  имеет максимум в точке  $O(0; 0)$  (см. рис. 210), но не имеет в этой точке частных производных.

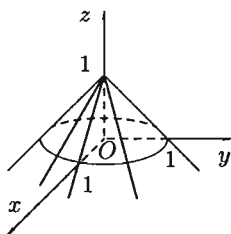


Рис. 210

⇒ Точка, в которой частные производные первого порядка функции  $z = f(x; y)$  равны нулю, т. е.  $f'_x = 0$ ,  $f'_y = 0$ , называется **стационарной точкой** функции  $z$ .

⇒ Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками**.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Рассмотрим, например, функцию  $z = xy$ . Для нее точка  $O(0; 0)$  является критической (в ней  $z'_x = y$  и  $z'_y = x$  обращаются в ноль). Однако

экстремума в ней функция  $z = xy$  не имеет, т. к. в достаточно малой окрестности точки  $O(0; 0)$  найдутся точки для которых  $z > 0$  (точки I и III четвертей) и  $z < 0$  (точки II и IV четвертей).

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

**Теорема 46.2 (достаточное условие экстремума).** Пусть в стационарной точке  $(x_0; y_0)$  и некоторой ее окрестности функция  $f(x; y)$  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке  $(x_0; y_0)$  значения  $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$ ,  $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$ ,  $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$ . Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

- 1) если  $\Delta > 0$ , то функция  $f(x; y)$  в точке  $(x_0; y_0)$  имеет экстремум: максимум, если  $A < 0$ ; минимум, если  $A > 0$ ;
  - 2) если  $\Delta < 0$ , то функция  $f(x; y)$  в точке  $(x_0; y_0)$  экстремума не имеет.
- В случае  $\Delta = 0$  экстремум в точке  $(x_0; y_0)$  может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примем без доказательства.

**Пример 46.1.** Найти экстремум функции  $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ .

○ Решение: Здесь  $z'_x = 6xy - 3x^2$ ,  $z'_y = 3x^2 - 4y^3$ . Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки  $M_1(6; 3)$  и  $M_2(0; 0)$ .

Находим частные производные второго порядка данной функции:  $z''_{xx} = 6y - 6x$ ,  $z''_{xy} = 6x$ ,  $z''_{yy} = -12y^2$ .

В точке  $M_1(6; 3)$  имеем:  $A = -18$ ,  $B = 36$ ,  $C = -108$ , отсюда

$$AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648,$$

т. е.  $\Delta > 0$ .

Так как  $A < 0$ , то в точке  $M_1$  функция имеет локальный максимум:  $z_{max} = z(6; 3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27$ .

В точке  $M_2(0; 0)$ :  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  и, значит,  $\Delta = 0$ . Проведем дополнительное исследование. Значение функции  $z$  в точке  $M_2$  равно нулю:  $z(0; 0) = 0$ . Можно заметить, что  $z = -y^4 < 0$  при  $x = 0$ ,  $y \neq 0$ ;  $z = -x^3 > 0$  при  $x < 0$ ,  $y = 0$ . Значит, в окрестности точки  $M_2(0; 0)$  функция  $z$  принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке  $M_2$  функция экстремума не имеет. ●

### 46.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция  $z = f(x; y)$  определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области  $\overline{D}$ . Тогда она достигает в некоторых точках  $\overline{D}$  своего наибольшего  $M$  и наименьшего  $m$  значений (т. н. *глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области  $\overline{D}$ , или в точках, лежащих на границе области.

*Правило нахождения* наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области  $\overline{D}$  функции  $z = f(x; y)$  состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие  $\overline{D}$ , и вычислить значения функции в них;
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x; y)$  на границах области;
3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее  $M$  и наименьшее  $m$ .

**Пример 46.2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2y + xy^2 + xy$  в замкнутой области, ограниченной линиями:  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = -1,5$  (см. рис. 211).

○ Решение: Здесь  $z'_x = 2xy + y^2 + y$ ,  $z'_y = x^2 + 2xy + x$ .

1. Находим все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

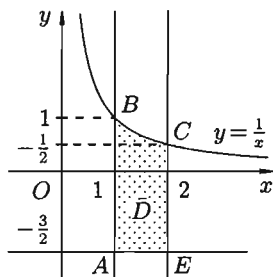


Рис. 211

Решением системы являются точки  $(0; 0)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ .

Ни одна из найденных точек не принадлежит области  $\overline{D}$ .

2. Исследуем функцию  $z$  на границе области, состоящей из участков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CE$  и  $EA$  (рис. 211).

На участке  $AB$ :  $x = 1$ ,  $z = y^2 + 2y$ , где  $y \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$ ,  $z'_y = 2y + 2$ ,  $2y + 2 = 0$ ,  $y = -1$ . Значения функции  $z(-1) = -1$ ,  $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ ,  $z(1) = 3$ .

На участке  $BC$ :  $y = \frac{1}{x}$ ,  $z = x + \frac{1}{x} + 1$ , где  $x \in [1; 2]$ ,  $z'_x = 1 - \frac{1}{x^2}$ ,  $1 - \frac{1}{x^2} = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1 \notin [1; 2]$ . Значения функции  $z(1) = 3$ ,  $z(2) = 3,5$ .

На участке  $CE$ :  $x = 2$ ,  $z = 2y^2 + 6y$ ,  $y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ,  $z'_y = 4y + 6$ ,  $4y + 6 = 0$ ,  $y = -\frac{3}{2}$ : Значения функции  $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -4,5$ ,  $z\left(\frac{1}{2}\right) = 3,5$ .

На участке  $AE$ :  $y = -\frac{3}{2}$ ,  $z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}x$ ,  $x \in [1; 2]$ ,  $z'_x = -3x + \frac{3}{4}$ ,  $-3x + \frac{3}{4} = 0$ ,  $x = \frac{1}{4} \notin [1; 2]$ . Значения функции  $z(1) = -\frac{3}{4}$ ,  $z(2) = -4,5$ .

3. Сравнивая полученные результаты, имеем:

$$M = +3,5 = z\left(2; \frac{1}{2}\right) = z(C);$$

$$\text{а } m = -4,5 = z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = z(E).$$

