

### § 27. ПОНЯТИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

#### 27.1. Основные понятия

☞ **Комплексным числом**  $z$  называется выражение вида  $z = x + iy$ , где  $x$  и  $y$  — действительные числа, а  $i$  — так называемая **мнимая единица**,  $i^2 = -1$ .

☞ Если  $x = 0$ , то число  $0 + iy = iy$  называется **чисто мнимым**; если  $y = 0$ , то число  $x + i0 = x$  отождествляется с действительным числом  $x$ , а это означает, что множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел является подмножеством множества  $\mathbb{C}$  всех комплексных чисел, т. е.  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

☞ Число  $x$  называется **действительной частью** комплексного числа  $z$  и обозначается  $x = \operatorname{Re} z$ , а  $y$  — **мнимой частью**  $z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ .

☞ Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называются **равными** ( $z_1 = z_2$ ) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части:  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . В частности, комплексное число  $z = x + iy$  равно нулю тогда и только тогда, когда  $x = y = 0$ . Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

☞ Два комплексных числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$ , отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются **сопряженными**.

#### 27.2. Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число  $z = x + iy$  можно изобразить точкой  $M(x; y)$  плоскости  $Oxy$  такой, что  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . И, наоборот, каждую точку  $M(x; y)$  координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа  $z = x + iy$  (см. рис. 161).

☞ Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**. Ось абсцисс называется **действительной осью**, так как на ней лежат действительные числа  $z = x + 0i = x$ . Ось ординат называется **мнимой осью**, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа  $z = 0 + iy$ .

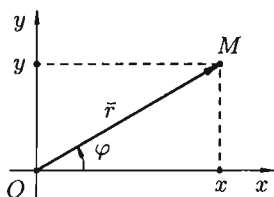


Рис. 161

☞ Комплексное число  $z = x + iy$  можно задавать с помощью радиус-вектора  $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$ . Длина вектора  $\bar{r}$ , изображающего комплексное число  $z$ , называется **модулем** этого числа и обозначается  $|z|$  или  $r$ . Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором  $\bar{r}$ , изображающим комплексное число, называется **аргументом** этого комплексного числа, обозначается  $\text{Arg } z$  или  $\varphi$ .

☞ Аргумент комплексного числа  $z = 0$  не определен. Аргумент комплексного числа  $z \neq 0$  — величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого  $2\pi k$  ( $k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$ ):  $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$ , где  $\arg z$  — **главное значение аргумента**, заключенное в промежутке  $(-\pi; \pi]$ , т. е.  $-\pi < \arg z \leq \pi$  (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку  $[0; 2\pi)$ ).

## 27.3. Формы записи комплексных чисел

☞ Запись числа  $z$  в виде  $z = x + iy$  называют **алгебраической формой** комплексного числа.

☞ Модуль  $r$  и аргумент  $\varphi$  комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора  $\bar{r} = \overline{OM}$ , изображающего комплексное число  $z = x + iy$  (см. рис. 161). Тогда получаем  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Следовательно, комплексное число  $z = x + iy$  можно записать в виде  $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$  или

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Такая запись комплексного числа называется **тригонометрической формой**.

Модуль  $r = |z|$  однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Например,  $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ . Аргумент  $\varphi$  определяется из формул

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как

$$\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2k\pi,$$

то

$$\cos \varphi = \cos(\arg z + 2k\pi) = \cos(\arg z), \quad \sin \varphi = \sin(\arg z).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа  $z$ , т. е. считать  $\varphi = \arg z$ .



Так как  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , то из формулы  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$  получаем, что

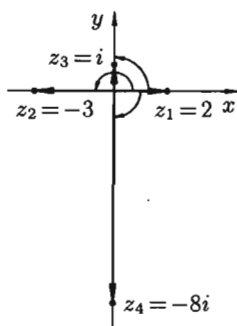


Рис. 162

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для внутренних точек} \\ & \text{I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек} \\ & \text{II четверти,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек} \\ & \text{III четверти.} \end{cases}$$

Если точка  $z$  лежит на действительной или мнимой оси, то  $\arg z$  можно найти непосредственно (см. рис. 162). Например,  $\arg z_1 = 0$  для  $z_1 = 2$ ;  $\arg z_2 = \pi$  для  $z_2 = -3$ ;  $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$  для  $z_3 = i$ ; и  $\arg z_4 = -\frac{\pi}{2}$  для  $z_4 = -8i$ .

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$



комплексное число  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  можно записать в так называемой **показательной** (или **экспоненциальной**) **форме**  $z = re^{i\varphi}$ , где  $r = |z|$  — модуль комплексного числа, а угол  $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$  ( $k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$ ).

В силу формулы Эйлера, функция  $e^{i\varphi}$  периодическая с основным периодом  $2\pi$ . Для записи комплексного числа  $z$  в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т. е. считать  $\varphi = \arg z$ .

**Пример 27.1.** Записать комплексные числа  $z_1 = -1 + i$  и  $z_2 = -1$  в тригонометрической и показательной формах.

Решение: Для  $z_1$  имеем

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

т. е.  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Для  $z_2$  имеем

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$$

т. е.  $\varphi = \pi$ . Поэтому  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}$ .

## § 28. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

### 28.1. Сложение комплексных чисел

⇒ **Суммой** двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (28.1)$$

🎯 Сложение комплексных чисел обладает **переместительным** (коммутативным) и **сочетательным** (ассоциативным) свойствами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Из определения (28.1) следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы (см. рис. 163).

Непосредственно из рисунка видно, что  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ . Это соотношение называется **неравенством треугольника**.

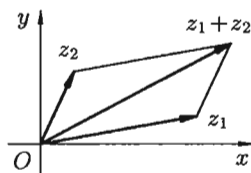


Рис. 163

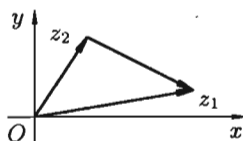


Рис. 164

### 28.2. Вычитание комплексных чисел

⇒ Вычитание определяется как действие, обратное сложению. **Разностью** двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  называется такое комплексное число  $z$ , которое, будучи сложеным с  $z_2$ , дает число  $z_1$ , т. е.  $z = z_1 - z_2$ , если  $z + z_2 = z_1$ .

Если  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , то из этого определения легко получить  $z$ :

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (28.2)$$

Из равенства (28.2) следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (см. рис. 164).

Непосредственно из рисунка видно, что  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ . Отметим, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

🎯 т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию  $d$  между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Поэтому, например, равенство  $|z - 2i| = 1$  определяет на комплексной плоскости множество точек  $z$ , находящихся на расстоянии 1 от точки  $z_0 = 2i$ , т. е. окружность с центром в  $z_0 = 2i$  и радиусом 1.

### 28.3. Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (28.3)$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2 = -1. \quad (28.4)$$

Действительно,  $i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$ . Благодаря соотношению (28.4) формула (28.3) получается формально путем перемножения двучленов  $x_1 + iy_1$  и  $x_2 + iy_2$ :

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 = \\ &= x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Например,

$$(2 - 3i)(-5 + 4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$$

Заметим, что  $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$  — действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_2 z_1, \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3), \\ z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3. \end{aligned}$$

В этом легко убедиться, используя определение (28.3).

Найдем произведение комплексных чисел  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , заданных в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

т. е.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Мы показали, что **при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются**.

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть  $n$  множителей и все они одинаковые, то

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (28.5)$$

Формула (28.5) называется **формулой Муавра**.

**Пример 28.1.** Найти  $(1 + \sqrt{3}i)^9$ .

○ Решение: Запишем сначала число  $z = 1 + \sqrt{3}i$  в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

По формуле Муавра имеем

$$z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left( \cos 9\frac{\pi}{3} + i \sin 9\frac{\pi}{3} \right) = \\ = 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 2^9 (-1) = -512. \quad \bullet$$

## 28.4. Деление комплексных чисел

⇒ Деление определяется как действие, обратное умножению. **Частным двух комплексных чисел**  $z_1$  и  $z_2 \neq 0$  называется комплексное число  $z$ , которое, будучи умноженным на  $z_2$ , дает число  $z_1$ , т. е.  $\frac{z_1}{z_2} = z$ , если  $z_2 z = z_1$ .

Если положить  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ ,  $z = x + iy$ , то из равенства  $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$  следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения  $x$  и  $y$ :

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$


На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

**Пример 28.2.** Выполнить деление  $\frac{1+3i}{2+i}$ .

○ Решение:  $\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$  ●


Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

 При делении комплексных чисел их модули, соответственно, делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

## 28.5. Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня  $n$ -й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

 **Корнем  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$**  называется комплексное число  $\omega$ , удовлетворяющее равенству  $\omega^n = z$ , т. е.  $\sqrt[n]{z} = \omega$ , если  $\omega^n = z$ .

Если положить  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , а  $\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда имеем  $\rho^n = r$ ,  $n\theta = \varphi + 2\pi k$ ,  $k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$ . То есть  $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$  и  $\rho = \sqrt[n]{r}$  (арифметический корень).

Поэтому равенство  $\sqrt[n]{z} = \omega$  принимает вид

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Получим  $n$  различных значений корня. При других значениях  $k$ , в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при  $k = n$  имеем

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi n}{n} \right) = \\ &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) = \omega_0 \\ &\quad (k = 0). \end{aligned}$$

Итак, для любого  $z \neq 0$  корень  $n$ -й степени из числа  $z$  имеет ровно  $n$  различных значений.

**Пример 28.3.** Найти значения а)  $\sqrt[3]{i} = \omega$ ; б)  $\sqrt{-1} = \omega$ .

○ Решение: а) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:  $i = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ . Стало быть,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right),$$
$$k = 0, 1, 2.$$

При  $k = 0$  имеем

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

при  $k = 1$  имеем

$$\omega_1 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

при  $k = 2$  имеем

$$\omega_2 = \cos \frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

б) Снова запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi.$$

Поэтому

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1.$$

При  $k = 0$  получаем  $\omega_0 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ , а при  $k = 1$  получаем  $\omega_1 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$ . Таким образом,  $\sqrt{-1} = i$  и  $\sqrt{-1} = -i$ . ●