Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Лекции 13–22

§ 13. МНОЖЕСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

13.1. Основные понятия

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{1, 3, 15\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись $A = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \implies \beta$ — означает «из предложения α *следует* предложение β»;

$\alpha \iff \beta$ — «предложения α и β равносильны», т. е. из α следует β и из β следует α;

$\forall$ — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ — «существует», «найдется»;

$:$ — «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ — «соответствие».

Например: 1) запись $\forall x \in A : \alpha$ означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α»;

2) $(x \in A \cup B) \iff (x \in A \quad \text{или} \quad x \in B)$; эта запись определяет объединение множеств A и B.

13.2. Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ — множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множество $\mathbb{R}$ содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0{,}5$ $(= 0{,}500\ldots)$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ — рациональные числа.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Теорема 13.1. Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.

❑ Допустим, что существует рациональное число, представленное несократимой дробью $\frac{m}{n}$, квадрат которого равен 2. Тогда имеем:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad \text{т. е. } m^2 = 2n^2.$$

Отсюда следует, что m^2 (а значит, и m) — четное число, т. е. $m = 2k$. Подставив $m = 2k$ в равенство $m^2 = 2n^2$, получим $4k^2 = 2n^2$, т. е. $2k^2 = n^2$. Отсюда следует, что число n — четное, т. е. $n = 2l$. Но тогда дробь $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$ сократима. Это противоречит допущению, что $\frac{m}{n}$ дробь несократима. Следовательно, не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2. ■

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью. Так, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ — иррациональные числа. Можно сказать: множество действительных чисел есть множество всех бесконечных десятичных дробей. И записать

$$\mathbb{R} = \{x: \ x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\}, \quad \text{где } a \in \mathbb{Z},\ \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел обладает следующими свойствами.

1. Оно *упорядоченное*: для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений $a < b$ либо $b < a$.

2. Множество $\mathbb{R}$ *плотное*: между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел x, т. е. чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$.

Так, если $a < b$, то одним из них является число $\frac{a+b}{2}$

$$\left(a<b \Longrightarrow 2a<a+b \quad \text{и} \quad a+b<2b \Longrightarrow 2a<a+b<2b \Longrightarrow a<\frac{a+b}{2}<b\right).$$

3. Множество $\mathbb{R}$ *непрерывное*. Пусть множество $\mathbb{R}$ разбито на два непустых класса A и B таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$. Тогда (свойство непрерывности) существует единственное число c, удовлетворяющее неравенству $a \leqslant c \leqslant b$ ($\forall a \in A$, $\forall b \in B$). Оно отделяет числа класса A от чисел класса B. Число c является либо наибольшим числом в классе A (тогда в классе B нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе B (тогда в классе A нет наибольшего).

Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует определенная (единственная) точка числовой оси и, наоборот, каждой точке оси соответствует определенное (единственное) действительное число. Поэтому вместо слова «число» часто говорят «точка».

13.3. Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x: \ a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x: \ a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x: \ a \leqslant x < b\}$;

$(a; b] = \{x: \ a < x \leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x: \ x \leqslant b\}$; $\qquad [a, +\infty) = \{x: \ x \geqslant a\}$;

$(-\infty; b) = \{x: \ x < b\}$; $\qquad (a, +\infty) = \{x: \ x > a\}$;

$(-\infty, \infty) = \{x: \ -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ — бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от начала 0 влево и вправо.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ***ε-окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε — *радиусом*.

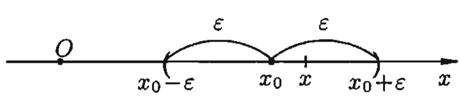

Рис. 97

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (см. рис. 97).