неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Коротко:

$$\boxed{\begin{aligned}\Big(\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x:\ |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \implies |f(x)| > M\Big) \iff \\ \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.\end{aligned}}$$

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется ***бесконечно большой при*** $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $N = N(M) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Коротко:

$$\Big(\forall M > 0\ \ \exists N > 0\ \ \forall x:\ \ |x| > N \implies |f(x)| > M\Big) \iff \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Например, $y = 2^x$ есть б.б.ф. при $x \to \infty$.

Отметим, что если аргумент x, стремясь к бесконечности, принимает лишь натуральные значения, т. е. $x \in \mathbb{N}$, то соответствующая б.б.ф. становится бесконечно большой последовательностью. Например, последовательность $v_n = n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является бесконечно большой последовательностью. Очевидно, *всякая б.б.ф. в окрестности* точки x_0 *является неограниченной* в этой окрестности. Обратное утверждение неверно: неограниченная функция может и не быть б.б.ф. (Например, $y = x \sin x$.)

Однако, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *где A — конечное число, то функция* $f(x)$ *ограничена* в окрестности точки x_0.

Действительно, из определения предела функции следует, что при $x \to x_0$ выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, а это и означает, что функция $f(x)$ ограничена.

§ 17. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ (Б.М.Ф.)

17.1. Определения и основные теоремы

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.} \qquad (17.1)$$

По определению предела функции равенство (17.1) означает: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и т. д.

Примерами б.м.ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Другой пример: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, — бесконечно малая последовательность.

> **Теорема 17.1.** Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

❑ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две б.м. функции при $x \to x_0$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, т. е. для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17.2}$$

и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, т. е.

$$\left(\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \ \exists \delta_2 > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_2\right) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17.3}$$

Пусть δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.2) и (17.3). Следовательно, имеет место соотношение

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$, т. е. $\alpha(x) + \beta(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$. ■

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б.м. функций.

> **Теорема 17.2.** Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

❑ Пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$. Тогда существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \tag{17.4}$$

для всех x из δ_1-окрестности точки x_0. И пусть $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$. Тогда для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{17.5}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.4) и (17.5). Следовательно, $|f(x) \cdot \alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. А это означает, что произведение $f(x) \cdot \alpha(x)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая функция. ■

Следствие 17.1. Так как всякая б.м.ф. ограничена, то из теоремы (17.2) вытекает: произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая.

Следствие 17.2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 17.3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

❑ Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, а $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$. Функция $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде произведения б.м.ф. $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $\frac{1}{f(x)}$. Но тогда из теоремы (17.2) вытекает, что частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ есть функция бесконечно малая.

Покажем, что функция $\frac{1}{f(x)}$ ограниченная. Возьмем $\varepsilon < |a|$. Тогда, на основании определения предела, найдется $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. А так как $\varepsilon > |f(x) - a| = |a - f(x)| \geqslant |a| - |f(x)|$, то $|a| - |f(x)| < \varepsilon$, т. е. $|f(x)| > |a| - \varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|a| - \varepsilon} = M,$$

т. е. функция $\dfrac{1}{f(x)}$ — ограниченная. ■

> **Теорема 17.4.** Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha \neq 0$), то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ — бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая.

❑ Пусть $\alpha(x)$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon,$$

т. е. $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > M$, где $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. А это означает, что функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая. Аналогично доказывается обратное утверждение. ■

Замечание: Доказательства теорем приводились для случая, когда $x \to x_0$, но они справедливы и для случая, когда $x \to \infty$.

Пример 17.1. Показать, что функция

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x-1}$$

при $x \to 1$ является бесконечно малой.

○ Решение: Так как $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$, то функция $\varphi(x) = (x-1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 1$. Функция $g(x) = \sin^3 \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, ограничена $\left|\sin^3 \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant 1$.

Функция $f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^3 \dfrac{1}{x-1}$ представляет собой произведение ограниченной функции ($g(x)$) на бесконечно малую ($\varphi(x)$). Значит, $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to 1$. ●

17.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема 17.5. Если функция $f(x)$ имеет предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

❑ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Следовательно,

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall x: \;\; 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

т. е. $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(x) - A$ имеет предел, равный нулю, т. е. является б.м.ф., которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x) - A = \alpha(x)$. Отсюда $f(x) = A + \alpha(x)$. ■

Теорема 17.6 (обратная). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число A является пределом функции $f(x)$, т. е. если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

❑ Пусть $f(x) = A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall x: \;\; 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

А так как по условию $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha(x) = f(x) - A$. Получаем

$$\Big(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall x: \;\; 0 < |x - x_0| < \delta\Big) \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

Пример 17.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(5 + x) = 7$.

❍ Решение: Функцию $5 + x$ можно представить в виде суммы числа 7 и б.м.ф. $x - 2$ (при $x \to 2$), т. е. выполнено равенство $5 + x = 7 + (x - 2)$. Следовательно, по теореме 17.6 получаем $\lim\limits_{x\to 2}(5 + x) = 7$. ●

17.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда $x \to x_0$ и $x \to \infty$, аналогичны. В приводимых теоремах будем считать, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ существуют.

Теорема 17.7. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$

❑ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$. Тогда по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$. Здесь $\alpha(x) + \beta(x)$ — б.м.ф. как сумма б.м.ф. По теореме 17.6 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+\varphi(x)) = A+B$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} \varphi(x). \qquad \blacksquare$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Следствие 17.3. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

❑ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$. По теореме 17.7 имеем:

$$0 = \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = A - B.$$

Отсюда $A - B = 0$, т. е. $A = B$. ■

Теорема 17.8. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$

❑ Доказательство аналогично предыдущему, проведем его без особых пояснений. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$, то

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф. Следовательно,

$$f(x)\cdot\varphi(x) = (A + \alpha(x))\cdot(B + \beta(x)),$$

т. е.

$$f(x)\cdot\varphi(x) = AB + (A\cdot\beta(x) + B\cdot\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)).$$

Выражение в скобках есть б.м.ф. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = A\cdot B,$$

т. е.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$ ■

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Следствие 17.4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

❑ $\lim\limits_{x\to x_0} (c\cdot f(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ■

Следствие 17.5. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n\in\mathbb{N}$.

❑ $$\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = \lim_{x\to x_0} \underbrace{(f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x))}_{n \text{ сомножителей}} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\ldots\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$ ■

Теорема 17.9. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0\right).$$

❑ Доказательство аналогично предыдущему. Из равенств

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B \neq 0$$

следуют соотношения $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right) = \frac{A}{B} + \frac{B\cdot\alpha(x) - A\cdot\beta(x)}{B^2 + B\cdot\beta(x)}.$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$. ■

Рассмотрим *пример*.

Пример 17.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7)$.

○ Решение:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 7 =$$

$$= 3\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 1} x + 7 = 3\cdot 1 - 2 + 7 = 8. \quad \bullet$$

Пример 17.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

○ Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x \to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x - 2 \neq 0$ ($x \to 2$, но $x \neq 2$):

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} = -9. \quad \bullet$$

Пример 17.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5}$.

○ Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{1}{2}.$$

Функция $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2;\quad \lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=4.$$ ●

17.4. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y=\sin x$ при $x\to\infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема 17.10 (о пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=A, \tag{17.6}$$

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x), \tag{17.7}$$

то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

❑ Из равенств (17.6) вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки x_0, в одной из которых выполняется неравенство $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon<\varphi(x)-A<\varepsilon, \tag{17.8}$$

а в другой $|g(x)-A|<\varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon<g(x)-A<\varepsilon. \tag{17.9}$$

Пусть δ — меньшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда в δ-окрестности точки x_0 выполняются оба неравенства (17.8) и (17.9).

Из неравенств (17.7) находим, что

$$\varphi(x)-A\leqslant f(x)-A\leqslant g(x)-A. \tag{17.10}$$

С учетом неравенств (17.8) и (17.9) из неравенства (17.10) следуют неравенства $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Мы доказали, что

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \ \ \forall x: \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

Теорему 17.10 иногда шутливо называют «принципом двух милиционеров». Роль «милиционеров» играют функции $\varphi(x)$ и $g(x)$, функция $f(x)$ «следует за милиционерами».

Теорема 17.11 (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Следствие 17.6. Ограниченная монотонная последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел.

17.5. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,} \qquad (17.11)$$

называемый ***первым замечательным пределом***. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство (17.11).

□ Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x (см. рис. 113). Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга MB численно равна центральному углу x, $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, имеем $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

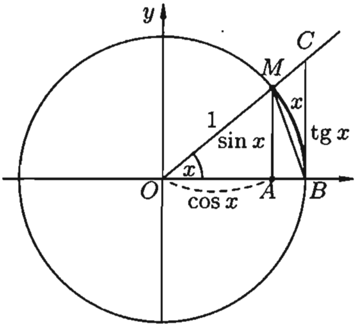

Рис. 113

Так как $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (17.12)$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (17.13)$$

Из равенств (17.12) и (17.13) вытекает равенство (17.11). ■

Пример 17.6. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$.

○ Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}. \quad \bullet$$

Пример 17.7. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

○ Решение: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} \cos x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$ ●

17.6. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e (см. (15.6)):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (17.14)$$

Докажем, что к числу e стремится и функция $x_n = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ $(x \in \mathbb{R})$:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \qquad (17.15)$$

1. Пусть $x \to +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leqslant x < n+1$, где $n = [x]$ — это целая часть x. Отсюда следует $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{n}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Поэтому, согласно (17.14), имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{17.16}$$

2. Пусть $x \to -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^1 = e\cdot 1 = e. \tag{17.17}$$

Из равенств (17.16) и (17.17) вытекает равенство (17.15).

Если в равенстве (17.15) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \to 0$ при $x \to \infty$), оно запишется в виде

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.} \tag{17.18}$$

Равенства (17.15) и (17.18) называются ***вторым замечательным пределом***. Они широко используются при вычислении пределов. В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e. Функция $y = e^x$ называется ***экспоненциальной***, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

Пример 17.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\cdot e = e^2.$$

§ 18. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

18.1. Сравнение бесконечно малых функций

Как известно, сумма, разность и произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая. Отношение же двух б.м.ф. может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ $(A \in \mathbb{R})$, то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка.*
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем β.
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем β.
4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются *несравнимыми бесконечно малыми.*

Отметим, что таковы же правила сравнения б.м.ф. при $x \to \pm\infty$, $x \to x_0 \pm 0$.

Пример 18.1. Сравнить порядок функций $\alpha = 3x^2$ и $\beta = 14x^2$ при $x \to \infty$.

◯ Решение: При $x \to 0$ это б.м.ф. одного порядка, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{14x^2} = \frac{3}{14} \neq 0.$$

Говорят, что б.м.ф. α и β одного порядка стремятся к нулю с примерно одинаковой скоростью. ●

Пример 18.2. Являются ли функции $\alpha = 3x^4$ и $\beta = 7x$ б.м.ф. одного порядка при $x \to 0$?

○ Решение: При $x \to 0$ функция α есть б.м.ф. более высокого порядка, чем β, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^4}{7x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^3}{7} = 0$. В этом случае б.м.ф. α стремится к нулю быстрее, чем β. ●

Пример 18.3. Сравнить порядок функций $\alpha = \operatorname{tg} x$ и $\beta = x^2$ при $x \to 0$.

○ Решение: Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \infty,$$

то α есть б.м.ф. более низкого порядка, чем β. ●

Пример 18.4. Можно ли сравнить функции $\alpha = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \to 0$?

○ Решение: Функции $\alpha = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \to 0$ являются несравнимыми б.м.ф., так как предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не существует. ●

18.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x \to x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Теорема 18.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

□ Пусть $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta'}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'},$$

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

Очевидно также, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta'}$. ■

Теорема 18.2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

❑ Пусть $\alpha\sim\beta$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=1-1=0,$$

аналогично $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=0$. ■

Справедливо и обратное утверждение: если разность б.м.ф. α и β есть бесконечно малая высшего порядка, чем α или β, то α и β — эквивалентные бесконечно малые.

Действительно, так как $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=0$, т. е. $1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, т. е. $\alpha\sim\beta$. Аналогично, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=0$, то $\alpha\sim\beta$.

Теорема 18.3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

❑ Докажем теорему для двух функций. Пусть $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ при $x\to x_0$, причем α — б.м.ф. высшего порядка, чем β, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}+1=0+1=1.$$

Следовательно, $\alpha+\beta\sim\beta$ при $x\to x_0$. ■

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется *главной частью этой суммы*.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется *отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка*.

Пример 18.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x}$.

❍ Решение: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$, поскольку $3x+7x^2 \sim 3x$ и $\sin 2x \sim 2x$ при $x \to 0$. ●

18.3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Вычисление пределов

Для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ часто бывают полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Как известно, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$. Приведем еще примеры эквивалентных б.м.ф.

Пример 18.6. Покажем, что $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

❍ Решение: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\(\frac{x}{2}\to0)}}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1\cdot1 = 1.$ ●

Пример 18.7. Найдем $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

❍ Решение: Обозначим $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$ и $t \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$. ●

Пример 18.8. Покажем, что $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$.

❍ Решение: Так как

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\frac{x}{2}\cdot(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1,$$

то $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$. ●

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;	6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;	8. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;	10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$; в частности, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

Пример 18.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

❍ Решение: Так как $\operatorname{tg} 2x \sim 2x, \sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$ ●

Пример 18.10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$.

❍ Решение: Обозначим $\frac{1}{x} = t$, из $x \to \infty$ следует $t \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$ ●

Пример 18.11. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$.

❍ Решение: Так как $\arcsin(x-1) \sim (x-1)$ при $x \to 1$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}.$$ ●

Приближенные вычисления

Если $\alpha \sim \beta$, то, отбрасывая в равенстве $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ бесконечно малую более высокого порядка, т. е. $\alpha - \beta$, получим приближенное равенство $\alpha \approx \beta$.

Оно позволяет выражать одни бесконечно малые через другие. Приведенные выше важнейшие эквивалентности служат источником ряда приближенных формул.

Приведенные формулы справедливы при малых x, и они тем точнее, чем меньше x.

Например, графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ в окрестности точки 0 практически не различимы (см. рис. 114), а кривая $y = \sin x$ в окрестности точки 0

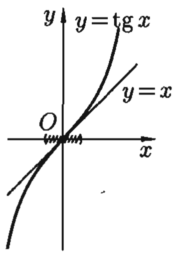

Рис. 114. $\operatorname{tg} x \approx x$ $(x \to 0)$