Сформулируем правило запоминания формулы (22.1): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \text{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \text{const}$.

Пример 22.2. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

❍ Решение: Пользуясь формулой (22.1), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2 + 1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2. \qquad \bullet$$

Отметим, что запоминать формулу (22.1) необязательно, легче запомнить суть логарифмического дифференцирования.

§ 23. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

23.1. Производные высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка.*

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' $\left(\text{или } f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \frac{dy'}{dx}\right)$. Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' $\left(\text{или } f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right)$. Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.}$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков.*

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ — производная пятого порядка).

Пример 23.1. Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.

◑ Решение:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

. . . .

$$y^{(13)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 13\right).$$

●

23.2. Механический смысл производной второго порядка

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Как уже известно, производная S'_t равна скорости точки в данный момент времени: $S'_t = V$.

Покажем, что *вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки*, т. е. $S''_t = a$.

Пусть в момент времени t скорость точки равна V, а в момент $t + \Delta t$ — скорость равна $V + \Delta V$, т. е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину ΔV.

Отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется ускорением точки M в данный момент t и обозначается буквой a: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a$, т. е. $V' = a$.

Но $V = S'_t$. Поэтому $a = (S'_t)'$, т. е. $a = S''_t$

23.3. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и

y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример 23.2. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

○ Решение: Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ по x: $2x + 2y \cdot y' = 0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Далее имеем: $y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2}$, т. е. $y'' = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$ (так как $x^2 + y^2 = 1$), следовательно, $y''' = -\frac{-1 \cdot 3y^2 \cdot y'}{y^6} = \frac{3}{y^4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}$. ●

23.4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{23.1}$$

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически.

Из определения второй производной и равенства (23.1) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

т. е.

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.} \tag{23.2}$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \quad \ldots$$

Пример 23.3. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

○ Решение: По формуле (23.1)

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Тогда по формуле (23.2)

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$ ●

Заметим, что найти y''_{xx} можно по преобразованной формуле (23.2):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

запоминать которую вряд ли стоит.

§ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

24.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{24.1}$$

Дифференциал dy называют также ***дифференциалом первого порядка***. Найдем дифференциал независимой переменной x, т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле (24.1), имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (24.1) можно записать так:

$$\boxed{dy = f'(x)dx,} \tag{24.2}$$