

○ Решение: Используем формулу (24.6): так как

$$y' = 2x, \quad y'' = 2, \quad dx = 3t^2 dt, \quad d^2x = 6t dt^2,$$

то

$$\begin{aligned} d^2y &= 2dx^2 + 2x \cdot 6t dt^2 = 2(3t^2 dt)^2 + 2(t^3 + 1)6t dt^2 = \\ &= 18t^4 dt^2 + 12t^4 dt^2 + 12t dt^2 = (30t^4 + 12t) dt^2. \end{aligned}$$

Другое решение:  $y = x^2$ ,  $x = t^3 + 1$ . Следовательно,  $y = (t^3 + 1)^2$ . Тогда по формуле (24.5)

$$d^2y = y'' \cdot dt^2,$$

т. е.

$$d^2y = (30t^4 + 12t) dt^2.$$

## § 25. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

### 25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

**Теорема 25.1 (Ролль).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , дифференцируема на интервале  $(a; b)$  и на концах отрезка принимает одинаковые значения  $f(a) = f(b)$ , то найдется хотя бы одна точка  $c \in (a; b)$ , в которой производная  $f'(x)$  обращается в нуль, т. е.  $f'(c) = 0$ .

□ Так как функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, соответственно,  $M$  и  $m$ . Если  $M = m$ , то функция  $f(x)$  постоянна на  $[a; b]$  и, следовательно, ее производная  $f'(x) = 0$  в любой точке отрезка  $[a; b]$ .

Если  $M \neq m$ , то функция достигает хотя бы одно из значений  $M$  или  $m$  во внутренней точке  $c$  интервала  $(a; b)$ , так как  $f(a) = f(b)$ .

Пусть, например, функция принимает значение  $M$  в точке  $x = c \in (a; b)$ , т. е.  $f(c) = M$ . Тогда для всех  $x \in (a; b)$  выполняется соотношение

$$f(c) \geq f(x). \quad (25.1)$$

Найдем производную  $f'(x)$  в точке  $x = c$ :

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

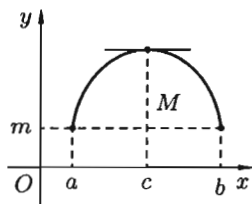


Рис. 139

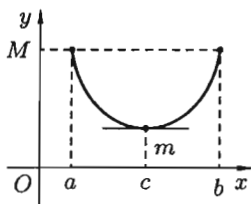


Рис. 140

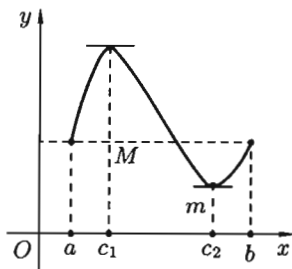


Рис. 141

В силу условия (25.1) верно неравенство  $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ . Если  $\Delta x > 0$  (т. е.  $\Delta x \rightarrow 0$  справа от точки  $x = c$ ), то

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{и поэтому} \quad f'(c) \leq 0.$$

Если  $\Delta x < 0$ , то

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{и} \quad f'(c) \geq 0.$$

Таким образом,  $f'(c) = 0$ .

В случае, когда  $f(c) = m$ , доказательство аналогичное. ■

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции  $y = f(x)$  найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси  $Ox$  (см. рис. 139 и 140). На рисунке 141 таких точек две.

**Теорема 25.2 (Коши).** Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a; b]$ , дифференцируемы на интервале  $(a; b)$ , причем  $\varphi'(x) \neq 0$  для  $x \in (a; b)$ , то найдется хотя бы одна точка  $c \in (a; b)$  такая, что выполняется равенство  $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ .

■ Отметим, что  $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ , так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка  $c$ , такая, что  $\varphi'(c) = 0$ , чего не может быть по условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и дифференцируема на интервале  $(a; b)$ , так как является

линейной комбинацией функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ ; на концах отрезка она принимает одинаковые значения  $F(a) = F(b) = 0$ .

На основании теоремы Ролля найдется точка  $x = c \in (a; b)$  такая, что  $F'(c) = 0$ . Но  $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$ , следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0.$$

Отсюда следует

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) \quad \text{и} \quad \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

**Теорема 25.3 (Лагранж).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , дифференцируема на интервале  $(a; b)$ , то найдется хотя бы одна точка  $c \in (a; b)$  такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (25.2)$$

○ Решение: Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши. Действительно, положив  $\varphi(x) = x$ , находим  $\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$ ,  $\varphi'(x) = 1$ ,  $\varphi'(c) = 1$ .

Подставляя эти значения в формулу  $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ , получаем  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$  или  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

☉ Полученную формулу называют **формулой Лагранжа** или **формулой о конечном приращении**: приращение дифференцируемой функции на отрезке  $[a; b]$  равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

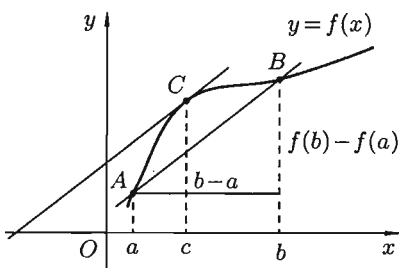


Рис. 142

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Запишем формулу (25.2) в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

где  $a < c < b$ . Отношение  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  есть угловой коэффициент секущей  $AB$ , а величина  $f'(c)$  — угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой  $x = c$ .

Следовательно, геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: на графике функции  $y = f(x)$  найдется точка  $C(c; f(c))$  (см. рис. 142), в которой касательная к графику функции параллельна секущей  $AB$ .

**Следствие 25.1.** Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

□ Пусть  $f'(x) = 0$  для  $\forall x \in (a; b)$ . Возьмем произвольные  $x_1$  и  $x_2$  из  $(a; b)$  и пусть  $x_1 < x_2$ . Тогда по теореме Лагранжа  $\exists c \in (x_1; x_2)$  такая, что  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ . Но по условию  $f'(x) = 0$ , стало быть,  $f'(c) = 0$ , где  $x_1 < c < x_2$ . Поэтому имеем  $f(x_2) - f(x_1) = 0$ , т. е.  $f(x_2) = f(x_1)$ . А так как  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные точки из интервала  $(a; b)$ , то  $\forall x \in (a; b)$  имеем  $f(x) = c$ . ■

**Следствие 25.2.** Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

□ Пусть  $f'_1(x) = f'_2(x)$  при  $x \in (a; b)$ . Тогда  $(f_1(x) - f_2(x))' = f'_1(x) - f'_2(x) = 0$ . Следовательно, согласно следствию 25.1, функция  $f_1(x) - f_2(x)$  есть постоянная, т. е.  $f_1(x) - f_2(x) = C$  для  $\forall x \in (a; b)$ . ■

**Пример 25.1.** Доказать, что  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ , где  $x \in [-1; 1]$ .

○ Решение: Пусть  $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ . Тогда  $\forall x \in (-1; 1)$  имеем  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ . Отсюда следует, что  $f(x) = C$ , т. е.  $\arcsin x + \arccos x = C$ . Положив  $x = 0$ , находим  $0 + \frac{\pi}{2} = C$ , т. е.  $C = \frac{\pi}{2}$ .

Поэтому  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ . Это равенство выполняется и при  $x = \pm 1$  (проверьте!). ●

Аналогично доказывается, что  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ .

Формуле Лагранжа можно придать другой вид. Применив теорему Лагранжа к отрезку  $[x; x + \Delta x]$  ( $\Delta x > 0$ ), будем иметь

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x. \quad (25.3)$$

Каждое число  $c \in (x; x + \Delta x)$  можно записать в виде  $c = x + \theta\Delta x$ , где  $0 < \theta < 1$  (действительно,  $x < c < x + \Delta x \implies 0 < c - x < \Delta x \implies 0 < \frac{c-x}{\Delta x} < 1$ ; положим  $\frac{c-x}{\Delta x} = \theta \implies c = x + \theta\Delta x$ ). Формула (25.3) примет вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x,$$

где  $0 < \theta < 1$ .

Используя теорему Лагранжа, можно оценить точность приближенного равенства  $\Delta y \approx dy$ . Сделаем это, считая, что функция  $f(x)$  имеет непрерывную вторую производную  $f''(x)$ :

$$\begin{aligned}\Delta y - dy &= (f(x + \Delta x) - f(x)) - f'(x)\Delta x = f'(c)\Delta x - f'(x)\Delta x = \\ &= (f'(c) - f'(x))\Delta x = f''(c_1)(c - x)\Delta x,\end{aligned}$$

где  $c_1 \in (x; c)$  (рис. 143).

Итак,  $\Delta y - dy = f''(c_1)(c - x)\Delta x$ . Пусть  $M = \max_{[x; x+\Delta x]} |f''(x)|$ . Так как  $|c - x| < \Delta x$ , а  $f''(c_1) \leq M$ , то получаем оценку  $|\Delta y - dy| \leq M|\Delta x|^2$ .

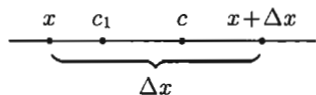


Рис. 143

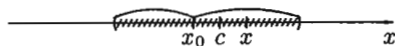


Рис. 144

## 25.2. Правила Лопиталья

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$ , который основан на применении производных.

**Теорема 25.4 (Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$ ).** Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$  и обращаются в нуль в этой точке:  $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ . Пусть  $\varphi'(x) \neq 0$  в окрестности точки  $x_0$ . Если существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$ .

□ Применим к функциям  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  теорему Коши для отрезка  $[x_0; x]$ , лежащего в окрестности точки  $x_0$ . Тогда  $\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ , где  $c$  лежит между  $x_0$  и  $x$  (рис. 144). Учитывая, что  $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ , получаем

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (25.4)$$

При  $x \rightarrow x_0$ , величина  $c$  также стремится к  $x_0$ ; перейдем в равенстве (25.4) к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$ , то  $\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = l$ . Поэтому  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l$ . ■

Коротко полученную формулу читают так: предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

**Замечания:** 1. Теорема 25.4 верна и в случае, когда функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  не определены при  $x = x_0$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ . Достаточно положить  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $\varphi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ .

2. Теорема 25.4 справедлива и в том случае, когда  $x \rightarrow \infty$ . Действительно, положив  $x = \frac{1}{z}$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{\varphi(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(f(\frac{1}{z}))'}{(\varphi(\frac{1}{z}))'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}{\varphi'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные  $f'(x)$  и  $\varphi'(x)$  удовлетворяют тем же условиям, что и функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , теорему 25.4 можно применить еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

и т. д.

**Пример 25.2.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x}$ .

○ Решение:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1} = 1$ . ●

**Пример 25.3.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2}$ .

○ Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos 6x}{1} = 9. \quad \bullet$$

Теорема 25.4 дает возможность раскрывать неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Сформулируем без доказательства теорему о раскрытии неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Теорема 25.5 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида  $\frac{\infty}{\infty}$ ).**

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$  (кроме, может быть, точки  $x_0$ ), в этой окрестности  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ ,  $\varphi'(x) \neq 0$ . Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Пример 25.4.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ .

○ Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cdot \cos^2 5x}{\cos^2 3x \cdot 5} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 10x}{1 + \cos 6x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-10 \sin 10x}{-6 \sin 6x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10 \cos 10x}{6 \cos 6x} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

2-й способ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \left[ \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{2} = t \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi + 3t)}{\operatorname{tg}(\frac{5}{2}\pi + 5t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 3t}{\operatorname{ctg} 5t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5t}{\operatorname{tg} 3t} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

**Раскрытие неопределенностей различных видов**

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$ , которые называют *основными*. Неопределенности вида  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

1. Пусть  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда очевидны следующие преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\varphi(x)) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[ \frac{0}{0} \right] \quad \left( \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \right).$$

Например,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} (2 - x) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

2. Пусть  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда можно поступить так:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)} \frac{1}{f(x)}} = \left[ \frac{0}{0} \right].\end{aligned}$$

На практике бывает проще, например,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{\ln x \cdot (x-1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Пусть или  $f(x) \rightarrow 1$  и  $\varphi(x) \rightarrow \infty$ , или  $f(x) \rightarrow \infty$  и  $\varphi(x) \rightarrow 0$ , или  $f(x) \rightarrow 0$  и  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ . Для нахождения предела вида  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$  удобно сначала прологарифмировать выражение

$$A = f(x)^{\varphi(x)}.$$

**Пример 25.5.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

○ Решение: Имеем неопределенность вида  $1^\infty$ . Логарифмируем выражение  $A = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ , получим:  $\ln A = \frac{1}{x^2} \ln \cos 2x$ . Затем находим предел:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x} (-\sin 2x) 2}{2x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = \\ &= -2, \text{ т. е. } \ln \lim_{x \rightarrow 0} A = -2. \text{ Отсюда } \lim_{x \rightarrow 0} A = e^{-2}, \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}. \quad \bullet\end{aligned}$$

Решение можно оформить короче, если воспользоваться «готовой» формулой

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \ln f(x)} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \ln f(x) \right)$$

(использовано основное логарифмическое тождество:  $f^\varphi = e^{\ln f^\varphi}$ ).

**Пример 25.6.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$ .

○ Решение:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} &= [\infty^0] = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x} \right) = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x} \right) = \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \right) = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \right) = e^{0 \cdot 1} = e^0 = 1. \quad \bullet\end{aligned}$$



**Пример 25.7.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти  $f'(x)$ . (Дополнительно: найти  $f^{(n)}(0)$ .)

○ Решение: При  $x \neq 0$  имеем

$$f'(x) = e^{-x^{-2}} \cdot (-x^{-2})' = 2e^{-x^{-2}} \cdot x^{-3}.$$

При  $x = 0$  по определению производной:

$$f'(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0 + \lambda) - f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda}.$$

Делаем замену  $y = \frac{1}{\lambda^2}$  и применяем правило Лопиталя

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda} \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{y} \cdot e^y} = 0.$$

Таким образом,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3} \cdot e^{-x^{-2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Аналогично можно показать, что  $f^{(n)}(0) = 0$ .

## 25.3. Возрастание и убывание функций

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

**Теорема 25.6 (необходимые условия).** Если дифференцируемая на интервале  $(a; b)$  функция  $f(x)$  возрастает (убывает), то  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) для  $\forall x \in (a; b)$ .

□ Пусть функция  $f(x)$  возрастает на интервале  $(a; b)$ . Возьмем произвольные точки  $x$  и  $x + \Delta x$  на интервале  $(a; b)$  и рассмотрим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ . Функция  $f(x)$  возрастает, поэтому если  $\Delta x > 0$ , то  $x + \Delta x > x$  и  $f(x + \Delta x) > f(x)$ ; если  $\Delta x < 0$ , то  $x + \Delta x < x$  и  $f(x + \Delta x) < f(x)$ . В обоих случаях  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ , так

как числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки. По условию теоремы функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x$  и является пределом рассматриваемого отношения. Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Аналогично рассматривается случай, когда функция  $f(x)$  убывает на интервале  $(a; b)$ .

Геометрически теорема 25.6 означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси  $Ox$  или в некоторых точках (на рисунке 145 в точке с абсциссой  $x_0$ ) параллельны оси  $Ox$ .

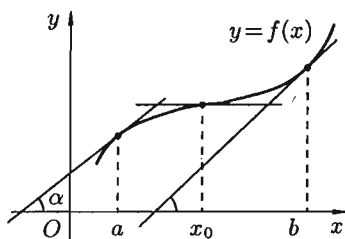


Рис. 145

**Теорема 25.7 (достаточные условия).** Если функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a; b)$  и  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) для  $\forall x \in (a; b)$ , то эта функция возрастает (убывает) на интервале  $(a; b)$ .

□ Пусть  $f'(x) > 0$ . Возьмем точки  $x_1$  и  $x_2$  из интервала  $(a; b)$ , причем  $x_1 < x_2$ . Применим к отрезку  $[x_1; x_2]$  теорему Лагранжа:  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ , где  $c \in (x_1; x_2)$ . По условию  $f'(c) > 0$ ,  $x_2 - x_1 > 0$ . Следовательно,  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  или  $f(x_2) > f(x_1)$ , т. е. функция  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$  возрастает. ■

Рассмотренные теоремы 25.6 и 25.7 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность. Напомним, что функция возрастающая или убывающая называется *монотонной* (см. с. 122).

**Пример 25.8.** Исследовать функцию  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  на возрастание и убывание.

○ Решение: Функция определена на  $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ . Ее производная равна:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1); \\ f'(x) &> 0 \quad \text{при } x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty); \\ f'(x) &< 0 \quad \text{при } x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

Ответ: данная функция возрастает на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(1; \infty)$ ; убывает на интервале  $(-1; 1)$ . ●

## 25.4. Максимум и минимум функций

Точка  $x_0$  называется **точкой максимума** функции  $y = f(x)$ , если существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ .

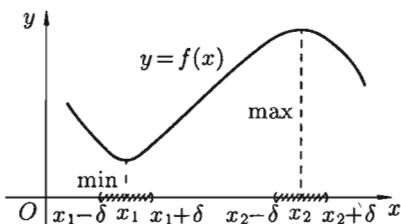


Рис. 146

Аналогично определяется точка минимума функции:  $x_0$  — **точка минимума** функции, если  $\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ . На рисунке 146  $x_1$  — точка минимума, а точка  $x_2$  — точка максимума функции  $y = f(x)$ .

Значение функции в точке максимума (минимума) называется **максимумом** (минимумом) функции. Максимум (минимум) функции называется **экстремумом** функции.

Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь *во внутренних точках* области определения. Рассмотрим условия существования экстремума функции.

**Теорема 25.8 (необходимое условие экстремума).** Если дифференцируемая функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то ее производная в этой точке равна нулю:  $f'(x_0) = 0$ .

Пусть, для определенности,  $x_0$  — точка максимума. Значит, в окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство  $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$ . Но тогда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ , если  $\Delta x > 0$ , и  $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ , если  $\Delta x < 0$ . По условию теоремы производная

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

существует. Переходя к пределу, при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим  $f'(x_0) \geq 0$ , если  $\Delta x < 0$ , и  $f'(x_0) \leq 0$ , если  $\Delta x > 0$ . Поэтому  $f'(x_0) = 0$ . Аналогично доказывается утверждение теоремы 25.8, если  $x_0$  — точка минимума функции  $f(x)$ . ■

Геометрически равенство  $f'(x_0) = 0$  означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции  $y = f(x)$  касательная к ее графику параллельна оси  $Ox$  (см. рис. 147).

Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. если  $f'(x_0) = 0$ , то это не значит, что  $x_0$  — точка экстремума. Например, для функции

$y = x^3$  ее производная  $y' = 3x^2$  равна нулю при  $x = 0$ , но  $x = 0$  не точка экстремума (см. рис. 148).

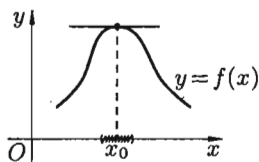


Рис. 147

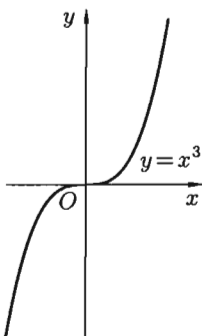


Рис. 148

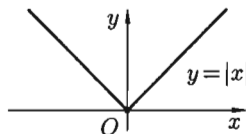


Рис. 149

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция  $y = |x|$  в точке  $x = 0$  производной не имеет, но точка  $x = 0$  — точка минимума (см. рис. 149).

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются **критическими**.

**Теорема 25.9 (достаточное условие экстремума).** Если непрерывная функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой  $\delta$ -окрестности критической точки  $x_0$  и при переходе через нее (слева направо) производная  $f'(x)$  меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума; с минуса на плюс, то  $x_0$  — точка минимума.

□ Рассмотрим  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ . Пусть выполняются условия:  $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$  и  $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ . Тогда функция  $f(x)$  возрастает на интервале  $(x_0 - \delta; x_0)$ , а на интервале  $(x_0; x_0 + \delta)$  она убывает. Отсюда следует, что значение  $f(x)$  в точке  $x_0$  является наибольшим на интервале  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , т. е.  $f(x) < f(x_0)$  для всех  $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ . Это и означает, что  $x_0$  — точка максимума функции.

Графическая интерпретация доказательства теоремы 25.9 представлена на рисунке 150.

Аналогично теорема 25.9 доказывается для случая, когда  $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$  и  $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$ . ■

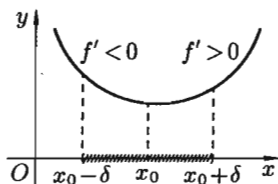
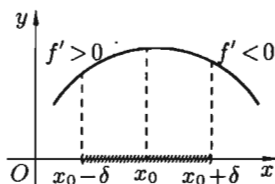


Рис. 150

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы. Из теорем 25.8 и 25.9 вытекает следующее правило исследования функции на экстремум:

- 1) найти критические точки функции  $y = f(x)$ ;
- 2) выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;
- 3) исследовать знак производной  $f'(x)$  слева и справа от каждой из выбранных критических точек;
- 4) в соответствии с теоремой 25.9 (достаточное условие экстремума) выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

**Пример 25.9.** Найти экстремум функции  $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$ .

○ Решение: Очевидно,  $D(y) = \mathbb{R}$ . Находим  $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ , т. е.  $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$ .

Производная не существует при  $x_1 = 0$  и равна нулю при  $x_2 = 8$ . Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 8)$ ,  $(8; \infty)$ . Отметим на рисунке 151 знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.



Рис. 151

Следовательно,  $x_1 = 0$  — точка максимума,  $y_{\max} = y(0) = 0$ , и  $x_2 = 8$  — точка минимума,  $y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$ . ●

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

**Теорема 25.10.** Если в точке  $x_0$  первая производная функции  $f(x)$  равна нулю ( $f'(x_0) = 0$ ), а вторая производная в точке  $x_0$  существует и отлична от нуля ( $f''(x_0) \neq 0$ ), то при  $f''(x_0) < 0$  в точке  $x_0$  функция имеет максимум и минимум — при  $f''(x_0) > 0$ .

□ Пусть для определенности  $f''(x_0) > 0$ . Так как

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

то  $\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$  в достаточно малой окрестности точки  $x_0$ . Если  $\Delta x < 0$ , то  $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ ; если  $\Delta x > 0$ , то  $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ .

Таким образом, при переходе через точку  $x_0$  первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по теореме 25.9,  $x_0$  есть точка минимума.

Аналогично доказывается, что если  $f''(x_0) < 0$ , то в точке  $x_0$  функция имеет максимум. ■

## 25.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Как известно, такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке  $x_0$  отрезка  $[a; b]$ , либо на границе отрезка, т. е. при  $x_0 = a$  или  $x_0 = b$ . Если  $x_0 \in (a; b)$ , то точку  $x_0$  следует искать среди критических точек данной функции (см. рис. 152).

Получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на  $[a; b]$ :

- 1) найти критические точки функции на интервале  $(a; b)$ ;
- 2) вычислить значения функции в найденных критических точках;
- 3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках  $x = a$  и  $x = b$ ;
- 4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

**Замечания:** 1. Если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  имеет *лишь одну критическую точку* и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. На рисунке 152  $f(x_0) = f_{\text{нб}} = f_{\text{мах}}$  (нб — наибольшее, мах — максимальное).

2. Если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  не имеет критических точек, то это означает, что на нем функция монотонно возрастает или

убывает. Следовательно, свое наибольшее значение ( $M$ ) функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее ( $m$ ) — на другом.

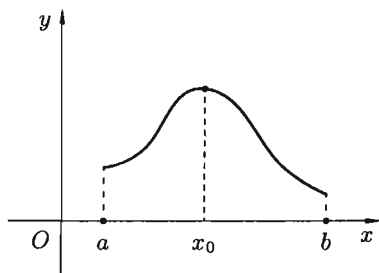


Рис. 152

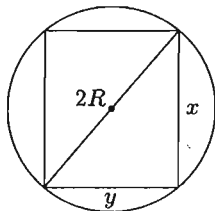


Рис. 153

**Пример 25.10.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$  на отрезке  $[-2; 1]$ .

○ Решение: Находим критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1);$$

$f'(x) = 0$  при  $x_1 = 0 \in [-2; 1]$  и при  $x_2 = -1 \in [-2; 1]$ . Находим  $f(0) = 1$ ,  $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$ ,  $f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17$ ,  $f(1) = 8$ . Итак,  $f_{\text{нб}} = 17$  в точке  $x = -2$ ,  $f_{\text{нм}} = 0$  в точке  $x = -1$ . ●

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин.

Практические задачи: транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами, задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли и другие задачи, связанные с поиском оптимального решения, приводят к развитию и усовершенствованию методов отыскания наибольших и наименьших значений. Решением таких задач занимается особая ветвь математики — линейное программирование.

Рассмотрим более простую задачу.

**Пример 25.11.** Из шара радиуса  $R$  выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы его размеры?

○ Решение: Обозначим через  $x$  и  $y$  высоту и диаметр цилиндра. Тогда, как видно из рисунка 153,  $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ , а потому объем цилиндра

$$V = V(x) = \pi \left( \frac{4R^2 - x^2}{4} \right) x = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4},$$


где  $x \in [0; 2R]$ .

Находим наибольшее значение функции  $V = V(x)$  на промежутке  $[0; 2R]$ . Так как  $V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2$ , то  $V'(x) = 0$  при  $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ , кроме того,  $V''(x) = -\frac{3}{2}\pi x < 0$ . Поэтому  $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$  — точка максимума. Так как функция имеет одну критическую точку, то цилиндр будет иметь наибольший объем (равный  $V_{\max}$ ) при  $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ ; диаметр основания цилиндра равен

$$\sqrt{4R^2 - (2R\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Таким образом, искомый цилиндр имеет высоту, равную  $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ , и диаметр, равный  $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$ .

## 25.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

 График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется **выпуклым вниз** на интервале  $(a; b)$ , если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции  $y = f(x)$  называется **выпуклым вверх** на интервале  $(a; b)$ , если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции  $y = f(x)$ , отделяющая его части разной выпуклости, называется **точкой перегиба**.

На рисунке 154 кривая  $y = f(x)$  выпукла вверх в интервале  $(a; c)$ , выпукла вниз в интервале  $(c; b)$ , точка  $M(c; f(c))$  — точка перегиба.

Интервалы выпуклости вниз и вверх находят с помощью следующей теоремы.

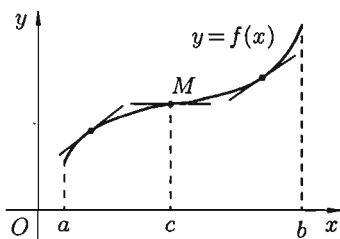



Рис. 154

**Теорема 25.11.** Если функция  $y = f(x)$  во всех точках интервала  $(a; b)$  имеет отрицательную вторую производную, т. е.  $f''(x) < 0$ , то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же  $f''(x) > 0 \forall x \in (a; b)$  — график выпуклый вниз.

 Пусть  $f''(x) < 0 \forall x \in (a; b)$ . Возьмем на графике функции произвольную точку  $M$  с абсциссой  $x_0 \in (a; b)$  и проведем через  $M$  касательную (см. рис. 155). Покажем, что график функции расположен ниже



этой касательной. Для этого сравним в точке  $x \in (a; b)$  ординату  $y$  кривой  $y = f(x)$  с ординатой  $y_{\text{кас}}$  ее касательной. Уравнение касательной, как известно, есть

$$y_{\text{кас}} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда  $y - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ . По теореме Лагранжа,  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ , где  $c$  лежит между  $x_0$  и  $x$ . Поэтому

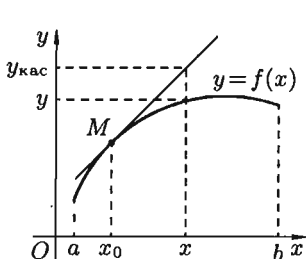


Рис. 155

$$y - y_{\text{кас}} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

т. е.

$$y - y_{\text{кас}} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Разность  $f'(c) - f'(x_0)$  снова преобразуем по формуле Лагранжа:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0),$$

где  $c_1$  лежит между  $x_0$  и  $c$ . Таким образом, получаем

$$y - y_{\text{кас}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

Исследуем это равенство:

1) если  $x > x_0$ , то  $x - x_0 > 0$ ,  $c - x_0 > 0$  и  $f''(c_1) < 0$ . Следовательно,

$$y - y_{\text{кас}} < 0, \quad \text{т. е.} \quad y < y_{\text{кас}}: \quad \begin{array}{ccccccc} & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & x_0 & c_1 & c & x & & \end{array}$$

2) если  $x < x_0$ , то  $x - x_0 < 0$ ,  $c - x_0 < 0$  и  $f''(c_1) < 0$ . Следовательно,

$$y - y_{\text{кас}} < 0, \quad \text{т. е.} \quad y < y_{\text{кас}}: \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \circ & & & \\ & x & c & c_1 & x_0 & & \end{array}$$

Итак, доказано, что во всех точках интервала  $(a; b)$  ордината касательной больше ординаты графика, т. е. график функции выпуклый вверх. Аналогично доказывается, что при  $f''(x) > 0$  график выпуклый вниз. ■

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

**Теорема 25.12 (достаточное условие существования точек перегиба).** Если вторая производная  $f''(x)$  при переходе через точку  $x_0$ , в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой  $x_0$  есть точка перегиба.

□ Пусть  $f''(x) < 0$  при  $x < x_0$  и  $f''(x) > 0$  при  $x > x_0$ . Это значит, что слева от  $x = x_0$  график выпуклый вверх, а справа — выпуклый вниз. Следовательно, точка  $(x_0; f(x_0))$  графика функции является точкой перегиба.

Аналогично доказывается, что если  $f''(x) > 0$  при  $x < x_0$  и  $f''(x) < 0$  при  $x > x_0$ , то точка  $(x_0; f(x_0))$  — точка перегиба графика функции  $y = f(x)$ . ■

**Пример 25.12.** Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции  $y = x^5 - x + 5$ .

○ Решение: Находим, что  $y' = 5x^4 - 1$ ,  $y'' = 20x^3$ . Вторая производная существует на всей числовой оси;  $y'' = 0$  при  $x = 0$ .

Отмечаем, что  $y'' > 0$  при  $x > 0$ ;  $y'' < 0$  при  $x < 0$ .

Следовательно, график функции  $y = x^5 - x + 5$  в интервале  $(-\infty; 0)$  — выпуклый вверх, в интервале  $(0; \infty)$  — выпуклый вниз. Точка  $(0; 5)$  есть точка перегиба.

## 25.7. Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты. Понятие асимптоты рассматривалось при изучении формы гиперболы (см. с. 81).

Напомним, что *асимптотой* кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой (рис. 156).

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая  $x = a$  является *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , или  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ , или  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ .

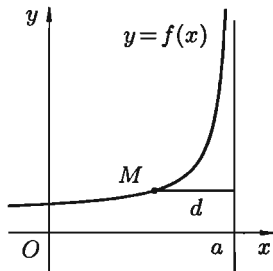


Рис. 156

Действительно, в этом случае непосредственно из рисунка 156 видно, что расстояние точки  $M(x; y)$  кривой от прямой  $x = a$  равно  $d = |x - a|$ . Если  $x \rightarrow a$ , то  $d \rightarrow 0$ . Согласно определению асимптоты, прямая  $x = a$  является асимптотой кривой  $y = f(x)$ . Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения  $x$ , вблизи которых функция  $f(x)$  неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва второго рода.

Например, кривая  $y = \frac{2}{x+1}$  имеет вертикальную асимптоту (см. рис. 157)  $x = -1$ , так как  $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2}{x+1} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2}{x+1} = -\infty$ .

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде

$$y = kx + b. \quad (25.5)$$

Найдем  $k$  и  $b$ .

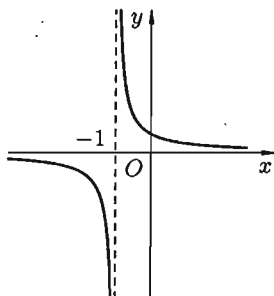


Рис. 157

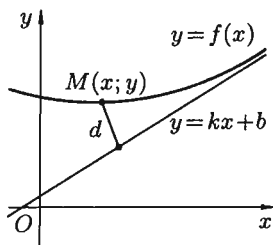


Рис. 158

Пусть  $M(x; y)$  — произвольная точка кривой  $y = f(x)$  (см. рис. 158). По формуле расстояния от точки до прямой ( $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ ) находим расстояние от точки  $M$  до прямой (25.5):  $d = \left| \frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right|$ .

Условие  $d \rightarrow 0$  будет выполняться лишь тогда, когда числитель дроби стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (kx - y + b) = 0. \quad (25.6)$$

Отсюда следует, что  $kx - y + b = \alpha$ , где  $\alpha = \alpha(x)$  бесконечно малая:  $\alpha \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Разделив обе части равенства  $y = b + kx - \alpha$  на  $x$  и перейдя к пределу при  $x \rightarrow \infty$ , получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x} \right).$$

Так как  $\frac{b}{x} \rightarrow 0$  и  $\frac{\alpha}{x} \rightarrow 0$ , то

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}. \quad (25.7)$$

Из условия (25.6) находим  $b$ :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx). \quad (25.8)$$

Итак, если существует наклонная асимптота  $y = kx + b$ , то  $k$  и  $b$  находятся по формулам (25.7) и (25.8).

Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы (25.7) и (25.8), то прямая (25.5) является наклонной асимптотой.

Если хотя бы один из пределов (25.7) или (25.8) не существует или равен бесконечности, то кривая  $y = f(x)$  наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если  $k = 0$ , то  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Поэтому  $y = b$  — уравнение горизонтальной асимптоты.

**Замечание:** Асимптоты графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (25.7) и (25.8) следует отдельно рассматривать случай, когда  $x \rightarrow +\infty$  и когда  $x \rightarrow -\infty$ .

**Пример 25.13.** Найти асимптоты графика функции  $y = xe^x$ .

○ **Решение:** Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ , то график функции при  $x \rightarrow +\infty$  наклонной асимптоты не имеет.

При  $x \rightarrow -\infty$  справедливы соотношения

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 0x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Следовательно, при  $x \rightarrow -\infty$  график имеет горизонтальную асимптоту  $y = 0$ . ●

## 25.8. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции  $y = f(x)$  целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых  $f(x) > 0$  или  $f(x) < 0$ ).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, например 1, 2, 7. Если же график функции не совсем

понятен и после выполнения всех восьми операций, то можно дополнительно исследовать функцию на периодичность, построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности функции. Иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

**Пример 25.14.** Исследовать функцию  $y = \frac{x}{1-x^2}$  и построить ее график.

○ Решение: Выполним все восемь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при  $x = 1$  и  $x = -1$ . Область ее определения состоит из трех интервалов  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ , а график из трех ветвей.

2. Если  $x = 0$ , то  $y = 0$ . График пересекает ось  $Oy$  в точке  $O(0; 0)$ ; если  $y = 0$ , то  $x = 0$ . График пересекает ось  $Ox$  в точке  $O(0; 0)$ .

3. Функция знакоположительна ( $y > 0$ ) в интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ ; знакоотрицательна — в  $(-1; 0)$  и  $(1; +\infty)$ .

4. Функция  $y = \frac{x}{1-x^2}$  является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при  $x \geq 0$ .

5. Прямые  $x = 1$  и  $x = -1$  являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

( $k = 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ ),

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1-x^2} - 0x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение  $y = 0$ . Прямая  $y = 0$  является асимптотой и при  $x \rightarrow +\infty$ , и при  $x \rightarrow -\infty$ .

6. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left( \frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2},$$

то  $y' > 0$  в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

7. Исследуем функцию на экстремум. Так как  $y' = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}$ , то критическими точками являются точки  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -1$  ( $y'$  не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

8. Исследуем функцию на выпуклость. Находим  $y''$ :

$$y'' = \left( \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2} \right)' = \frac{2x(1 - x^2)^2 - (x^2 + 1)2(1 - x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}.$$

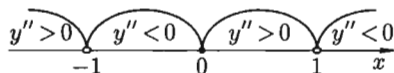


Рис. 159

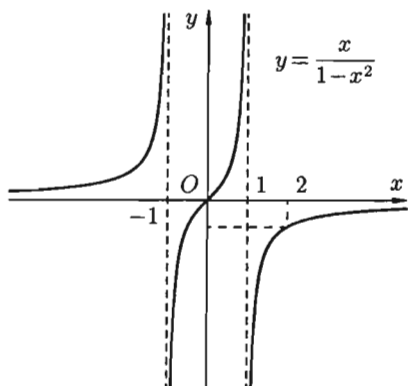


Рис. 160

Вторая производная равна нулю или не существует в точках  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 1$ . На рисунке 159 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции.

Точка  $O(0,0)$  — точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах  $(-1; 0)$  и  $(1; \infty)$ ; выпуклый вниз на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$ .

График функции изображен на рисунке 160. ●

## § 26. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В определении функции  $y = f(x)$  не говорится о том, при помощи каких средств находятся значения  $y$  по значениям  $x$ . В тех случаях, когда функция является формулой вида  $y = \frac{x^3}{5} - 5x + 7$ , значения функции найти легко с помощью четырех арифметических действий. Но как найти значения, например, функций  $y = \sin x$ ,  $y = \ln(1 + x)$  при любых (допустимых) значениях аргумента?

Для того, чтобы вычислить значения данной функции  $y = f(x)$ , ее заменяют многочленом  $P_n(x)$  степени  $n$ , значения которого всегда и легко вычисляемы. Обоснование возможности представлять функцию многочленом дает формула Тейлора.

## 26.1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть функция  $f(x)$  есть многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$ :

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени  $n$  относительно разности  $x - x_0$ , где  $x_0$  — произвольное число, т. е. представим  $P_n(x)$  в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n. \quad (26.1)$$

Для нахождения коэффициентов  $A_0, A_1, \dots, A_n$  продифференцируем  $n$  раз равенство (26.1):

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P''_n(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P'''_n(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x - x_0) + \dots \\ \dots + n(n-1)(n-2)A_n(x - x_0)^{n-3},$$

.....

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 A_n.$$

Подставляя  $x = x_0$  в полученные равенства и равенство (26.1), имеем:

$$P_n(x_0) = A_0, \quad \text{т. е. } A_0 = P_n(x_0),$$

$$P'_n(x_0) = A_1, \quad \text{т. е. } A_1 = \frac{P'_n(x_0)}{1!},$$

$$P''_n(x_0) = 2A_2, \quad \text{т. е. } A_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2!},$$

$$P'''_n(x_0) = 2 \cdot 3A_3, \quad \text{т. е. } A_3 = \frac{P'''_n(x_0)}{3!},$$

.....

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 A_n, \quad \text{т. е. } A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя найденные значения  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в равенство (26.1), получим разложение многочлена  $n$ -й степени  $P_n(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ :

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (26.2)$$



Формула (26.2) называется **формулой Тейлора для многочлена  $P_n(x)$  степени  $n$** .

**Пример 26.1.** Разложить многочлен  $P(x) = -4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  по степеням  $x + 1$ .

○ Решение: Здесь  $x_0 = -1$ ,  $P'(x) = -12x^2 + 6x - 2$ ,  $P''(x) = -24x + 6$ ,  $P'''(x) = -24$ . Поэтому  $P(-1) = 10$ ,  $P'(-1) = -20$ ,  $P''(-1) = 30$ ,  $P'''(-1) = -24$ . Следовательно,

$$P(x) = 10 + \frac{-20}{1}(x+1) + \frac{30}{2!}(x+1)^2 + \frac{-24}{3!}(x+1)^3,$$

т. е.

$$-4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3. \quad \bullet$$

## 26.2. Формула Тейлора для произвольной функции

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ . Формула Тейлора позволяет, при определенных условиях, приближенно представить функцию  $f(x)$  в виде многочлена и дать оценку погрешности этого приближения.

**Теорема 26.1.** Если функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и имеет в ней производные до  $(n+1)$ -го порядка включительно, то для любого  $x$  из этой окрестности найдется точка  $c \in (x_0; x)$  такая, что справедлива формула

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ & \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ & (c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1). \quad (26.3) \end{aligned}$$



Формула (26.3) называется **формулой Тейлора для функции  $f(x)$** . Эту формулу можно записать в виде  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$



называется **многочленом Тейлора**, а

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$



называется **остаточным членом** формулы Тейлора, записанной в форме Лагранжа.  $R_n(x)$  есть погрешность приближенного равенства  $f(x) \approx P_n(x)$ . Таким образом, формула Тейлора дает возможность заменить функцию  $y = f(x)$  многочленом  $y = P_n(x)$  с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена  $R_n(x)$ .

При  $x_0 = 0$  получаем частный случай формулы Тейлора — **формулу Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (26.4)$$

где  $c$  находится между 0 и  $x$  ( $c = \theta x$ ,  $0 < \theta < 1$ ).

При  $n = 0$  формула Тейлора (26.3) имеет вид  $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$  или  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ , т. е. совпадает с формулой Лагранжа конечных приращений. Рассмотренная ранее формула для приближенных вычислений  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  (см. «дифференциал функции») является частным случаем более точной формулы

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

**Пример 26.2.** Найти число  $e$  с точностью до 0,001.

○ Решение: Запишем формулу Маклорена для функции  $f(x) = e^x$ . Находим производные этой функции:  $f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x$ , ...,  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ . Так как  $f(0) = e^0 = 1$ ,  $f'(0) = e^0 = 1$ , ...,  $f^{(n)}(0) = 1$ ,  $f^{(n+1)}(c) = e^c$ , то по формуле (26.4) имеем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Положим  $x = 1$ :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения  $e$  с точностью 0,001 определим  $n$  из условия, что остаточный член  $\frac{e^c}{(n+1)!}$  меньше 0,001. Так как  $0 < c < 1$ , то  $e^c < 3$ . Поэтому при  $n = 6$  имеем

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} = 0,0006 < 0,001.$$

Итак, получаем приближенное равенство

$$e \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx$$

$$\approx 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181 \approx 2,718,$$

т. е.  $e \approx 2,718$ .

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых других элементарных функций:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \cos c,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos c,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \\ + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n)(1+c)^{\mu-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$