

§ 35. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) разобьем отрезок $[a, b]$ на n *частичных отрезков* $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ (см. рис. 166).

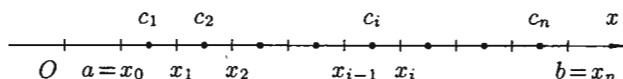


Рис. 166

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3. Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4. Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i. \quad (35.1)$$


Сумма вида (35.1) называется **интегральной суммой** функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).


5. Найдем предел интегральной суммы (35.1), когда $n \rightarrow \infty$ так, что $\lambda \rightarrow 0$.

Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I , который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$\int_a^b f(x) dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i. \quad (35.2)$$

 Числа a и b называются соответственно **нижним** и **верхним пределами интегрирования**, $f(x)$ — **подынтегральной функцией**, $f(x) dx$ — **подынтегральным выражением**, x — **переменной интегрирования**, отрезок $[a; b]$ — **областью (отрезком) интегрирования**.

 Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, называется **интегрируемой** на этом отрезке.

Сформулируем теперь теорему существования определенного интеграла.

Теорема 35.1 (Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности для всякой ограниченной на отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва.

Укажем некоторые свойства определенного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения (35.2).

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

Это следует из того, что интегральная сумма (35.1), а следовательно, и ее предел (35.2) не зависят от того, какой буквой обозначается аргумент данной функции.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

3. Для любого действительного числа c : $\int_a^b c dx = c \cdot (b - a)$.

§ 36. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь криволинейной трапеции

☞ Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox , сбоку — прямыми $x = a$ и $x = b$, называется **криволинейной трапецией**. Найдем площадь этой трапеции.

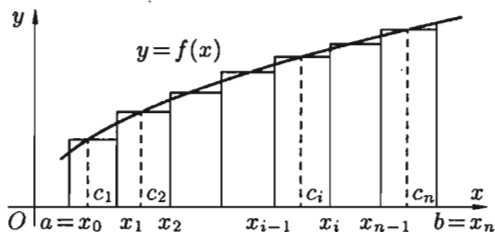


Рис. 167

Для этого отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, b = x_n$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) разобьем на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ (см. рис. 167). В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) возьмем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней, т. е. $f(c_i)$.

Умножим значением функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i) \cdot \Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = S_n$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел S , к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n , когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i, \quad \text{то есть} \quad S = \int_a^b f(x) dx.$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.*

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается под действием силы \vec{F} , направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину $F = F(x)$, где x — абсцисса движущейся точки M .

Найдем работу A силы \vec{F} по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ ($a < b$). Для этого отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, b = x_n$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) разобьем на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$. Сила, действующая на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, меняется от точки к точке. Но если длина отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ достаточно мала, то сила \vec{F} на этом отрезке изменяется незначительно. Ее можно приближенно считать постоянной и равной значению функции $F = F(x)$ в произвольно выбранной точке $x = c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Поэтому работа, совершенная этой силой на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, равна произведению $F(c_i) \cdot \Delta x_i$. (Как работа постоянной силы $F(c_i)$ на участке $[x_{i-1}; x_i]$.)

Приближенное значение работы A силы \vec{F} на всем отрезке $[a; b]$ есть

$$A \approx F(c_1)\Delta x_1 + F(c_2)\Delta x_2 + \dots + F(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n F(c_i)\Delta x_i. \quad (36.1)$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_i . Поэтому за точное значение работы A принимается предел суммы (36.1) при условии, что наибольшая длина λ частичных отрезков стремится к нулю:

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x) dx.$$

Итак, *работа переменной силы \vec{F} , величина которой есть непрерывная функция $F = F(x)$, действующей на отрезке $[a; b]$, равна определенному интегралу от величины $F(x)$ силы, взятому по отрезку $[a; b]$.*

В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Аналогично можно показать, что путь S , пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости $v(t)$:

$$S = \int_a^b v(t) dt;$$

масса m неоднородного стержня на отрезке $[a; b]$ равна определенному интегралу от плотности $\gamma(x)$: $m = \int_a^b \gamma(x) dx$.

§ 37. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Теорема 37.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная на $[a; b]$ ($F'(x) = f(x)$), то имеет место формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (37.1)$$

□ Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, b = x_n$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) на n частичных отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$, как это показано на рис. 168.

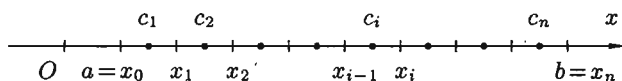


Рис. 168

Рассмотрим тождество

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = (F(x_n) - F(x_{n-1})) + \\ + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_1) - F(x_0)).$$

Преобразуем каждую разность в скобках по формуле Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Получим

$$F(b) - F(a) = F'(c_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) + F'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots \\ + F'(c_2) \cdot (x_2 - x_1) + F'(c_1)(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

т. е.

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad (37.2)$$

где c_i есть некоторая точка интервала $(x_{i-1}; x_i)$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$. Поэтому существует предел интегральной суммы, равный определенному интегралу от $f(x)$ на $[a; b]$.

Переходя в равенстве (37.2) к пределу при $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$, получаем

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

⇒ Равенство (37.1) называется **формулой Ньютона–Лейбница**.

Если ввести обозначение $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$, то формулу Ньютона–Лейбница (37.1) можно переписать так:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Формула Ньютона–Лейбница дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, надо найти ее первообразную функцию $F(x)$ и взять разность $F(b) - F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a; b]$.

$$\text{Например, } \int_0^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 9 - 0 = 9,$$

$$\text{а } \int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} = \left. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right|_{-2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 37.1. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 37.2. Вычислить интеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

○ Решение: $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| \Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$ ●

§ 38. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла, считая подынтегральную функцию интегрируемой на отрезке $[a; b]$. При выводе свойств будем использовать определение интеграла и формулу Ньютона–Лейбница.

1. Если c — постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx, \quad (38.1)$$

т. е. постоянный множитель c можно выносить за знак определенного интеграла.

□ Составим интегральную сумму для функции $c \cdot f(x)$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^n c \cdot f(c_i) \Delta x_i = c \cdot \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c \cdot f(c_i) \Delta x_i = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = c \cdot \int_a^b f(x) dx$. Отсюда вытекает, что функция $c \cdot f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и справедлива формула (38.1). ■

2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, тогда интегрируема на $[a; b]$ их сумма и

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx, \quad (38.2)$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

$$\begin{aligned} \square \quad \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f_1(c_i) + f_2(c_i)) \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_1(c_i) \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_2(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 2 распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Это свойство можно принять по определению. Это свойство также подтверждается формулой Ньютона–Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (38.3)$$

т. е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка. Это свойство называют **аддитивностью** определенного интеграла (или свойством аддитивности).

При разбиении отрезка $[a; b]$ на части включим точку c в число точек деления (это можно сделать ввиду независимости предела интегральной суммы от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части). Если $c = x_m$, то интегральную сумму можно разбить на две суммы:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(c_i) \Delta x_i + \sum_{i=m}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Каждая из написанных сумм является интегральной соответственно для отрезков $[a; b]$, $[a; c]$ и $[c; b]$. Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow 0$), получим равенство (38.3). ■

Свойство 4 справедливо при любом расположении точек a, b, c (считаем, что функция $f(x)$ интегрируема на большем из получающихся отрезков).

Так, например, если $a < b < c$, то

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Отсюда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(использованы свойства 4 и 3).

5. «Теорема о среднем». Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

□ По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Применяя к разности $F(b) - F(a)$ теорему Лагранжа (теорему о конечном приращении функции), получим

$$F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a). \quad \blacksquare$$

Свойство 5 («теорема о среднем») при $f(x) \geq 0$ имеет простой геометрический смысл: значение определенного интеграла равно, при некотором $c \in (a; b)$, площади прямоугольника с высотой $f(c)$ и основанием $b - a$ (см. рис. 169). Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

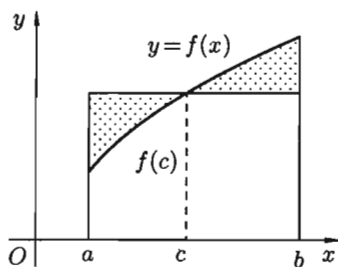


Рис. 169

⇒ называется **средним значением** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

6. Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ имеет тот же знак, что и функция. Так, если

$f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

□ По «теореме о среднем» (свойство 5)

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a),$$

где $c \in [a; b]$. А так как $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$, то и

$$f(c) \geq 0, \quad b - a > 0.$$

Поэтому $f(c) \cdot (b - a) \geq 0$, т. е. $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. ■

7. Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a; b]$, ($a < b$) можно интегрировать. Так, если $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a; b]$,

то $\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$.

■ Так как $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$, то при $a < b$, согласно свойству 6, имеем

$$\int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \geq 0.$$

Или, согласно свойству 2,

$$\int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx \geq 0, \quad \text{т. е.} \quad \int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx. \quad \blacksquare$$

Отметим, что дифференцировать неравенства нельзя.

8. Оценка интеграла. Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, ($a < b$), то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (38.4)$$

■ Так как для любого $x \in [a; b]$ имеем $m \leq f(x) \leq M$, то, согласно свойству 7, имеем

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Применяя к крайним интегралам свойство 5, получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad \blacksquare$$

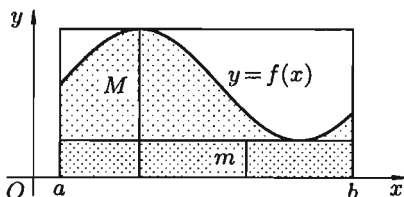


Рис. 170

Если $f(x) \geq 0$, то свойство 8 иллюстрируется геометрически: площадь криволинейной трапеции заключена между площадями прямоугольников, основание которых есть $[a; b]$, а высоты равны m и M (см. рис. 170).

9. Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx; \quad a < b.$$

■ Применяя свойство 7 к очевидным неравенствам $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, получаем

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \blacksquare$$

10. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, т. е.

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = f(x).$$

□ По формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^x f(t) dt = F(t) \Big|_a^x = F(x) - F(a).$$

Следовательно,

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)'_x = (F(x) - F(a))'_x = F'(x) - 0 = f(x). \quad \blacksquare$$

Это означает, что *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.*

§ 39. ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

39.1. Формула Ньютона–Лейбница

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Применяется этот метод во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функции $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Например, $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

39.2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема 39.1. Если:

- 1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$;
- 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a; b]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (39.1)$$

□ Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Так как $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, то $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Формула (39.1) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример 39.1. Вычислить $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

○ Решение: Положим $x = 2 \sin t$, тогда $dx = 2 \cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = 16 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2t \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) \, dt = \\
 &= 2 \left(t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi. \quad \bullet
 \end{aligned}$$

39.3. Интегрирование по частям

Теорема 39.2. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \quad (39.2)$$

□ На отрезке $[a; b]$ имеет место равенство $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^b (u'v + uv') \, dx = uv \Big|_a^b.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b v \cdot u' \, dx + \int_a^b uv' \, dx &= uv \Big|_a^b \implies \\
 \implies \int_a^b v \, du + \int_a^b u \, dv &= uv \Big|_a^b \implies \int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Формула (39.2) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

Пример 39.2. Вычислить $\int_1^e x \ln x \, dx$.

○ Решение: Положим

$$\left[\begin{array}{ll} u = \ln x & \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \, dx & \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right].$$

Применяя формулу (39.2), получаем

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1). \quad \bullet\end{aligned}$$

Пример 39.3. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

○ Решение: Интегрируем по частям. Положим

$$\left[\begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x \, dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right].$$

Поэтому

$$J = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi. \quad \bullet$$

39.4. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$, симметричном относительно точки $x = 0$. Докажем, что

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x) \, dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases} \quad (39.3)$$

□ Разобьем отрезок интегрирования $[-a; a]$ на части $[-a; 0]$ и $[0; a]$. Тогда по свойству аддитивности

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx. \quad (39.4)$$

В первом интеграле сделаем подстановку $x = -t$. Тогда

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = - \int_a^0 f(-t) \, dt = \int_0^a f(-t) \, dt = \int_0^a f(-x) \, dx$$

(согласно свойству: «определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования»). Возвращаясь к равенству (39.4), получим

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \int_0^a f(-x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a (f(-x) + f(x)) \, dx. \quad (39.5)$$

Если функция $f(x)$ четная ($f(-x) = f(x)$), то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$; если функция $f(x)$ нечетная ($f(-x) = -f(x)$), то $f(-x) + f(x) = 0$.

Следовательно, равенство (39.5) принимает вид (39.3). ■

Благодаря доказанной формуле можно, например, сразу, не производя вычислений, сказать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = 0, \quad \int_{-3}^3 e^{-x^2} \cdot \sin x \, dx = 0.$$

§ 40. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) \, dx$, где промежуток интегрирования $[a; b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, называют еще *собственным интегралом*.

☞ Рассмотрим так называемые *несобственные интегралы*, т. е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

40.1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

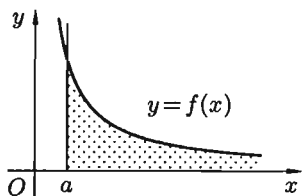


Рис. 171

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

где c — произвольное число. В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a; +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции (см. рис. 171).

Пример 40.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_{-\infty}^0 \cos x dx$; 3) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

● Решение: 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Big|_1^b = -(0 - 1) = 1$, интеграл сходится;

2) $\int_{-\infty}^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin x \Big|_a^0 = 0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a$, интеграл расходится, так как при $a \rightarrow -\infty$ предел $\lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a$ не существует.

3) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$, интеграл расходится. ●

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл; достаточно лишь знать, сходится ли он или нет.

Приведем без доказательства некоторые признаки сходимости.

Теорема 40.1 (признак сравнения). Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$.

Пример 40.2. Сходится ли интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$?

○ Решение: При $x \geq 1$ имеем $\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ сходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$ также сходится (и его значение меньше 1).

Теорема 40.2. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$ ($f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$), то интегралы $\int_a^{\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся (т. е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 40.3. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$.

○ Решение: Интеграл $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$ сходится, так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2+1})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

40.2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$ *расходится*.

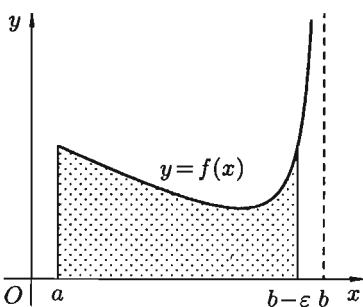


Рис. 172

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке с отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

В этом случае интеграл слева называют *сходящимся*, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

В случае, когда $f(x) > 0$, несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x) dx$ (разрыв в точке $x = b$) можно истолковать геометрически как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции (см. рис. 172).

Пример 40.4. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

○ Решение: При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв;

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

интеграл расходится.

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 40.3. Пусть на промежутке $[a; b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x = b$ терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x) dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x) dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x) dx$.

Теорема 40.4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a; b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b \varphi(x) dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 40.5. Сходится ли интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$?

○ Решение: Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ имеет на $[0; 1]$ единственный разрыв в точке $x = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon$$

расходится. И так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

то интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ также расходится.

§ 41. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

41.1. Схемы применения определенного интеграла

Пусть требуется найти значение какой-либо геометрической или физической величины A (площадь фигуры, объем тела, давление жидкости на вертикальную пластину и т. д.), связанной с отрезком $[a; b]$ изменения независимой переменной x . Предполагается, что эта величина A аддитивна, т. е. такая, что при разбиении отрезка $[a; b]$ точкой $c \in (a; b)$ на части $[a; c]$ и $[c; b]$ значение величины A , соответствующее всему отрезку $[a; b]$, равно сумме ее значений, соответствующих $[a; c]$ и $[c; b]$.

Для нахождения этой величины A можно руководствоваться одной из двух схем: I схема (или метод *интегральных сумм*) и II схема (или метод *дифференциала*).

Первая схема базируется на определении определенного интеграла.

1. Точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ разбить отрезок $[a; b]$ на n частей. В соответствии с этим, интересующая нас величина A разобьется на n «элементарных слагаемых» ΔA_i ($i = 1, \dots, n$): $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$.

2. Представить каждое «элементарное слагаемое» в виде произведения некоторой функции (определяемой из условия задачи), вычисленной в произвольной точке соответствующего отрезка на его длину: $\Delta A_i \approx f(c_i) \Delta x_i$.

При нахождении приближенного значения ΔA_i допустимы некоторые упрощения: дугу на малом участке можно заменить хордой, стягивающей ее концы; переменную скорость на малом участке можно приближенно считать постоянной и т. д.

Получим приближенное значение величины A в виде интегральной суммы:

$$A \approx f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

3. Искомая величина A равна пределу интегральной суммы, т. е.

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Указанный «метод сумм», как видим, основан на представлении *интеграла как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых*.

Схема I была применена для выяснения геометрического и физического смысла определенного интеграла.

Вторая схема представляет собой несколько видоизмененную схему I и называется «метод дифференциала» или «метод отбрасывания бесконечно малых высших порядков»:

1) на отрезке $[a; b]$ выбираем произвольное значение x и рассматриваем переменный отрезок $[a; x]$. На этом отрезке величина A становится функцией x : $A = A(x)$, т. е. считаем, что часть искомой величины A есть неизвестная функция $A(x)$, где $x \in [a; b]$ — один из параметров величины A ;

2) находим главную часть приращения ΔA при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A = A(x)$: $dA = f(x) dx$, где $f(x)$, определяемая из условия задачи, функция переменной x (здесь также возможны различные упрощения);

3) считая, что $dA \approx \Delta A$ при $\Delta x \rightarrow 0$, находим искомую величину путем интегрирования dA в пределах от a до b :

$$A(b) - A(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

41.2. Вычисление площадей плоских фигур

Прямоугольные координаты

Как уже было установлено (см. «геометрический смысл определенного интеграла»), площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geq 0$), равна соответствующему определенному интегралу:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b y dx. \quad (41.1)$$

Формула (41.1) получена путем применения схемы I — метода сумм. Обоснуем формулу (41.1), используя схему II.

Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. 173). Для нахождения площади S этой трапеции продедем следующие операции:

1. Возьмем произвольное $x \in [a; b]$ и будем считать, что $S = S(x)$.
2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$ ($x + \Delta x \in [a; b]$). Функция $S = S(x)$ получит приращение ΔS , представляющее собой площадь «элементарной криволинейной трапеции» (на рисунке она выделена).

Дифференциал площади dS есть главная часть приращения ΔS при $\Delta x \rightarrow 0$, и, очевидно, он равен площади прямоугольника с основанием dx и высотой y : $dS = y \cdot dx$.

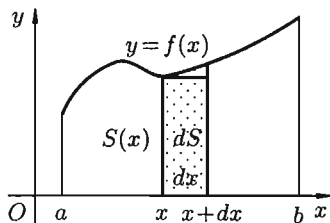


Рис. 173

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем $S = \int_a^b y dx$.

Отметим, что если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ox ($f(x) < 0$), то ее площадь может быть найдена по формуле

$$S = - \int_a^b y dx. \quad (41.2)$$

Формулы (41.1) и (41.2) можно объединить в одну:

$$S = \left| \int_a^b y dx \right|.$$

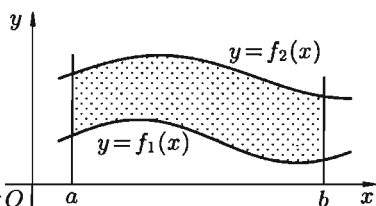


Рис. 174

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$) (см. рис. 174), можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

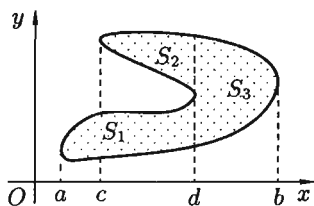


Рис. 175

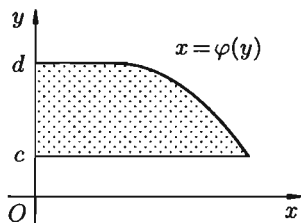


Рис. 176

Если плоская фигура имеет «сложную» форму (см. рис. 175), то прямыми, параллельными оси Oy , ее следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) \geq 0$ (см. рис. 176), то ее площадь находится по формуле $S = \int_c^d x dy$.

И, наконец, если криволинейная трапеция ограничена *кривой*, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox , то площадь ее находится по формуле

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

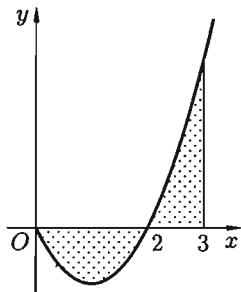


Рис. 177

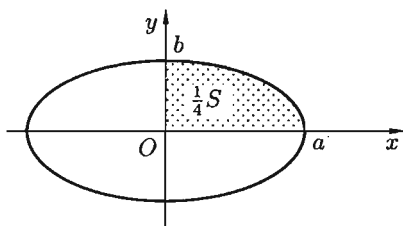


Рис. 178

Пример 41.1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

○ Решение: Фигура имеет вид, изображенный на рисунке 177. Найдим ее площадь S :

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \\ &= - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + \left. x^2 \right|_0^2 + \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^3 - \left. x^2 \right|_2^3 = -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} - 9 + 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 41.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

○ Решение: Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S . Здесь x изменяется от 0 до a , следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (см. рис. 178). Находим:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = -ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left(t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, $S = \pi ab$.

Полярные координаты

Найдем площадь S *криволинейного сектора*, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), где r и φ — полярные координаты (см. рис. 179). Для решения задачи используем схему II — *метод дифференциала*.

1. Будем считать часть искомой площади S как функцию угла φ , т. е. $S = S(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (если $\varphi = \alpha$, то $S(\alpha) = 0$, если $\varphi = \beta$, то $S(\beta) = S$).

2. Если текущий полярный угол φ получит приращение $\Delta\varphi = d\varphi$, то приращение площади ΔS равно площади «элементарного криволинейного сектора» OAB .

Дифференциал dS представляет собой главную часть приращения ΔS при $d\varphi \rightarrow 0$ и равен площади кругового сектора OAC (на рисунке она заштрихована) радиуса r с центральным углом $d\varphi$. Поэтому $dS = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$, получим искомую площадь

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

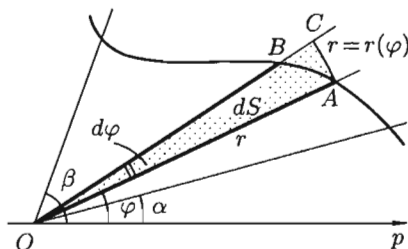


Рис. 179

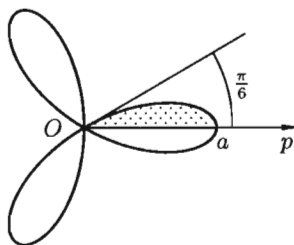


Рис. 180

Пример 41.3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a \cos 3\varphi$ (см. рис. 180).

○ Решение: Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (a \cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4}(\varphi|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6} \sin 6\varphi|_0^{\pi/6}) = \frac{a^2}{4}(\frac{\pi}{6} + 0) = \frac{\pi a^2}{24},\end{aligned}$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то лучами, выходящими из полюса, ее следует разбить на криволинейные секторы, к которым применить полученную формулу для нахождения площади. Так, для фигуры, изображенной на рисунке 181, имеем:

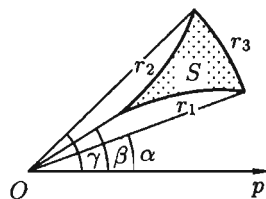


Рис. 181

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\gamma} r_3^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r_1^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\gamma} r_2^2 d\varphi.$$

41.3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Прямоугольные координаты

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB , уравнение которой $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$.

☞ Под **длиной дуги** AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю.

Покажем, что если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (41.3)$$

Применим схему I (метод сумм).

1. Точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (см. рис. 182). Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0 = A, M_1, \dots, M_n = B$ на кривой AB . Проведем хорды $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$. Получим ломаную $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}M_n$, длина которой равна $L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i$.

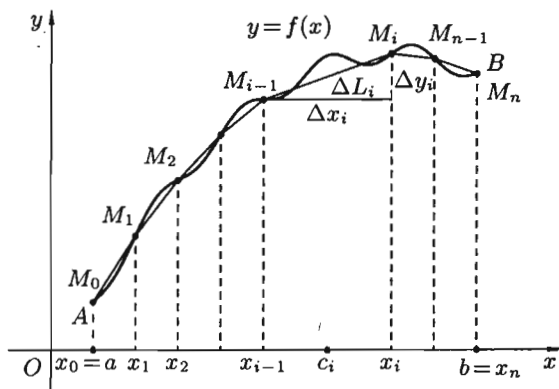


Рис. 182

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_i можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i :

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Поэтому

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i,$$

а длина всей ломаной $M_0 M_1 \dots M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i. \quad (41.4)$$

3. Длина l кривой AB , по определению, равна

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} L_n = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta L_i.$$

Заметим, что при $\Delta L_i \rightarrow 0$ также и $\Delta x_i \rightarrow 0$ ($\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$). Функция $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (41.4), когда $\max \Delta x_i \rightarrow 0$:

$$l = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Таким образом, $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, или в сокращенной записи $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Если уравнение кривой AB задано в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то длина l кривой AB находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (41.5)$$

Формула (41.5) может быть получена из формулы (41.3) подстановкой $x = x(t)$, $dx = x'(t) dt$, $f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Пример 41.4. Найти длину окружности радиуса R .

○ Решение: Найдем $\frac{1}{4}$ часть ее длины от точки $(0; R)$ до точки $(R; 0)$ (см. рис. 183). Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = R \cdot \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

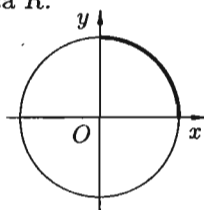


Рис. 183

Значит, $l = 2\pi R$. Если уравнение окружности записать в параметрическом виде $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), то

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = Rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R. \quad \bullet$$

Вычисление длины дуги может быть основано на применении метода дифференциала. Покажем, как можно получить формулу (41.3), применив схему II (метод дифференциала).

1. Возьмем произвольное значение $x \in [a; b]$ и рассмотрим переменный отрезок $[a; x]$. На нем величина l становится функцией от x , т. е. $l = l(x)$ ($l(a) = 0$ и $l(b) = l$).

2. Находим дифференциал dl функции $l = l(x)$ при изменении x на малую величину $\Delta x = dx$: $dl = l'(x) dx$. Найдем $l'(x)$, заменяя бесконечно малую дугу \widehat{MN} хордой Δl , стягивающей эту дугу (см. рис. 184):

$$\begin{aligned} l'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}. \end{aligned}$$

Стало быть, $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

3. Интегрируя dl в пределах от a до b , получаем $l = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2} dx$.

⇒ Равенство $dl = \sqrt{1 + y_x'^2} dx$ называется формулой **дифференциала дуги** в прямоугольных координатах.

Так как $y_x' = \frac{dy}{dx}$, то

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Последняя формула представляет собой теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника MCT (см. рис. 185).

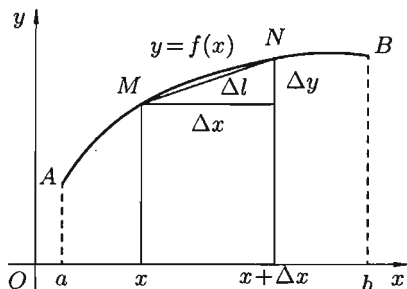


Рис. 184

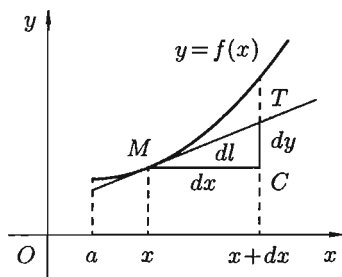


Рис. 185

Полярные координаты

Пусть кривая AB задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Если в равенствах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол φ , то кривую AB

можно задать параметрически $\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = r(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$ Тогда

$$\begin{cases} x'_\varphi = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \\ y'_\varphi = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} &= \\ &= \sqrt{(r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}. \end{aligned}$$

Применяя формулу (41.5), получаем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Пример 41.5. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

○ Решение: Кардиоида $r = a(1 + \cos \varphi)$ имеет вид, изображенный на рисунке 186. Она симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l &= \int_0^{\pi} \sqrt{(a(1 + \cos \varphi))^2 + (a(-\sin \varphi))^2} d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos \varphi} d\varphi = \\ &= a \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{1}{2}l = 4a$. Значит, $l = 8a$. ●

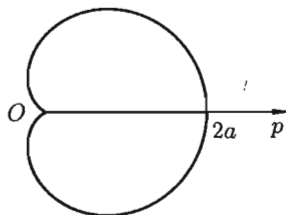


Рис. 186

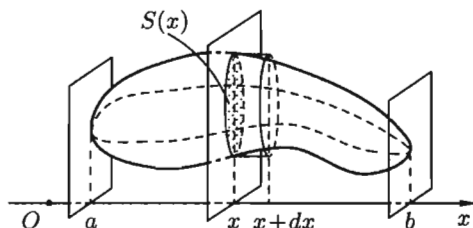


Рис. 187

41.4. Вычисление объема тела

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox : $S = S(x)$, $a \leq x \leq b$.

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость Π , перпендикулярную оси Ox (см. рис. 187). Обозначим через $S(x)$ площадь

сечения тела этой плоскостью; $S(x)$ считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении x . Через $v(x)$ обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости Π . Будем считать, что на отрезке $[a; x]$ величина v есть функция от x , т. е. $v = v(x)$ ($v(a) = 0$, $v(b) = V$).

2. Находим дифференциал dV функции $v = v(x)$. Он представляет собой «элементарный слой» тела, заключенный между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и $x + \Delta x$, который приближенно может быть принят за цилиндр с основанием $S(x)$ и высотой dx . Поэтому дифференциал объема $dV = S(x) dx$.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от a до b :

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (41.6)$$

Полученная формула называется **формулой объема тела по площади параллельных сечений**.

Пример 41.6. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение: Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее ($-a \leq x \leq a$), получим эллипс (см. рис. 188):

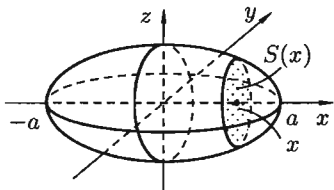


Рис. 188

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} + \frac{z^2}{(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2} = 1.$$

Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Поэтому, по формуле (41.6), имеем

$$V = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc. \quad \bullet$$

Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geq 0$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 189). Полученная от вращения фигура называется **телом вращения**. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , проведенной через произвольную точку x оси Ox ($x \in [a; b]$), есть круг с радиусом $y = f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi y^2$.

Применяя формулу (41.6) объема тела по площади параллельных сечений, получаем

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (41.7)$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geq 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy , по аналогии с формулой (41.7), равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (41.8)$$

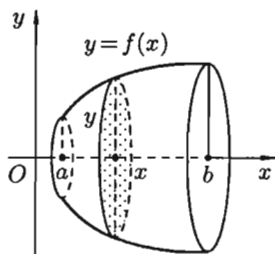


Рис. 189

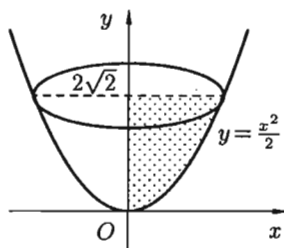


Рис. 190

Пример 41.7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy (см. рис. 190).

● Решение: По формуле (41.8) находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi. \quad \bullet$$

41.5. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая AB является графиком функции $y = f(x) \geq 0$, где $x \in [a; b]$, а функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на этом отрезке.

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox .

Применим схему II (метод дифференциала).

1. Через произвольную точку $x \in [a; b]$ проведем плоскость Π , перпендикулярную оси Ox . Плоскость Π пересекает поверхность вращения по окружности с радиусом $y = f(x)$ (см. рис. 191). Величина S поверхности части фигуры вращения, лежащей левее плоскости, является функцией от x , т. е. $s = s(x)$ ($s(a) = 0$ и $s(b) = S$).

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Через точку $x + dx \in [a; b]$ также проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox . Функция $s = s(x)$ получит приращение Δs , изображенного на рисунке в виде «пояска».

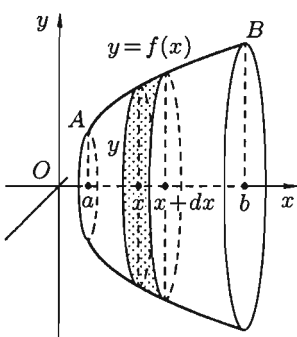


Рис. 191

Найдем дифференциал площади ds , заменяя образованную между сечениями фигуру усеченным конусом, образующая которого равна dl , а радиусы оснований равны y и $y + dy$. Площадь его боковой поверхности равна $ds = \pi(y + y + dy) \cdot dl = 2\pi y dl + \pi dy dl$. Отбрасывая произведение $dy dl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds , получаем $ds = 2\pi y dl$, или, так как $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$, то $ds = 2\pi y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (41.9)$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то формула (41.9) для площади поверхности вращения принимает вид

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Пример 41.8. Найти площадь поверхности шара радиуса R .

○ Решение: Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, вокруг оси Ox . По формуле (41.9) находим

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} dx = 2\pi R \cdot x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 41.9. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox .

○ Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_x &= 2\pi \int_0^\pi a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^\pi a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 8\pi a^2 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -8\pi a^2 \cdot 2 \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2 \left(\cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi - \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} \Big|_0^\pi\right) = \\ &= -16\pi a^2 \left(0 - 1 - 0 + \frac{1}{3}\right) = -16\pi a^2 \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{32\pi a^2}{3},\end{aligned}$$

т. е. $\frac{1}{2}S_x = \frac{32}{3}\pi a^2$. Следовательно, $S_x = \frac{64}{3}\pi a^2$. ●

41.6. Механические приложения определенного интеграла

Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ ($a < b$), находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (41.10)$$

(см. п. 36).

Пример 41.10. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

○ Решение: По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x , т. е. $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0,01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0,01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы (41.10) равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x \, dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж)}.$$

Пример 41.11. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать через край жидкость из вертикального цилиндрического резервуара высоты H м и радиусом основания R м.

○ Решение: Работа, затрачиваемая на поднятие тела весом p на высоту h , равна $p \cdot h$. Но различные слои жидкости в резервуаре находятся на различных глубинах и высота поднятия (до края резервуара) различных слоев не одинакова.

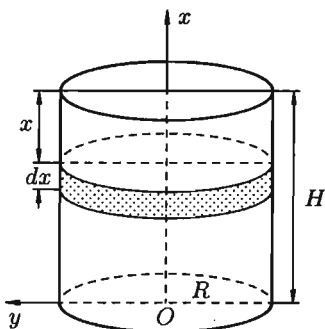


Рис. 192

Для решения поставленной задачи применим схему II (метод дифференциала). Введем систему координат так, как указано на рисунке 192.

1. Работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя жидкости толщиной x ($0 \leq x \leq H$), есть функция от x , т. е. $A = A(x)$, где $0 \leq x \leq H$ ($A(0) = 0$, $A(H) = A_0$).

2. Находим главную часть приращения ΔA при изменении x на величину $\Delta x = dx$, т. е. находим дифференциал dA функции $A(x)$.

Ввиду малости dx считаем, что «элементарный» слой жидкости находится на одной глубине x (от края резервуара) (см. рис. 192). Тогда $dA = dp \cdot x$, где dp — вес этого слоя; он равен $g \cdot \gamma \, dv$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, dv — объем «элементарного» слоя жидкости (на рисунке он выделен), т. е. $dp = g\gamma \, dv$. Объем указанного слоя жидкости, очевидно, равен $\pi R^2 \, dx$, где dx — высота цилиндра (слоя), πR^2 — площадь его основания, т. е. $dv = \pi R^2 \, dx$.

Таким образом, $dp = g\gamma \cdot \pi R^2 \, dx$ и $dA = g\gamma \pi R^2 \, dx \cdot x$.

3) Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = 0$ до $x = H$, находим

$$A_0 = \int_0^H g\gamma \pi R^2 x \, dx = \frac{1}{2} g\gamma \pi R^2 H^2 \quad (\text{Дж}).$$

Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Найдём путь S , пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2 .

○ Решение: Из физического смысла производной известно, что при движении точки в одном направлении «скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени», т. е. $v(t) = \frac{dS}{dt}$. Отсюда следует, что $dS = v(t) dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2 , получаем $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$. ●

Отметим, что эту же формулу можно получить, пользуясь схемой I или II применения определенного интеграла.

Пример 41.12. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

○ Решение: Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$S = \int_0^4 (10t + 2) dt = 5t^2 \Big|_0^4 + 2t \Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \quad (\text{м}).$$
 ●

Давление жидкости на вертикальную пластинку

По закону Паскаля давление жидкости на горизонтальную пластину равно весу столба этой жидкости, имеющего основанием пластинку, а высотой — глубиной ее погружения от свободной поверхности жидкости, т. е. $P = g \cdot \gamma \cdot S \cdot h$, где g — ускорение свободного падения, γ — плотность жидкости, S — площадь пластинки, h — глубина ее погружения.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; система координат выбрана так, как указано на рисунке 193. Для нахождения давления P жидкости на эту пластину применим схему II (метод дифференциала).

1. Пусть часть искомой величины P есть функция от x : $p = p(x)$, т. е. $p = p(x)$ — давление на часть пластины, соответствующее отрезку $[a; x]$ значений переменной x , где $x \in [a; b]$ ($p(a) = 0$, $p(b) = P$).

2. Дадим аргументу x приращение $\Delta x = dx$. Функция $p(x)$ получит приращение Δp (на рисунке — полоска-слой толщины dx). Найдем дифференциал dp этой функции. Ввиду малости dx будем приближенно считать полоску прямоугольником, все точки которого находятся на одной глубине x , т. е. пластинка эта — горизонтальная.

Тогда по закону Паскаля $dp = g \cdot \gamma \underbrace{(y_2 - y_1) \cdot dx}_S \cdot \underbrace{x}_h$.

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получим

$$P = g \cdot \gamma \int_a^b (y_2 - y_1) x dx \quad \text{или} \quad P = g\gamma \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \cdot x dx.$$

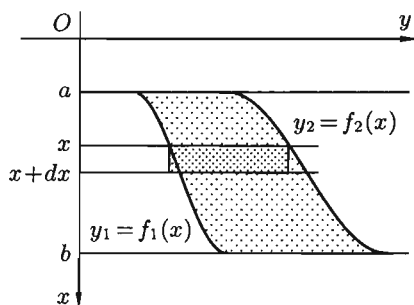


Рис. 193

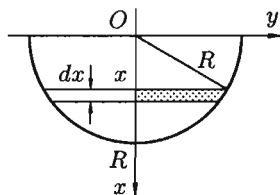


Рис. 194

Пример 41.13. Определить величину давления воды на полу-круг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R , а центр O находится на свободной поверхности воды (см. рис. 194).

○ Решение: Воспользуемся полученной формулой для нахождения да-вления жидкости на вертикальную пластинку. В данном случае пла-стинка ограничена линиями $y_1 = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2 = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x = 0$, $x = R$. Поэтому

$$\begin{aligned} P &= g\gamma \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2} - (-\sqrt{R^2 - x^2})) x dx = \\ &= 2g\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x dx = 2g\gamma \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) = \\ &= -g\gamma \cdot \frac{2\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}{3} \Big|_0^R = -\frac{2}{3}g\gamma(0 - R^3) = \frac{2}{3}g\gamma R^3. \quad \bullet \end{aligned}$$

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости Oxy задана система материальных точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$ соответственно с массами m_1, m_2, \dots, m_n .

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси Ox называется сумма произведений масс этих точек на их ординаты (т. е. на расстояния этих точек от оси Ox): $S_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i$.

Аналогично определяется статический момент S_y этой системы относительно оси Oy : $S_y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i$.

Если массы распределены непрерывным образом вдоль некоторой кривой, то для выражения статического момента понадобится интегрирование.

Пусть $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) — это уравнение материальной кривой AB . Будем считать ее однородной с постоянной линейной плотностью γ ($\gamma = \text{const}$).

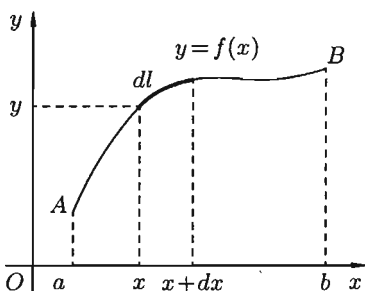


Рис. 195

Для произвольного $x \in [a; b]$ на кривой AB найдется точка с координатами $(x; y)$. Выделим на кривой элементарный участок длины dl , содержащий точку $(x; y)$. Тогда масса этого участка равна γdl . Примем этот участок dl приблизительно за точку, отстоящую от оси Ox на расстоянии y . Тогда дифференциал статического момента dS_x («элементарный момент») будет равен $\gamma dl \cdot y$, т. е. $dS_x = \gamma dl \cdot y$ (см. рис. 195).

Отсюда следует, что статический момент S_x кривой AB относительно оси Ox равен

$$S_x = \gamma \int_a^b y dl = \gamma \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Аналогично находим S_y :

$$S_y = \gamma \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Статические моменты S_x и S_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести (центра масс).

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси. Обозначим через $C(x_c; y_c)$ центр тяжести кривой AB .

Из определения центра тяжести следуют равенства $m \cdot x_c = S_y$ и $m \cdot y_c = S_x$ или $\gamma l \cdot x_c = S_y$ и $\gamma l \cdot y_c = S_x$. Отсюда $x_c = \frac{S_y}{\gamma l}$, $y_c = \frac{S_x}{\gamma l}$ или

$$x_c = \frac{\int_a^b x dl}{l} = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y dl}{l} = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}.$$

Пример 41.14. Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой координатной четверти (см. рис. 196).

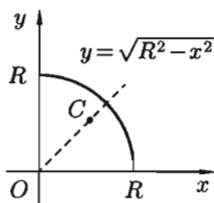


Рис. 196

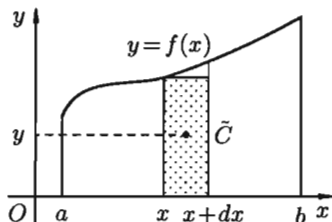


Рис. 197

○ Решение: Очевидно, длина указанной дуги окружности равна $\frac{\pi R}{2}$, т. е. $l = \frac{\pi R}{2}$. Найдем статический момент ее относительно оси Ox . Так как уравнение дуги есть $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, то ($\gamma = \text{const}$)

$$\begin{aligned} S_x &= \gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \\ &= \gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \gamma R \int_0^R dx = \gamma R x \Big|_0^R = \gamma R^2. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma l} = \frac{\gamma R^2}{\gamma \cdot \frac{\pi R}{2}} = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то $x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$. Итак, центр тяжести имеет координаты $\left(\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi} \right)$. ●

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоской фигуры

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (см. рис. 197).

Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна

($\gamma = \text{const}$). Тогда масса всей пластинки равна $\gamma \cdot S$, т. е. $m = \gamma \int_a^b f(x) dx$.

Выделим элементарный участок пластинки в виде бесконечно узкой вертикальной полосы и будем приближенно считать его прямоугольником.

Тогда масса его равна $\gamma \cdot y dx$. Центр тяжести \tilde{C} прямоугольника лежит на пересечении диагоналей прямоугольника. Эта точка \tilde{C} отстоит от оси Ox на $\frac{1}{2}y$, а от оси Oy на x (приближенно; точнее на расстоянии $x + \frac{1}{2}\Delta x$). Тогда для элементарных статических моментов относительно осей Ox и Oy выполнены соотношения

$$dS_x = \gamma \cdot y dx \cdot \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\gamma \cdot y^2 dx \quad \text{и} \quad dS_y = \gamma \cdot y dx \cdot x = \gamma xy dx.$$

Следовательно, $S_x = \frac{1}{2}\gamma \int_a^b y^2 dx$, $S_y = \gamma \int_a^b xy dx$.

По аналогии с плоской кривой получаем, обозначив координаты центра тяжести плоской фигуры (пластинки) через $C(x_c; y_c)$, что $m \cdot x_c = S_y$, $m \cdot y_c = S_x$. Отсюда

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{S_y}{\gamma S} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{S_x}{\gamma S}$$

или

$$x_c = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

Пример 41.15. Найдем координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$ ($\gamma = \text{const}$) (см. рис. 198).

○ Решение: Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Oy), что $x_c = 0$.

Площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Найдим S_x :

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma(R^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-R}^R = \frac{1}{2}\gamma(R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3}) = \gamma \cdot \frac{2}{3}R^3.$$

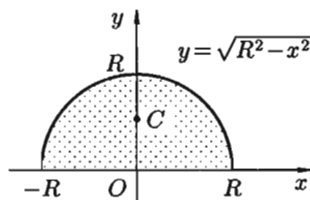


Рис. 198

Стало быть,

$$y_c = \frac{S_x}{\gamma S} = \frac{2\gamma R^3}{3\gamma \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Итак, центр тяжести имеет координаты $C(0; \frac{4R}{3\pi})$.

§ 42. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции $f(x)$. Если можно найти первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Но отыскание первообразной функции иногда весьма сложно; кроме того, как известно, не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих и других случаях (например, функция $y = f(x)$ задана графически или таблично) прибегают к приближенным формулам, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Рассмотрим три наиболее употребительные формулы приближенного вычисления определенного интеграла — формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

42.1. Формула прямоугольников

Пусть на отрезке $[a; b]$, $a < b$, задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции, т. е. отрезок $[a; b]$, на n равных частей (отрезков) длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (шаг разбиения) с помощью точек $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Можно записать, что $x_i = x_0 + h \cdot i$, где $i = 1, 2, \dots, n$ (см. рис. 199).

В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \tilde{y}_i$.

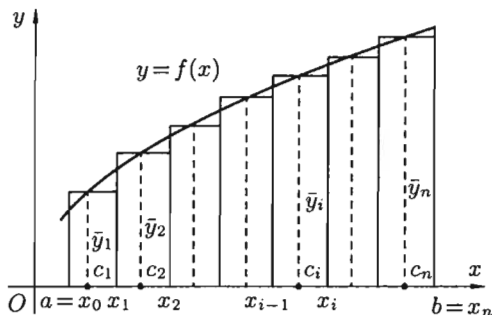


Рис. 199

Тогда сумма площадей всех n прямоугольников дает площадь ступенчатой фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \dots + \tilde{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right). \quad (42.1)$$

Формула (42.1) называется **формулой средних прямоугольников**.

Абсолютная погрешность приближенного равенства (42.1) оценивается с помощью следующей формулы:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2},$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a; b]$,

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right|.$$

Отметим, что для линейной функции ($f(x) = kx + b$) формула (42.1) дает точный ответ, поскольку в этом случае $f''(x) = 0$.

42.2. Формула трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Абсциссы точек деления $a = x_0, x_1, x_2, \dots, b = x_n$ (рис. 200). Пусть y_0, y_1, \dots, y_n — соответствующие им ординаты графика функции. Тогда

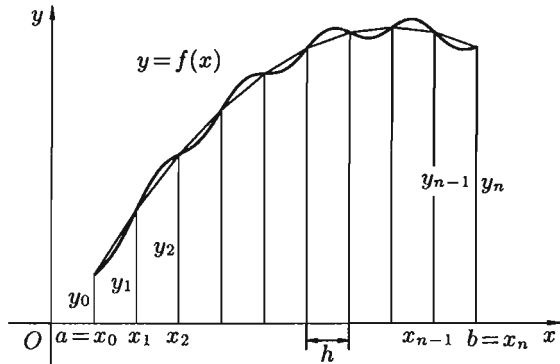


Рис. 200

расчетные формулы для этих значений примут вид $x_i = a + h \cdot i$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $h = \frac{b-a}{n}$.

Заменим кривую $y = f(x)$ ломаной линией, звенья которой соединяют концы ординат y_i и y_{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Тогда площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i , y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (42.2)$$

⇒ Формула (42.2) называется **формулой трапеций**.

Абсолютная погрешность R_n приближения, полученного по формуле трапеций, оценивается с помощью формулы $|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2$, где $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$. Снова для линейной функции $y = kx + b$ формула (42.2) — точная.

42.3. Формула парабол (Симпсона)

Если заменить график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ разбиения не отрезками прямых, как в методах трапеций и прямоугольников, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Предварительно найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком параболы $y = ax^2 + bx + c$, сбоку — прямыми $x = -h$, $x = h$ и снизу — отрезком $[-h; h]$.

Пусть парабола проходит через три точки $M_1(-h; y_0)$, $M_2(0; y_1)$, $M_3(h; y_2)$, где $y_0 = ah^2 - bh + c$ — ордината параболы в точке $x = -h$; $y_1 = c$ — ордината параболы в точке $x = 0$; $y_2 = ah^2 + bh + c$ — ордината параболы в точке $x = h$ (см. рис. 201). Площадь S равна

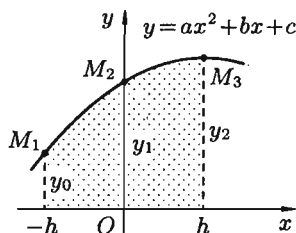


Рис. 201

$$S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx =$$

$$= \left(a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch. \quad (42.3)$$

Выразим эту площадь через h , y_0 , y_1 , y_2 . Из равенств для ординат y_i находим, что $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$. Подставляя эти значения c и a в равенство (42.3), получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3} h^3 \cdot \frac{1}{2h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 = \\ &= \frac{h}{3} (y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned} \quad (42.4)$$

Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Для этого отрезок $[a; b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков) длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 2n$). В точках деления $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ вычисляем значения подынтегральной функции $f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, где $y_i = f(x_i)$ (см. рис. 202).

Заменяем каждую пару соседних элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными h , одной элементарной параболической трапецией с основанием, равным $2h$. На отрезке $[x_0; x_2]$ парабола проходит через три точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Используя формулу (42.4), находим

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

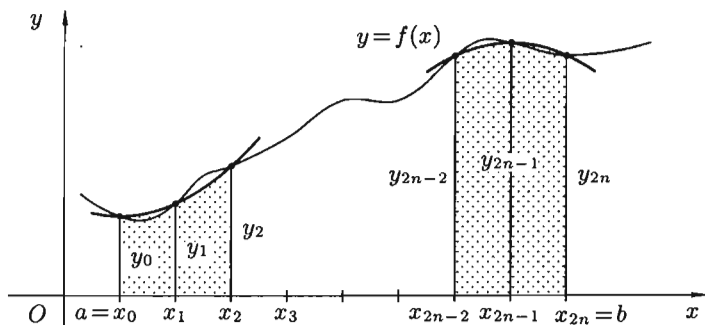


Рис. 202

Аналогично находим

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \dots,$$

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + \right. \\ \left. + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right). \quad (42.5)$$

Формула (42.5) называется **формулой парабол** (или Симпсона). Абсолютная погрешность вычисления по формуле (42.5) оценивается соотношением

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot M_4, \quad \text{где } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|.$$

Отметим, что формула (42.5) дает точное значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$ во всех случаях, когда $f(x)$ — многочлен, степень которого меньше или равна трем (тогда $f^{IV} = 0$).

Пример 42.1. Вычислить $\int_0^2 x^3 dx$, разбив отрезок интегрирования $[0; 2]$ на 4 части.

○ Решение: Имеем: $f(x) = x^3$,

$$a = x_0 = 0; \quad b = x_4 = 2, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{1}{8}; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{3}{2}, \quad y_3 = \frac{27}{8}; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = 8;$$

(см. рис. 203)

а) по формуле прямоугольников:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{4}, \quad \tilde{y}_1 = \frac{1}{64}; & c_2 &= \frac{3}{4}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{27}{64}; \\ c_3 &= \frac{5}{4}, \quad \tilde{y}_3 = \frac{125}{64}; & c_4 &= \frac{7}{4}, \quad \tilde{y}_4 = \frac{343}{64}, \end{aligned}$$

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64} \right) = 3,875, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^2 x^3 dx \approx 3,875;$$

б) по формуле трапеции:

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8} \right) = 4,25, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^2 x^3 dx \approx 4,25;$$

в) по формуле парабол:

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{2}{6 \cdot 2} \left(0 + 8 + 4 \left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8} \right) + 2 \cdot 1 \right) = 4, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^2 x^3 dx \approx 4.$$

$$\text{Точное значение интеграла } \int_0^2 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = 4.$$

Абсолютные погрешности соответствующих формул таковы:
а) 0,125; б) 0,25; в) 0.

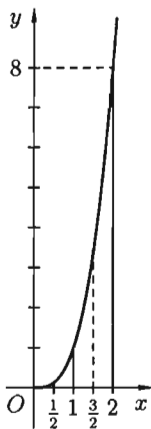


Рис. 203