Формула полной вероятности и формула Байеса

Теорема (формула полной вероятности). Пусть события $A_1,...,A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, т.е. удовлетворяют условиям:

1) $\forall i = 1,...,n \quad P(A_i) > 0;$
2) $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset;$
3) $A_1 \cup ... \cup A_i \cup ... \cup A_n = \Omega.$

Пусть A – событие, для которого при любом $i = 1,...,n$ известны условные вероятности $P(A|A_i)$. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(A|A_i). \tag{1}$$

Теорема (формула Байеса). Пусть события $A_1,...,A_n$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, известны $P(A|H_i)$ и вероятность $P(A) > 0$. Тогда имеет место равенство

$$P(A_i|A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A|A_i)}{P(A)}, \ \forall \quad i = 1,...,n. \tag{2}$$

<u>Замечание.</u> События A_i называют гипотезами. Вероятности $P(A_i)$ считаются известными до того, как решается вопрос о вычислении $P(A)$, поэтому их называют априорными вероятностями гипотез. Вероятности $P(A_i|A)$ вычисляются после проведения эксперимента и называются апостериорными вероятностями гипотез.

1.1. Формула полной вероятности и формула Байеса

1. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 и 0.9. а) Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу. б) Произведенный выстрел оказался успешным. Найти вероятность того, что выстрел был сделан из четвертого ружья.
2. В трех урнах находится по 8 черных и 2 белых шара в каждой, а в двух других – по 6 черных и 4 белых в каждой. Наугад выбирается одна из этих пяти урн, а из нее берутся два шара. Какова вероятность, что оба шара белого цвета.
3. Три оператора радиолокационной установки проводят соответственно 25%, 35% и 40% всех измерений, допуская при этом 5%, 4% и 2% ошибок соответственно. Случайно выбранное измерение оказалось ошибочным. Найти вероятность того, что оно было выполнено третьим оператором.

4. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.
5. Имеется три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой партии, второй и третьей партиях соответственно равны 20, 15, 10. Из наудачу взятой партии извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращается в эту же партию и вторично из нее извлекается деталь, которая снова оказалась стандартной. Найти вероятность того, что детали извлекались из третьей партии.
6. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно 0.3, 0.5 и 0.2. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы – 0,5, для второй – 0.8, для третьей – 0.4. Пассажир направился в одну из касс и приобрел билет. Какова вероятность того, что это была вторая касса?
7. В сосуд, содержащий N шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном количестве белых шаров в сосуде равновозможны?

1.2. Задачи для самостоятельной работы

1. Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (считать, что мужчин и женщин одинаковое количество).
2. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора, ненормальный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равно 0.1; в ненормальном – 0.7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t.
3. На трех дочерей – Юлю, Марину и Лену – в семье возложена обязанность мыть посуду. Поскольку Юля старшая, ей приходиться выполнять 40 % всей работы. Остальные 60 % работы приходятся поровну на Марину и Лену. Вероятность разбить что–нибудь из посуды (в течение одного мытья) для Юли, Марины и Лены равны соответственно: 0.02, 0.03, 0.05. Родители не знают, кто дежурил вечером, но они слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность того, что посуду мыла: Юля; Марина; Лена?

4. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых, во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух наудачу взяли один шар. Найти вероятность того, что из двух шаров будет выбран белый.
5. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.
6. В урне имеется N шаров, причем цвет каждого из них с равной вероятностью может быть белым или черным. Извлекаются последовательно K шаров, причем каждый раз после извлечения шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались?
7. Имеются три партии по 20 деталей каждая. В одной находятся две бракованных детали, в другой – четыре, в третьей – шесть. Извлеченные случайным образом из какой-то партии две детали оказались бракованными. Какова вероятность, что это была первая, вторая, третья партии?
8. Пусть некоторое насекомое с вероятностью $(\lambda^k / k!)e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ кладёт k яиц, а вероятность развития насекомого из яйца равна p. Найти вероятность того, что у насекомого будет: а) потомство; б) будет только один потомок.