

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Целями работы являются

- повторение основных понятий линейной алгебры: определителя, матрицы и действий над ними, обратной матрицы, системы линейных алгебраических уравнений;
- закрепление навыков решения задач по линейной алгебре, полученных на аудиторных занятиях.

Задание для разбора

Задача 1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4, \\ -x + 2y + 3z = -7, \\ 3x - y - 2z = 7. \end{cases}$$

Задача 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$$

Задача 4. Вычислить матрицу $C = 2A^2 - 3A + (A^T \cdot A)^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Найти матрицу $D = A^2 - 2AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Разбор задач

Задача 1. Решить систему уравнений правилом Крамера, матричным способом и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4, \\ -x + 2y + 3z = -7, \\ 3x - y - 2z = 7. \end{cases}$$

Решение.

а) Правило Крамера.

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 9 - 1 + 6 - 2 + 6 = 10 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 21 - 7 + 14 - 14 + 12 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -7 & 3 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 28 + 36 + 7 - 21 - 8 - 42 = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 21 + 4 - 24 + 7 - 14 = -20,$$

откуда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-20}{10} = -2$. Сделаем проверку:

$$\begin{cases} 2 + 0 + 2 \equiv 4, \\ -1 + 0 - 6 \equiv -7, \\ 3 - 0 + 4 \equiv 7. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$; $y = 0$; $z = -2$.

б) Матричный способ.

Запишем систему в матричной форме $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ –

матрица коэффициентов при неизвестных, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $B =$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ – столбец правых частей. Решение ищем в виде $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем матрицу A^{-1} , обратную матрице A .

- Определитель матрицы A равен $\Delta = 10 \neq 0$, следовательно, матрица A имеет обратную ей матрицу.
- Найдем алгебраические дополнения всех элементов определителя Δ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(2 - 9) = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 3) = 5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5.$$

○ Составим матрицу из алгебраических дополнений $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

○ Транспонируя матрицу A^* , получим $(A^*)^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & -5 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

○ Умножим последнюю матрицу на величину $\frac{1}{\Delta}$, получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & -5 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

○ Сделаем проверку $A^{-1} \cdot A = E$:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & -5 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 - 3 + 15 & -1 + 6 - 5 & 1 + 9 - 10 \\ 14 + 1 - 15 & 7 - 2 + 5 & -7 - 3 + 10 \\ -10 - 5 + 15 & -5 + 10 - 5 & 5 + 15 - 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

○ Найдем решение матричной системы:

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & -5 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 - 21 + 35 \\ 28 + 7 - 35 \\ -20 - 35 + 35 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно, $x = 1$; $y = 0$; $z = -2$.

в) Метод Гаусса.

Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & 7 & -14 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 7 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Здесь выполнены следующие преобразования:

- поменяли местами первую и вторую строки;
- первую строку умножили на 2 и прибавили ко второй строке; первую строку умножили на 3 и прибавили к третьей строке;
- вторую строку поделили на 5;
- вторую строку умножили на (-5) и прибавили к третьей строке.

Последней матрице соответствует система уравнений $\begin{cases} -x + 2y + 3z = -7, \\ y + z = -2, \\ 2z = -4, \end{cases}$ решая которую, получим ответ: $x = 1$; $y = 0$; $z = -2$.

Задача 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Сделаем нулями все элементы первого столбца, кроме -1. К элементам первой строки прибавим третью строку; первую строку умножим на 3 и прибавим к четвертой строке; к первой строке прибавим пятую строку, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & 12 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

- Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 12 & 9 & 14 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

- Вынесем из первого столбца общий множитель 3:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 12 & 9 & 14 \\ 1 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

- Вновь сделаем нулями все элементы первого столбца, кроме 1 в первой строке. Умножим первую строку на (-1) и прибавим ко второй строке и к четвертой строке; умножим первую строку на (-2) и прибавим к третьей строке:

$$\Delta = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}.$$

- Разложим определитель по первому столбцу:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 8 & 11 & -2 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}.$$

- Умножим первую строку на (-8) и прибавим ко второй строке:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -29 & 6 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}.$$

- Разложим определитель по первому столбцу:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -29 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -3(87 - 42) = -135.$$

Задача 3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 13 \\ 0 & -8 & 1 & 3 & -19 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & 25 & 19 & -19 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & -17 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Здесь выполнены следующие преобразования:

- первую строку умножили на 2 и прибавили к третьей строке; первую строку умножили на (-3) и прибавили к четвертой строке;

- вторую строку умножили на (-5) и прибавили к третьей строке; вторую строку умножили на 8 и прибавили к четвертой строке;
- третью строку умножили на 19, четвертую умножили на 13 и сложили.

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 4, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ -18x_3 - 13x_4 = 13, \\ -17x_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = 0; x_4 = -1$.

Сделаем проверку:

$$\begin{cases} -1 + 4 + 1 \equiv 4, \\ 2 + 0 - 2 \equiv 0, \\ 2 + 2 - 0 + 1 \equiv 5, \\ -3 - 4 + 0 \equiv -7. \end{cases}$$

Задача 4. Вычислить матрицу $C = 2A^2 - 3A + (A^T \cdot A)^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем

$$B = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9 & -2-6 \\ -2-6 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу B^{-1} , обратную матрице B :

- Определитель матрицы B :

$$\Delta(B) = \begin{vmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 65 - 64 = 1 \neq 0.$$

- Найдем алгебраические дополнения всех элементов:

$$B_{11} = (-1)^{1+1}5 = 5; B_{12} = (-1)^{1+2}(-8) = 8; B_{21} = (-1)^{2+1}(-8) = 8;$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2}13 = 13.$$

- Составим матрицу из алгебраических дополнений $B^* = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

- Транспонируем эту матрицу: $(B^*)^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

- Тогда обратная матрица имеет вид $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

- Сделаем проверку:

$$B^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65-64 & -40+40 \\ 104-104 & -64+65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$\text{Найдем } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -1 & 21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 5. Найти матрицу $D = A^2 - 2AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+4 & 2 & -2+2 \\ -1-2+6 & 4+3 & 2-6+3 \\ -2+1+2 & -2+1 & 4+3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}; \\ 2A \cdot B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 6 & -1-4 & 2+4 \\ -2+9 & 1-4-6 & -2+2+6 \\ 1+3 & 2+2-2 & -4-1+2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 6 \\ 7 & -9 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & -10 & 12 \\ 14 & -18 & 12 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Тогда

$$D = A^2 - 2AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -10 & 12 \\ 14 & -18 & 12 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -12 \\ -11 & 25 & -13 \\ -7 & -5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варианты для решения

ВАРИАНТ 1

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 5x + 12y - 2z = -1, \\ 4x + 9y - 2z = 2. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

4. Решить уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$

5. Найти матрицу $D = 2A - 3B^2 + A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

ВАРИАНТ 2

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x + 8y + z = 2, \\ 3x - 2y + 6z = -7, \\ 2x + y - z = -5. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

4. Решить уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

5. Найти матрицу $D = (2A^2 - B)B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

ВАРИАНТ 3

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

2. Вычислить: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 31 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -21 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

4. Найти $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 1).$

5. Найти матрицу $D = A^2 - 4BA$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

ВАРИАНТ 4

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + 2y + 2z = 2. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

4. Найти $A^{-1} + 2A^2 + 3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2A - 3B^2 + A^3$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 5

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + 4y - 3z = -5. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

4. Найти $D = AC^{-1} + (AB)^2 - 3ACB$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2A^2 - 3B^2A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 6

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6, \\ 3x - y + 3z = -7, \\ 2x + y - 2z = 9. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

4. Вычислить определитель матрицы $C = 2A - 3A^2 + 5A^3$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2A^2 + 4B^2A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 8 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 7

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

4. Решить уравнение: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

5. Найти матрицу $D = 3B^2A - 2A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 8

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -8, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Найти X^{-1} , если $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2A \cdot (A^2 + B^2)$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 9

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

4. Найти $C = (AB)^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = (2B^3 - A)B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 10

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -7. \end{cases}$$

4. Найти $(2A - B) \cdot C^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = A^2B + B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 11

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ -x_1 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$$

4. Найти $3A^3 - 2A^2 - (A \cdot A^T)^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2A^2 + B^2A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 12

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - 2y + 2z = -5, \\ 7x + y + z = 10. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = -2, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ -3x_1 + x_2 - x_4 = -8, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

4. Вычислить определитель матрицы $C^{-1} = (2A - 3A^2 + 5A^3)^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2AB + B^2$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 13

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3, \\ 2x + y + 3z = 2, \\ 3x + y - 4z = -6. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

4. Найти $A^T \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2B^2A - B^3$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 14

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = -6, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -6. \end{cases}$$

4. Найти X^{-1} , где $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = A^2B^2 - 2B^3$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 15

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 11 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}.$$

4. Найти $(A^7)^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = AB - 2A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 16

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

4. Вычислить определитель матрицы $C = (2A - 3A^2 + 5A^3)^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = 2A - AB^2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 17

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3, \\ 4x + 2y + 5z = 7, \\ 3x + 4y + 5z = 9. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 3, \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Найти A^{-1} , где $A = C^2$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 18

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -6, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

4. Вычислить определитель матрицы C^{-1} , если $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 19

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 2, \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$$

4. Найти $BA + 2B^{-1} - 3A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \\ -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 20

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + z = 3, \\ x + y - z = 5. \end{cases}$$

2. Вычислить: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -6, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

4. Вычислить определитель матрицы C^{-1} , если $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 21

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

2. Вычислить: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6, \\ -x_1 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Найти $C = A^{-2} - 2A - A^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 22

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

2. Вычислить:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -7, \\ 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = -10, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Найти $A^T A$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 23

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 1, \\ -x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}.$$

4. Найти x из уравнения

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 24

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + y + 4z = 9, \\ 3x + 5y + 2z = 10. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 - x_4 = -2, \\ -5x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_3 + 9x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Найти $(A^2 + E)^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы $C = AB$ и $D = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

ВАРИАНТ 25

1. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера, матричным способом и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

2. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

4. Найти $A^2 - 3A + 2A^{-1} - A^{-2}$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу $D = A^2 + 2B^3$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Справочный материал

1. **Определитель второго порядка** задается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. **Определитель третьего порядка** задается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

3. Способы вычисления определителя третьего порядка.

- **Правило Саррюса (дополнения):**

- **Правило треугольников:**

- **Разложение определителя по первой строке:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

4. **Матрицей** A называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5. **Суммой** $A+B$ матриц A и B называется матрица C , элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

6. **Произведением** λA матрицы A на число λ называется матрица B , элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы A на число λ : $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

7. **Произведением** AB матриц A и B называется матрица C , элементы c_{ij} которой равны сумме произведений соответствующих элементов i -ой строки матрицы A и j -го столбца матрицы B : $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

8. Если A – невырожденная квадратная матрица (определитель матрицы $A \neq 0$), то существует единственная матрица A^{-1} , называемая **обратной** матрице A , такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.
9. Чтобы **найти** A^{-1} необходимо:

- вычислить определитель $\Delta = \det A$ матрицы A , $\Delta \neq 0$;
- найти алгебраические дополнения A_{ij} каждого элемента a_{ij} определителя матрицы A ;
- составить из чисел A_{ij} матрицу A^* ;
- транспонировав матрицу A^* , составить матрицу $(A^*)^T$;
- умножить матрицу $(A^*)^T$ на число $\frac{1}{\Delta}$.

В результате получим матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(A^*)^T$, обратную A .

10. Система линейных уравнений третьего порядка имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

- Правило Крамера: если определитель матрицы системы, составленной из коэффициентов a_{ij} при неизвестных x , не равен 0, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы системы; Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой k -го столбца столбцом правых частей системы, $k = 1, 2, 3$.

- Матричный способ: система линейных уравнений в матричной форме имеет вид

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения определяется формулой

$$X = A^{-1}B.$$

Решения матричных уравнений:

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1};$$

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$