

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

**Целями работы являются**

- повторение основных понятий векторной алгебры: понятие вектора; свойства линейных операций над векторами; понятия и свойства скалярного, векторного и смешанного произведений векторов и применение этих свойств для решения геометрических и физических задач;
- закрепление навыков решения задач по векторной алгебре, полученных на аудиторных занятиях.

### Задание для разбора

**Задача 1.** Разложить вектор  $\vec{d}$  по векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , если

$$\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; 2; -1), \vec{c} = (-1; 3; -2), \vec{d} = (4; -7; 7).$$

**Задача 2.** По координатам точек  $A, B, C$  для указанных векторов найти:

- 1)  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; 3) направляющие косинусы вектора  $\vec{a}$ ; 4)  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;  
5)  $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{c}$ ; 6) координаты точки  $M$ , делящей отрезок  $l$  в отношении  $\alpha: \beta$ , если:  
 $A(-1; 2; 0); B(2; 4; 6); C(-2; -1; 3); \vec{a} = 3 \cdot \overrightarrow{BA} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}; \vec{b} = \overrightarrow{AB};$   
 $\vec{c} = \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}; \vec{d} = \overrightarrow{CB}; l = |\overrightarrow{CA}|; \alpha = 1; \beta = 2.$

**Задача 3.** Найти:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;  $|\vec{a}|$ ;  $|\vec{b}|$ ;  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;  $\sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ; площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и длину диагоналей  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , где  $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ;  $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$ ;  $|\vec{m}| = 2$ ;  $|\vec{n}| = 1$ ;  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ .

**Задача 4.** Вершины пирамиды находятся в точках  $A, B, C, D$ . Найти: длину ребра  $AB$ ; площадь грани  $ABC$ ; объем  $V$  пирамиды; длину высоты, опущенной из вершины  $D$ , если  $A(3; 2; 5); B(-2; 1; -3); C(0; 4; -2); D(5; -4; -2)$ . Начертить пирамиду.

## Разбор задач

**Задача 1.** Разложить вектор  $\vec{d}$  по векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , если

$$\vec{a} = (2; -1; 3), \vec{b} = (1; 2; -1), \vec{c} = (-1; 3; -2), \vec{d} = (4; -7; 7).$$

*Решение.* Разложить вектор по векторам, значит представить его в виде

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Подставим в равенство координаты данных векторов:

$$\begin{aligned} (4; -7; 7) &= (2\alpha; -\alpha; 3\alpha) + (\beta; 2\beta; -\beta) + (-\gamma; 3\gamma; -2\gamma) = \\ &= (2\alpha + \beta - \gamma; -\alpha + 2\beta + 3\gamma; 3\alpha - \beta - 2\gamma). \end{aligned}$$

Приравняв соответствующие координаты, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - \gamma = 4, \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = -7, \\ 3\alpha - \beta - 2\gamma = 7. \end{cases}$$

Методом Гаусса найдем неизвестные  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$ . Составим расширенную матрицу и выполним следующие элементарные преобразования:

- поменяем местами первую и вторую строки;
- первую строку умножим на 2 и прибавим ко второй строке; первую строку умножили на 3 и прибавим к третьей строке;
- вторую строку поделим на 5;
- вторую строку умножим на -5 и прибавим к третьей строке:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & 7 & -14 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 7 & -14 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последней матрице соответствует система уравнений: 
$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + 3\gamma = -7, \\ \beta + \gamma = -2, \\ 2\gamma = -4. \end{cases}$$

Откуда имеем  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0$ ;  $\gamma = -2$ .

Сделаем проверку 
$$\begin{cases} 2 + 0 + 2 \equiv 4, \\ -1 + 0 - 6 \equiv -7, \\ 3 - 0 + 4 \equiv 7. \end{cases}$$
 Следовательно,  $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{c}$ .

**Задача 2.** По координатам точек  $A, B, C$  для указанных векторов найти:

- 1)  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; 3) направляющие косинусы вектора  $\vec{a}$ ; 4)  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;
- 5)  $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{c}$ ; 6) координаты точки  $M$ , делящей отрезок  $l$  в отношении  $\alpha : \beta$ , если  $A(-1; 2; 0)$ ;  $B(2; 4; 6)$ ;  $C(-2; -1; 3)$ ;  $\vec{a} = 3 \cdot \overrightarrow{BA} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ;
- $\vec{c} = \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$ ;  $l = |\overrightarrow{CA}|$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 2$ .

*Решение.* Найдем координаты векторов

$$\overrightarrow{BA} = (-3; -2; -6); \overrightarrow{AB} = (3; 2; 6); \overrightarrow{AC} = (-1; -3; 3); \overrightarrow{BC} = (-4; -5; -3); \overrightarrow{CB} = (4; 5; 3).$$

$$\text{Тогда } \vec{a} = 3 \cdot \overrightarrow{BA} - 2 \cdot \overrightarrow{AC} = (-9; -6; -18) - (-2; -6; 6) = (-7; 0; -24),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (3; 2; 6), \vec{c} = \overrightarrow{BC} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} = (-4; -5; -3) + (-2; -6; 6) = (-6; -11; 3), \vec{d} = \overrightarrow{CB} = (4; 5; 3).$$

1) Вычислим  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  по формуле  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} = \sqrt{625} = 25; \quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

2) Вычислим  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = (-7) \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-24) \cdot 6 = -165$ .

3) Найдем направляющие косинусы вектора  $\vec{a}$  по формулам

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \text{ Тогда } \cos \alpha = \frac{-7}{25}; \cos \beta = 0; \cos \gamma = \frac{-24}{25}.$$

4) Найдем  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ .

$$\vec{a} = (-7; 0; -24); \vec{b} = (3; 2; 6). \text{ Тогда } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-165}{25 \cdot 7} = \frac{-33}{35}.$$

5) Найдем  $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|}$ .

$$\vec{c} = (-6; -11; 3); \vec{d} = (4; 5; 3).$$

$$\text{Тогда } \text{pr}_{\vec{a}} \vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-6) \cdot (-7) + (-11) \cdot 0 + 3 \cdot (-24)}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{-70}{\sqrt{50}} = \frac{-70}{5\sqrt{2}} = -7\sqrt{2}.$$

6) Координаты точки  $M$ , делящий отрезок  $|\overrightarrow{CA}|$  в отношении 1:2 вычисляются по формулам:  $x_M = \frac{x_C + \mu x_A}{1 + \mu}$ ,  $y_M = \frac{y_C + \mu y_A}{1 + \mu}$ ,  $z_M = \frac{z_C + \mu z_A}{1 + \mu}$ , где  $\mu = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ . Подставляя

данные, получим  $x_M = \frac{-2 + 0,5(-1)}{1 + 0,5} = -\frac{5}{3}$ ,  $y_M = \frac{-1 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = 0$ ,  $z_M = \frac{3 + 0}{1 + 0,5} = 2$ . Следовательно, координаты точки  $M$  равны  $(-\frac{5}{3}; 0; 2)$ .

**Задача 3.** Найти:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;  $|\vec{a}|$ ;  $|\vec{b}|$ ;  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;  $\sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ; площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и длину диагоналей  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , где  $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ;  $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$ ;  $|\vec{m}| = 2$ ;  $|\vec{n}| = 1$ ;  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ .

*Решение.*

1) Найдем  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (3\vec{m} + \vec{n}) = 3(\vec{m} \cdot \vec{m}) - 6(\vec{n} \cdot \vec{m}) + (\vec{m} \cdot \vec{n}) - 2(\vec{n} \cdot \vec{n}) = 3|\vec{m}|^2 - 5|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cos \frac{\pi}{3} - 2|\vec{n}|^2 = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 12 - 5 - 2 = 5.$$

2) Найдем  $|\vec{a}|$ ;  $|\vec{b}|$ .

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} = \sqrt{(\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (\vec{m} - 2\vec{n})} = \sqrt{|\vec{m}|^2 - 4|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cos \frac{\pi}{3} + 4|\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4} = 2;$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b} \cdot \vec{b})} = \sqrt{(3\vec{m} + \vec{n}) \cdot (3\vec{m} + \vec{n})} = \sqrt{9|\vec{m}|^2 + 6|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cos \frac{\pi}{3} + |\vec{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{36 + 6 + 1} = \sqrt{43}.$$

3) Найдем  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ;  $\sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ .

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{43}} = \frac{5\sqrt{43}}{86};$$

$$\sin(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a} \wedge \vec{b})} = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{43}}{86}\right)^2} = \frac{7\sqrt{129}}{86}.$$

4) Найдем площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$S_{\text{парал}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(\vec{m} - 2\vec{n}) \times (3\vec{m} + \vec{n})|$$

$$= |3(\vec{m} \times \vec{m}) - 6(\vec{n} \times \vec{m}) + (\vec{m} \times \vec{n}) - 2(\vec{n} \times \vec{n})| =$$

$$= |6(\vec{m} \times \vec{n}) + (\vec{m} \times \vec{n})| = |7(\vec{m} \times \vec{n})| = 7|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \sin \frac{\pi}{3} = 7 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

5) Найдем длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{m} + \vec{n}| = |4\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{(4\vec{m} - \vec{n}) \cdot (4\vec{m} - \vec{n})} =$$

$$= \sqrt{16|\vec{m}|^2 - 8|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cos \frac{\pi}{3} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{16 \cdot 4 - 8 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{64 - 8 + 1} =$$

$$= \sqrt{57}.$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{m} - 2\vec{n} - 3\vec{m} - \vec{n}| = |-2\vec{m} - 3\vec{n}| = \sqrt{(2\vec{m} + 3\vec{n}) \cdot (2\vec{m} + 3\vec{n})} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{m}|^2 + 12|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cos \frac{\pi}{3} + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{4 \cdot 4 + 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 9} =$$

$$= \sqrt{16 + 12 + 9} = \sqrt{37}.$$

**Задача 4.** Вершины пирамиды находятся в точках  $A, B, C, D$ . Найти: длину ребра  $AB$ ; площадь грани  $ABC$ ; объем  $V$  пирамиды; длину высоты, опущенной из вершины  $D$ , если  $A(3; 2; 5)$ ;  $B(-2; 1; -3)$ ;  $C(0; 4; -2)$ ;  $D(5; -4; -2)$ . Начертить пирамиду.

1) Найти длину ребра  $AB$ .

Найдем координаты вектора

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 3; 1 - 2; -3 - 5) = (-5; -1; -8),$$

тогда

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 1 + 64} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

2) Найти площадь грани  $ABC$ .

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{\text{парал}} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|; \overrightarrow{AB} = (-5; -1; -8); \overrightarrow{AC} = (-3; 2; -7).$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -1 & -8 \\ -3 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 24\vec{j} - 10\vec{k} - 3\vec{k} - 35\vec{j} + 16\vec{i} = \\ &= 23\vec{i} - 11\vec{j} - 13\vec{k} = (23; -11; -13). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{парал}} &= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{23^2 + (-11)^2 + (-13)^2} = \sqrt{529 + 121 + 169} = \sqrt{819} = \\ &= 3\sqrt{91}. \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2} \sqrt{91}.$$

3) Найти объем пирамиды.

$$V_{\text{пир}} = \pm \frac{1}{6} V_{\text{парал}} = \pm \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

$\overrightarrow{AB} = (-5; -1; -8); \overrightarrow{AC} = (-3; 2; -7); \overrightarrow{AD} = (2; -6; -7)$ , тогда

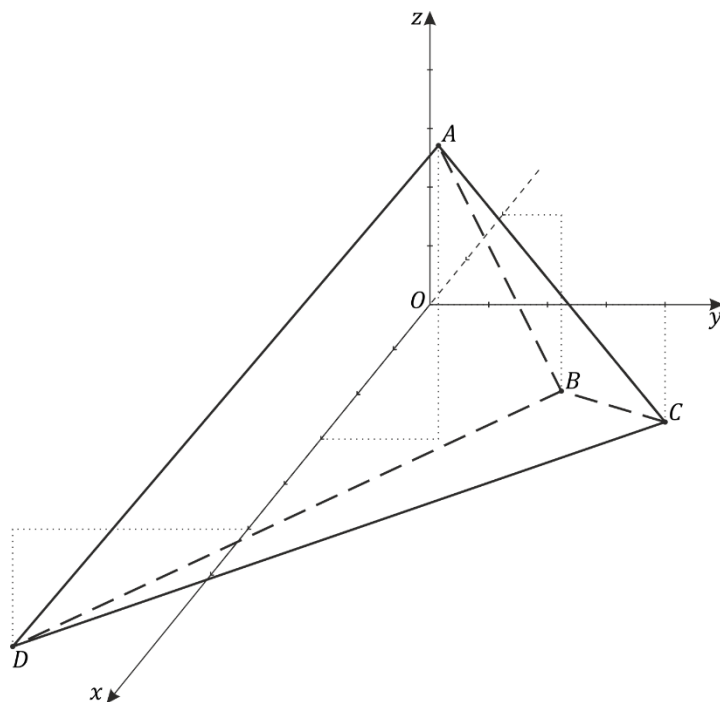
$$\begin{aligned} V_{\text{пир}} &= \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -5 & -1 & -8 \\ -3 & 2 & -7 \\ 2 & -6 & -7 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (70 + 14 - 144 + 32 + 21 + 210) = \\ &= \pm \frac{1}{6} 203 = \frac{203}{6}. \end{aligned}$$

4) Найти длину высоты, опущенной из вершины  $D$  на плоскость  $ABC$ .

Так как  $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h$ , то отсюда  $h = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\Delta ABC}}$ .

$$h = \frac{3 \cdot \frac{203}{6}}{\frac{3\sqrt{91}}{2}} = \frac{203}{3\sqrt{91}} = \frac{7 \cdot 29 \cdot \sqrt{91}}{3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{29\sqrt{91}}{39}.$$

5) Начертить пирамиду.



## Варианты для решения

**Задача 1.** Разложить вектор  $\vec{d}$  по векторам  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

1.  $\vec{a} = (2, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, 1)$ ,  $\vec{c} = (1, 1, 5)$ ,  $\vec{d} = (2, 5, -7)$ .
2.  $\vec{a} = (1, 4, 2)$ ,  $\vec{b} = (3, -1, -1)$ ,  $\vec{c} = (-13, 1, 3)$ ,  $\vec{d} = (-6, 3, 3)$ .
3.  $\vec{a} = (2, 3, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, -2, -3)$ ,  $\vec{c} = (-1, 2, 1)$ ,  $\vec{d} = (-4, 1, -6)$ .
4.  $\vec{a} = (1, 4, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, -3, 1)$ ,  $\vec{c} = (-1, 1, -1)$ ,  $\vec{d} = (-2, 1, 1)$ .
5.  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, -7, -1)$ ,  $\vec{c} = (-4, 3, -1)$ ,  $\vec{d} = (15, -7, 14)$ .
6.  $\vec{a} = (1, 3, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, 3)$ ,  $\vec{c} = (3, 1, 1)$ ,  $\vec{d} = (3, 5, 2)$ .
7.  $\vec{a} = (1, 3, 4)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, -1)$ ,  $\vec{c} = (3, 1, -1)$ ,  $\vec{d} = (2, -6, -9)$ .
8.  $\vec{a} = (1, 3, 5)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{c} = (1, 1, 3)$ ,  $\vec{d} = (2, 7, 14)$ .
9.  $\vec{a} = (-1, 1, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, -2, -1)$ ,  $\vec{c} = (-1, 3, 2)$ ,  $\vec{d} = (2, 6, 7)$ .
10.  $\vec{a} = (6, -1, 1)$ ,  $\vec{b} = (0, -1, -2)$ ,  $\vec{c} = (-1, 1, 3)$ ,  $\vec{d} = (2, -1, 5)$ .
11.  $\vec{a} = (3, 1, 4)$ ,  $\vec{b} = (4, 2, -1)$ ,  $\vec{c} = (1, 3, 1)$ ,  $\vec{d} = (10, 12, 6)$ .
12.  $\vec{a} = (9, 2, 1)$ ,  $\vec{b} = (-9, -1, 1)$ ,  $\vec{c} = (-1, 4, -1)$ ,  $\vec{d} = (37, 2, 1)$ .
13.  $\vec{a} = (1, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (2, -2, 3)$ ,  $\vec{c} = (-5, 1, 3)$ ,  $\vec{d} = (-5, 3, 3)$ .
14.  $\vec{a} = (1, 2, 4)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{c} = (2, 2, 4)$ ,  $\vec{d} = (2, 3, 3)$ .
15.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (-2, 2, -7)$ ,  $\vec{c} = (3, 5, 4)$ ,  $\vec{d} = (17, 29, 16)$ .
16.  $\vec{a} = (1, 2, -2)$ ,  $\vec{b} = (-2, -1, -5)$ ,  $\vec{c} = (3, 1, 8)$ ,  $\vec{d} = (7, 5, 10)$ .
17.  $\vec{a} = (1, -2, -1)$ ,  $\vec{b} = (-2, 5, -1)$ ,  $\vec{c} = (3, -8, 1)$ ,  $\vec{d} = (2, -7, 3)$ .
18.  $\vec{a} = (1, 2, 2)$ ,  $\vec{b} = (0, -1, -1)$ ,  $\vec{c} = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{d} = (-3, -4, -3)$ .

19.  $\vec{a} = (1, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 2)$ ,  $\vec{c} = (2, -1, 1)$ ,  $\vec{d} = (0, 10, 8)$ .
20.  $\vec{a} = (2, 1, 6)$ ,  $\vec{b} = (5, 1, -2)$ ,  $\vec{c} = (-8, -1, 3)$ ,  $\vec{d} = (-35, -4, 20)$ .
21.  $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (3, -1, 4)$ ,  $\vec{c} = (4, 4, -3)$ ,  $\vec{d} = (13, -3, 7)$ .
22.  $\vec{a} = (3, 2, 1)$ ,  $\vec{b} = (4, -1, 5)$ ,  $\vec{c} = (2, -3, 1)$ ,  $\vec{d} = (8, -4, 0)$ .
23.  $\vec{a} = (3, 2, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, 1)$ ,  $\vec{c} = (1, 1, 3)$ ,  $\vec{d} = (5, 1, 11)$ .
24.  $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{b} = (3, 1, 2)$ ,  $\vec{c} = (1, 4, 3)$ ,  $\vec{d} = (6, 3, 5)$ .
25.  $\vec{a} = (3, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 3, -1)$ ,  $\vec{c} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{d} = (11, 2, 13)$ .

**Задача 2.** По координатам точек  $A, B, C$  для указанных векторов найти:

- 1)  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; 3) направляющие косинусы вектора  $\vec{a}$ ; 4)  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ; 5)  $np_{\vec{a}} \vec{c}$ ;
- 6) координаты точки  $M$ , делящей отрезок  $\ell$  в отношении  $\alpha : \beta$ .

1.  $A(4, 6, 3); B(-5, 2, 6); C(4, -4, -3); \vec{a} = 4\vec{CB} - \vec{AC}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{CB};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{AB} \right|; \alpha = 5; \beta = 4.$
2.  $A(4, 3, -2); B(-3, -1, 4); C(2, 2, -1); \vec{a} = -5\vec{AC} + 2\vec{CB}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{AC};$   
 $\vec{d} = \vec{CB}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 2; \beta = 3.$
3.  $A(-2, -2, 4); B(1, 3, -2); C(1, 4, 2); \vec{a} = 2\vec{AC} - 3\vec{BA}; \vec{b} = \vec{BC}; \vec{c} = \vec{BC};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{BA} \right|; \alpha = 2; \beta = 1.$
4.  $A(2, 4, 3); B(3, 1, -4); C(-1, 2, 2); \vec{a} = 2\vec{BA} + 4\vec{AC}; \vec{b} = \vec{BA}; \vec{c} = \vec{BA};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{BA} \right|; \alpha = 1; \beta = 4.$
5.  $A(2, 4, 5); B(1, -2, 3); C(-1, -2, 4); \vec{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}; \vec{b} = \vec{BC}; \vec{c} = \vec{BC};$   
 $\vec{d} = \vec{AB}; \ell = \left| \vec{AB} \right|; \alpha = 2; \beta = 3.$
6.  $A(-1, -2, 4); B(-1, 3, 5); C(1, 4, 2); \vec{a} = 3\vec{AC} - 7\vec{BC}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{AB};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{AC} \right|; \alpha = 1; \beta = 7.$
7.  $A(1, 3, 2); B(-2, 4, -1); C(1, 3, -2); \vec{a} = 2\vec{AB} + 5\vec{CB}; \vec{b} = \vec{AC}; \vec{c} = \vec{AC};$   
 $\vec{d} = \vec{AB}; \ell = \left| \vec{AB} \right|; \alpha = 2; \beta = 4.$

8.  $A(2, -4, 3); B(-3, -2, 4); C(0, 0, -2); \vec{a} = 3\vec{AC} - 4\vec{CB}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{AB};$   
 $\vec{d} = \vec{CB}; \ell = \left| \vec{AC} \right|; \alpha = 2; \beta = 1.$
9.  $A(3, 4, -4); B(-2, 1, 2); C(2, -3, 1); \vec{a} = 5\vec{CB} + 4\vec{AC}; \vec{b} = \vec{BA}; \vec{c} = \vec{BA};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{AB} \right|; \alpha = 2; \beta = 5.$
10.  $A(0, 2, 5); B(2, -3, 4); C(3, 2, -5); \vec{a} = -3\vec{AB} + 4\vec{CB}; \vec{b} = \vec{AC}; \vec{c} = \vec{AC};$   
 $\vec{d} = \vec{AB}; \ell = \left| \vec{AC} \right|; \alpha = 3; \beta = 2.$
11.  $A(-2, -3, -4); B(2, -4, 0); C(1, 4, 5); \vec{a} = 4\vec{AC} - 8\vec{BC}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{AB};$   
 $\vec{d} = \vec{BC}; \ell = \left| \vec{AB} \right|; \alpha = 4; \beta = 2.$
12.  $A(-2, -3, -2); B(1, 4, 2); C(1, -3, 3); \vec{a} = 2\vec{AC} - 4\vec{BC}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{AB};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 3; \beta = 2.$
13.  $A(5, 6, 1); B(-2, 4, -1); C(3, -3, 3); \vec{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{BC}; \vec{b} = \vec{AC}; \vec{c} = \vec{AC};$   
 $\vec{d} = \vec{AB}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 3; \beta = 2.$
14.  $A(10, 6, 3); B(-2, 4, 5); C(3, -4, -6); \vec{a} = 5\vec{AC} - 2\vec{CB}; \vec{b} = \vec{BA}; \vec{c} = \vec{BA};$   
 $\vec{d} = \vec{AB}; \ell = \left| \vec{CB} \right|; \alpha = 1; \beta = 5.$
15.  $A(3, 2, 4); B(-2, 1, 3); C(2, -2, -1); \vec{a} = 4\vec{BC} - 3\vec{AC}; \vec{b} = \vec{BA}; \vec{c} = \vec{AC};$   
 $\vec{d} = \vec{BC}; \ell = \left| \vec{AC} \right|; \alpha = 2; \beta = 4.$
16.  $A(-2, 3, -4); B(3, -1, 2); C(4, 2, 4); \vec{a} = 7\vec{AC} + 4\vec{CB}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{AB};$   
 $\vec{d} = \vec{CB}; \ell = \left| \vec{AB} \right|; \alpha = 2; \beta = 5.$
17.  $A(4, 5, 3); B(-4, 2, 3); C(5, -6, -2); \vec{a} = 9\vec{AB} - 4\vec{BC}; \vec{b} = \vec{AC}; \vec{c} = \vec{AC};$   
 $\vec{d} = \vec{AB}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 5; \beta = 1.$



18.  $A(2,4,6); B(-3,5,1); C(4,-5,-4); \vec{a} = -6\vec{BC} + 2\vec{BA}; \vec{b} = \vec{CA}; \vec{c} = \vec{CA};$   
 $\vec{d} = \vec{BA}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 1; \beta = 3.$
19.  $A(-4,-2,-5); B(3,7,2); C(4,6,-3); \vec{a} = 9\vec{BA} + 3\vec{BC}; \vec{b} = \vec{AC}; \vec{c} = \vec{AC};$   
 $\vec{d} = \vec{BC}; \ell = \left| \vec{BA} \right|; \alpha = 4; \beta = 3.$
20.  $A(5,4,4); B(-5,2,3); C(4,2,-5); \vec{a} = 11\vec{AC} - 6\vec{AB}; \vec{b} = \vec{BC}; \vec{c} = \vec{AB};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 3; \beta = 1.$
21.  $A(3,4,6); B(-4,6,4); C(5,-2,-3); \vec{a} = -7\vec{BC} + 4\vec{CA}; \vec{b} = \vec{BA}; \vec{c} = \vec{CA};$   
 $\vec{d} = \vec{BC}; \ell = \left| \vec{BA} \right|; \alpha = 5; \beta = 3.$
22.  $A(-5,-2,-6); B(3,4,5); C(2,-5,4); \vec{a} = 8\vec{AC} - 5\vec{BC}; \vec{b} = \vec{AB}; \vec{c} = \vec{AB};$   
 $\vec{d} = \vec{BC}; \ell = \left| \vec{AC} \right|; \alpha = 3; \beta = 4.$
23.  $A(3,4,1); B(5,-2,6); C(4,2,-7); \vec{a} = -7\vec{AC} + 5\vec{AB}; \vec{b} = \vec{BC}; \vec{c} = \vec{BC};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{AB} \right|; \alpha = 2; \beta = 3.$
24.  $A(4,3,2); B(-4,-3,5); C(6,4,-3); \vec{a} = 8\vec{AC} - 5\vec{BC}; \vec{b} = \vec{BA}; \vec{c} = \vec{BA};$   
 $\vec{d} = \vec{AC}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 2; \beta = 5.$
25.  $A(-5,4,3); B(4,5,2); C(2,7,-4); \vec{a} = 3\vec{BC} + 2\vec{AB}; \vec{b} = \vec{CA}; \vec{c} = \vec{CA};$   
 $\vec{d} = \vec{AB}; \ell = \left| \vec{BC} \right|; \alpha = 3; \beta = 4.$

**Задача 3.** Найти:

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; 2)  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ ; 3)  $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}); \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ; 4) площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , и длину диагоналей  $|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|$ .
1.  $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = \vec{m} - \vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = 2; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}.$
2.  $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}; \vec{b} = \vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 1; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}.$
3.  $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{2}; |\vec{n}| = 3; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}.$

$$4. \vec{a} = \vec{m} - 5\vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = 4; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$5. \vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = 2; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$6. \vec{a} = -\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{2}; |\vec{n}| = 5; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$7. \vec{a} = 5\vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = \sqrt{2}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$8. \vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}; \vec{b} = -2\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = \sqrt{3}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$9. \vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}; |\vec{m}| = 4; |\vec{n}| = \sqrt{3}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$10. \vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}; \vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 5; |\vec{n}| = 2; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$11. \vec{a} = \vec{m} + 5\vec{n}; \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{3}; |\vec{n}| = 1; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$12. \vec{a} = -\vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = \sqrt{3}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$13. \vec{a} = \vec{m} - \vec{n}; \vec{b} = 5\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{2}; |\vec{n}| = 7; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$14. \vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}; \vec{b} = 4\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{2}; |\vec{n}| = 4; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$15. \vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + 4\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = 5; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$16. \vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}; \vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = 2; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$17. \vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = 4\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = \sqrt{3}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$18. \vec{a} = -\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}; |\vec{m}| = 4; |\vec{n}| = \sqrt{2}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$19. \vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}; \vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = \sqrt{3}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$20. \vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = \sqrt{3}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$21. \vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = 4\vec{m} - \vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{2}; |\vec{n}| = 1; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$22. \vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} + 2\vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{3}; |\vec{n}| = \sqrt{3}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$23. \vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} - 4\vec{n}; |\vec{m}| = 1; |\vec{n}| = \sqrt{2}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$24. \vec{a} = 2\vec{m} + 2\vec{n}; \vec{b} = -\vec{m} + \vec{n}; |\vec{m}| = 4; |\vec{n}| = \sqrt{2}; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{\pi}{4}.$$

25.  $\vec{a} = -\vec{m} + \vec{n}; \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}; |\vec{m}| = \sqrt{3}; |\vec{n}| = 4; (\vec{m} \wedge \vec{n}) = \frac{5\pi}{6}.$

**Задача 4.** Вершины пирамиды находятся в точках  $A, B, C, D$ . Найти:

- 1) длину ребра  $AB$  ;    2) площадь грани  $ABC$  ;    3) объем  $V$  пирамиды;
- 4) длину высоты, опущенной из вершины  $D$ . Начертить пирамиду.

1.  $A(3;4;5), B(1;2;1), C(-2;-3;6), D(3;-6;-3).$     2.  $A(-7;-5;6), B(-2;5;-3), C(3;-2;4), D(1;2;2).$
3.  $A(1;3;1), B(-1;4;6), C(-2;-3;4), D(3;4;-4).$     4.  $A(2;4;1), B(-3;-2;4), C(3;5;-2), D(4;2;-3).$
5.  $A(-5;-3;-4), B(1;4;6), C(3;2;-2), D(8;-2;4).$     6.  $A(3;4;2), B(-2;3;-5), C(4;-3;6), D(6;-5;3).$
7.  $A(-4;6;3), B(3;-5;1), C(2;6;-4), D(2;4;-5).$     8.  $A(7;5;8), B(-4;-5;3), C(2;-3;5), D(5;1;-4).$
9.  $A(3;-2;6), B(-6;-2;3), C(1;1;-4), D(4;6;-7).$     10.  $A(-5;-4;-3), B(7;3;-1), C(6;-2;0), D(3;2;-7).$
11.  $A(3;-5;-2), B(-4;2;3), C(1;5;7), D(-2;-4;5).$     12.  $A(7;4;9), B(1;-2;-3), C(-5;-3;0), D(1;-3;4).$
13.  $A(-4;-7;-3), B(-4;-5;7), C(2;-3;3), D(3;2;1).$     14.  $A(-4;-5;-3), B(3;1;2), C(5;7;-6), D(6;-1;5).$
15.  $A(5;2;4), B(-3;5;-7), C(1;-5;8), D(9;-3;5).$     16.  $A(-6;4;5), B(5;-7;3), C(4;2;-8), D(2;8;-3).$
17.  $A(5;3;6), B(-3;-4;4), C(5;-6;8), D(4;0;-3).$     18.  $A(5;-4;4), B(-4;-6;5), C(3;2;-7), D(6;2;-9).$
19.  $A(-7;-6;-5), B(5;1;-3), C(8;-4;0), D(3;4;-7).$     20.  $A(7;-1;-2), B(1;7;8), C(3;7;9), D(-3;-5;2).$
21.  $A(5;2;7), B(7;-6;-9), C(-7;-6;3), D(1;-5;2).$     22.  $A(-2;-5;-1), B(-6;-7;9), C(4;-5;1), D(2;1;4).$
23.  $A(-6;-3;-5), B(5;1;7), C(3;5;-1), D(4;-2;9).$     24.  $A(7;4;2), B(-5;3;-9), C(1;-5;3), D(7;-9;1).$
25.  $A(-8;2;7), B(3;-5;9), C(2;4;-6), D(4;6;-5).$

## Справочный материал

1. **Координаты вектора.** Даны точки  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ , координаты вектора вычисляются по формуле

$$\vec{a} = A\vec{B} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (X; Y; Z).$$

2. **Длина вектора**

$$|\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. **Проекция вектора на ось**

$$np_u A\vec{B} = |A\vec{B}| \cos \varphi.$$

4. **Направляющие косинусы**

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}; \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

5. **Условие коллинеарности векторов**

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \text{ где } \vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2).$$

6. **Скалярное произведение векторов**

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi;$
- проекция вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ :  $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|};$
- если  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$

7. **Свойства скалярного произведения**

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$
- 2)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$
- 3)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ , тогда  $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})};$
- 4)  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$
- 5)  $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b});$
- 6)  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0; \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$

8. **Условие перпендикулярности векторов**

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

9. **Угол между векторами**

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

10. **Векторное произведение**  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$

$$\blacksquare \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi;$$

$$\blacksquare \quad \text{если } \vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2), \text{ то}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\blacksquare \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

### 11. Свойства векторного произведения.

$$1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b};$$

$$2) \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0;$$

$$3) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

$$4) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

$$5) \quad \lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b});$$

$$6) \quad \text{Геометрический смысл векторного произведения – площадь параллелограмма: } S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi.$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0;$$

$$7) \quad \begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}; & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}; & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}. \end{aligned}$$

### 12. Смешанное произведение векторов:

$$\bullet \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

$$\bullet \quad \text{Если } \vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2); \vec{c} = (x_3; y_3; z_3), \text{ то}$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

### 13. Геометрический смысл смешанного произведения – объемы параллелепипеда и пирамиды:

$$V_{\text{параллел}} = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}, \quad V_{\text{пирамиды}} = \pm (1/6) \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

### 14. Условие компланарности векторов: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ .