

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ
«ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ»**

Целями работы являются

- повторение основных понятий дифференциального исчисления функции одной переменной: функции, ее предела, непрерывности функции, производной и дифференциала; исследование функций: монотонность, четность, нечетность, точки экстремума, точки перегиба, промежутки вогнутости и выпуклости, построение графиков, а также правило Лопиталья;
- повторение основных понятий дифференциального исчисления функции нескольких переменных: функции, область определения функции, частные производные первого и высших порядков, частные производные сложной функции и исследование функции на экстремум.
- закрепление навыков решения задач по теме дифференцирование функции одной и нескольких переменных, полученных на аудиторных занятиях.

Задание для разбора

Задача 1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталья $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 - 1}{\sin x + x}$.

Задача 2. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{x-5}{x^2-9}$.

Задача 3. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$.

Задача 4. Найти точки перегиба функции $y = x^5 + 10x + 1$.

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x^2 + 21x - 14$ на отрезке $[0; 5]$.

Задача 6. Построить графики функций.

а) $y = x^3 - 3x - 2$; б) $y = \frac{x^3}{4-x^2}$; в) $y = \ln(x^2 - 3)$.

Задача 7. Найти частные производные первого порядка $z = x^2 \sin \frac{y}{x}$.

Задача 8. Вычислить значения частных производных первого порядка функции $u = \ln(x^2 - \sin yz)$ в точке $M_0(1; 0; 1)$.

Задача 9. Вычислить производную сложной функции

$$z = 2^u - \cos(u^2 + v^2), \text{ где } u = xy, v = \frac{x}{y}.$$

Задача 10. Исследовать функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x$ на экстремум.

Задача 11. Проверить тождество $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$, где $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Разбор задач

Задача 1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 - 1}{\sin x + x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 - 1}{\sin x - x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x^2 - 1)'}{(\sin x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2x}{\cos x - 1} = \frac{e^0 - 2}{\cos 0 - 1} = \\ &= \frac{1 - 2}{1 - 1} = \frac{-1}{0} = -\infty. \end{aligned}$$

Задача 2. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{x-5}{x^2-9}$.

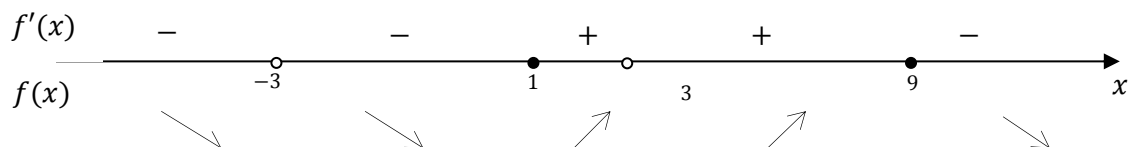
Решение. Область допустимых значений данной функции $x \neq \pm 3$.

Найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-5)' \cdot (x^2-9) - (x-5) \cdot (x^2-9)'}{(x^2-9)^2} = \frac{1 \cdot (x^2-9) - (x-5) \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 9 - 2x^2 + 10x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2 + 10x - 9}{(x^2-9)^2}. \end{aligned}$$

Приравняем y' нулю:

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 9, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$$



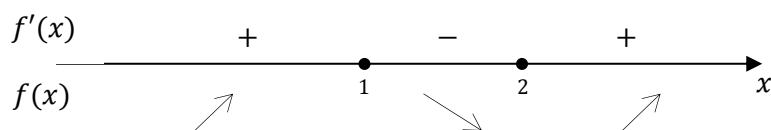
При $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (9; +\infty)$ функция убывает, при $x \in (1; 3) \cup (3; 9)$ функция возрастает.

Задача 3. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$.

Решение. Область допустимых значений $x \in \mathbb{R}$. Найдем первую производную:

$$\begin{aligned} y' &= (x-6)' \sqrt{x^2+4} + (x-6) (\sqrt{x^2+4})' = \\ &= 1 \cdot \sqrt{x^2+4} + (x-6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \sqrt{x^2+4} + \frac{x^2-6x}{\sqrt{x^2+4}} = \\ &= \frac{x^2+4+x^2-6x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдем промежутки монотонности и экстремумы функции:



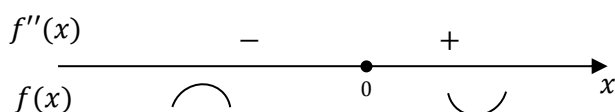
Ответ: $x = 1$ - точка максимума; $x = 2$ - точка минимума; $y_{\max}(1) = -5\sqrt{5}$; $y_{\min}(2) = -8\sqrt{2}$.

Задача 4. Найти точки перегиба функции $y = x^5 + 10x + 1$.

Решение. Вычислим производную второго порядка:

$$y' = 5x^4 + 10, y'' = 5 \cdot 4x^3; y'' = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Определяем знаки y'' на полученных промежутках:



Ответ: $(0; 1)$ – точка перегиба заданной функции.

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^3 - 12x^2 + 21x - 14 \text{ на отрезке } [0; 5].$$

Решение. Вычислим производную и приравняем ее нулю:

$$y' = 3x^2 - 12 \cdot 2x + 21 = 3x^2 - 24x + 21 = 0.$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 7. \end{cases}$$

Так как $x_2 = 7$ не принадлежит отрезку $[0; 5]$, найдем значения функции на концах отрезка и при $x_1 = 1$.

$$y(0) = -14,$$

$$y(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 21 \cdot 5 - 14 = 125 - 300 + 105 - 14 = -84,$$

$$y(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 - 14 = 1 - 12 + 21 - 14 = -4.$$

Ответ: $y = -4$ – наибольшее значение функции,

$y = -84$ – наименьшее значение функции.

Задача 6. Построить графики функций.

Решение. а) $y = x^3 - 3x - 2$.

1) Область допустимых значений $x \in (-\infty; +\infty)$. Вертикальных асимптот нет.

$$2) y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) - 2 = -x^3 - 3x - 2 \neq \begin{cases} y(x), \\ -y(x). \end{cases}$$

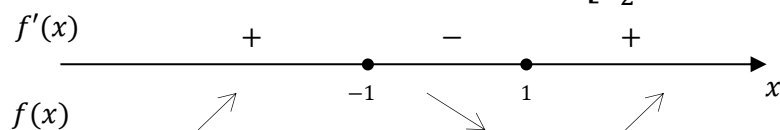
Функция ни четная, ни нечетная.

3) Точки пересечения с осями координат:

Если $x = 0$, то $y = -2$; если $y = 0$, то $x = -1, x = 2$.

4) Исследуем функцию на экстремум:

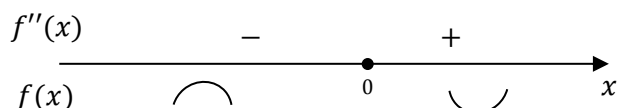
$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$



$x = -1$ точка максимума; $x = 1$ точка минимума;

$$y_{\max}(-1) = 0; y_{\min}(1) = -4.$$

5) Найдем точки перегиба функции: $y'' = 6x; y'' = 0 \Rightarrow x = 0$.



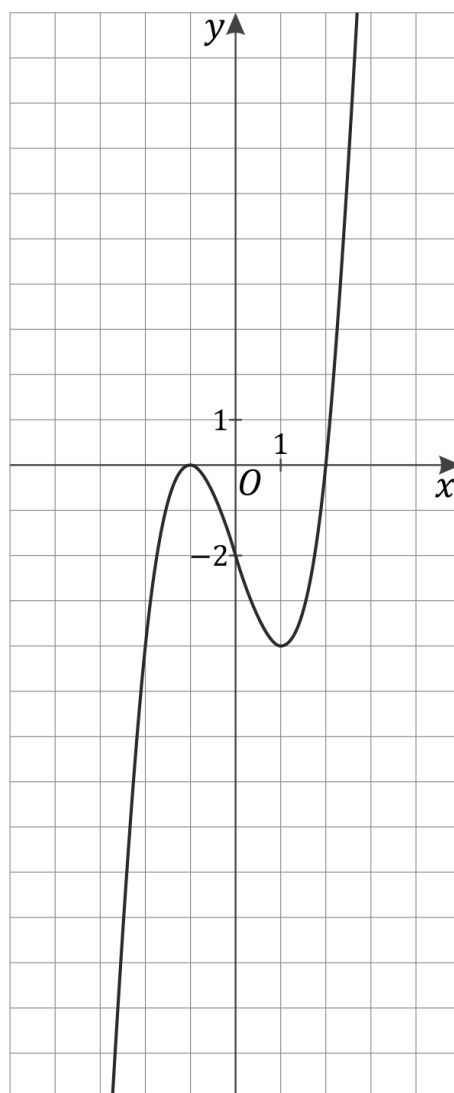
$(0; -2)$ – точка перегиба.

6) Найдем наклонную асимптоту $= kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x - 2}{x} = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.

7) Строим график функции.



$$б) y = \frac{x^3}{4-x^2};$$

1) ОДЗ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty) \Rightarrow x = \pm 2$ – вертикальные асимптоты.

$$2) y(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = \frac{-x^3}{4-x^2} = -y(x).$$

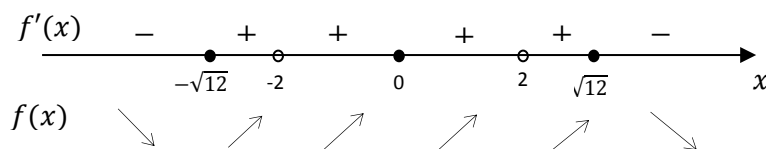
Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

3) Точки пересечения с осями координат: $x = 0, y = 0$.

4) Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{(12-x^2) \cdot x^2}{(4-x^2)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2\sqrt{3}, x_3 = -2\sqrt{3}, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

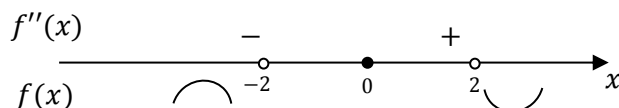


$x = 2\sqrt{3}$ – точка максимума, $x = -2\sqrt{3}$ – точка минимума;

$$y_{\max}(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}, y_{\max}(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

5) Найдем точки перегиба функции:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{12x^2 - x^4}{(4-x^2)^2} \right)' = \\ &= \frac{(24x - 4x^3) \cdot (4-x^2)^2 - (12x^2 - x^4) \cdot 2 \cdot (4-x^2) \cdot (-2x)}{(4-x^2)^4} = \\ &= \frac{(4-x^2) \cdot ((24x - 4x^3) \cdot (4-x^2) - (12x^2 - x^4) \cdot 2 \cdot (-2x))}{(4-x^2)^4} = \\ &= \frac{96x - 16x^3 - 24x^3 + 4x^5 + 48x^3 - 4x^5}{(4-x^2)^3} = \frac{96x + 8x^3}{(4-x^2)^3} = \\ &= \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(4-x^2)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \neq \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$



$x = 0$ – точка перегиба, $y(0) = 0$.

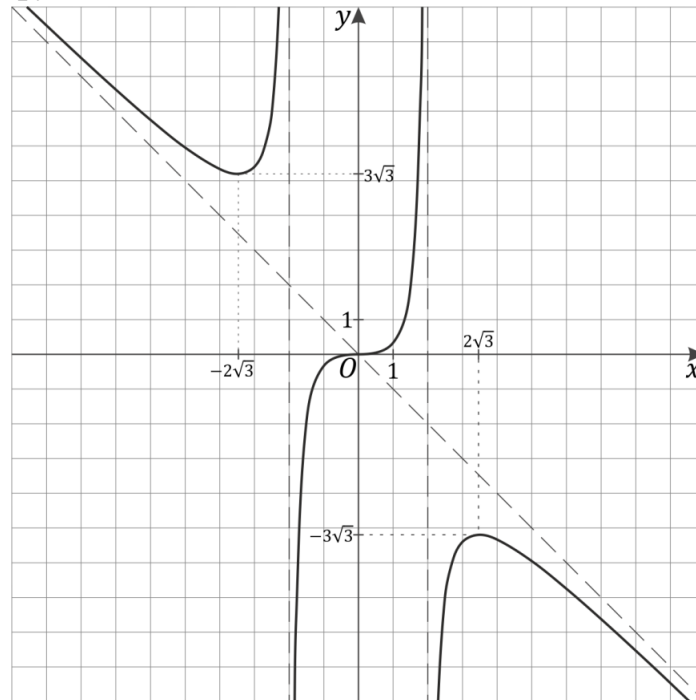
6) Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(4 - x^2) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{4x - x^3} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - x^3}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{4 - x^2} = 0.$$

$y = -x$ наклонная асимптота.

7) Строим график функции.



в) $y = \ln(x^2 - 3)$.

1) ОДЗ: $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$, $\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ – вертикальные асимптоты.

2) $y(-x) = \ln((-x)^2 - 3) = \ln(x^2 - 3) = y(x)$. Функция четная, график симметричен относительно оси Oy .

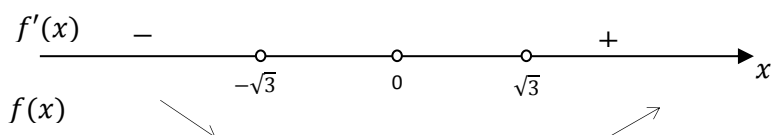
3) Точки пересечения с координатными осями:

Если $y = 0$, то $\ln(x^2 - 3) = 0$, $\Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$;

если $x = 0$, то y не существует.

4) Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 3}; \quad y' = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ не принадлежит ОДЗ.}$$



Точек экстремума нет.

5) Найдем точки перегиба функции:

$$y'' = \left(\frac{2x}{x^2 - 3} \right)' = \frac{2 \cdot (x^2 - 3) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6 - 4x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 6}{(x^2 - 3)^2} =$$

$$= \frac{-2(x^2 + 3)}{(x^2 - 3)^2} < 0.$$

Точек перегиба нет, график функции выпуклый вверх.

6) Найдем наклонную асимптоту:

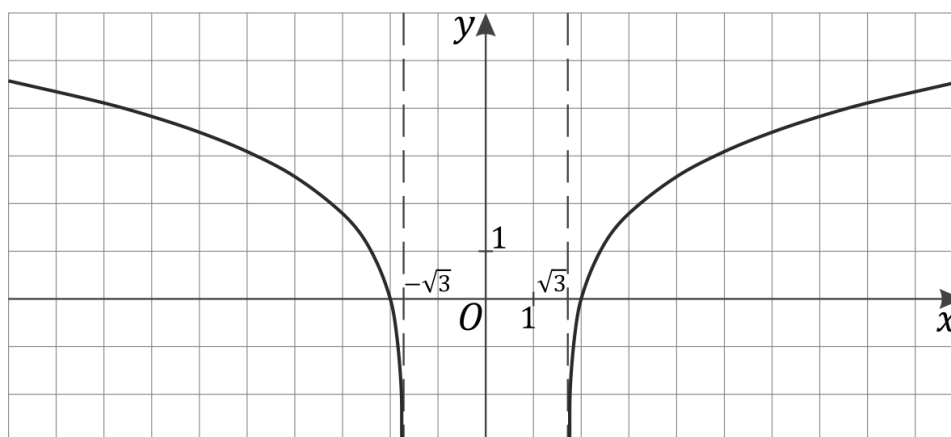
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x^2 - 3))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 3} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(x^2 - 3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x} = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 - 3) = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.

7) Строим график функции.



Задача 7. Найти частные производные первого порядка

$$z = x^2 \sin \frac{y}{x}.$$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2)'_x \cdot \sin \frac{y}{x} + x^2 \cdot \left(\sin \frac{y}{x}\right)'_x = 2x \cdot \sin \frac{y}{x} + x^2 \cdot \left(-\cos \frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= 2x \sin \frac{y}{x} + y \cos \frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \left(\sin \frac{y}{x}\right)'_y = x^2 \cdot \left(-\cos \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = -x \cos \frac{y}{x}.$$

Задача 8. Вычислить значения частных производных первого порядка функции $u = \ln(x^2 - \sin yz)$ в точке $M_0(1; 0; 1)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 - \sin yz} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - \sin yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 - \sin yz} \cdot (-\cos yz \cdot z) = \frac{-z \cos yz}{x^2 - \sin yz}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x^2 - \sin yz} \cdot (-\cos yz \cdot y) = \frac{-y \cos yz}{x^2 - \sin yz}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 0.$$

Задача 9. Вычислить производную сложной функции

$$z = 2^u - \cos(u^2 + v^2), \text{ где } u = xy, v = \frac{x}{y}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (2^u \ln 2 + 2u \cdot \sin(u^2 + v^2))y + 2v \cdot \sin(u^2 + v^2) \cdot \frac{1}{y} = \\ &= 2^{xy} y \ln 2 + \frac{2x(y^4 + 1)}{y^2} \sin\left(x^2 y^2 + \frac{x^2}{y^2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (2^u \ln 2 + \sin(u^2 + v^2) \cdot 2u) \cdot x - \\ &- \sin(u^2 + v^2) \cdot 2v \cdot \frac{x}{y^2} = 2^{xy} x \ln 2 + \frac{2x^2(y^4 - 1)}{y^3} \sin\left(x^2 y^2 + \frac{x^2}{y^2}\right). \end{aligned}$$

Задача 10. Исследовать функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x$ на экстремум.

Решение. Найдем частные производные первого порядка $z'_x = 2x + y - 3$, $z'_y = x + 2y$. Найдем критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y + y = 3, \\ x = -2y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

$z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 1$, $z''_{yy} = 2$. В точке $(2, 1)$ $z''_{xx} = 2 = A > 0$, $z''_{xy} = 1 = B$, $z''_{yy} = 2 = C$, $D = AC - B^2 = 3 > 0$. Следовательно, $(2; -1)$ – точка минимума.

Задача 11. Проверить тождество $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$, где $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

и подставляя их в данное тождество, получим:

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{\sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \equiv \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Варианты для самостоятельной работы

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n}$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(x-12)^2$.
3. Найти точки перегиба функции $y = \frac{1}{x+3}$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, на отрезке $[-1; 5]$.
5. Построить графики функций:
 - а) $y = \frac{8x}{(x-2)^2}$,
 - б) $y = \ln(4x^2 - 16)$,
 - в) $y = \frac{e^x}{x}$.
6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 : $u = \arcsin(y\sqrt{x}) - xz^2, M_0(4; 0; 1)$.
7. Вычислить производную сложной функции $z = \arcsin u + \frac{u}{v}$,
 $u = xy, v = 2x + 3y$.
8. Исследовать функцию на экстремум $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
9. Проверить тождество $u'_x + u'_y = \frac{2y+x}{u}, u = \sqrt{2xy + y^2}$.

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$.
2. Найти промежутки монотонности: $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.
3. Найти точки перегиба функции: $y = x^2 \ln x$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (\frac{\sqrt{3}x}{2} - \sin x)$ на отрезке $[0; \pi/2]$.
5. Построить графики функций:
 - а) $y = \frac{4x}{4+x^2}$,
 - б) $y = 2^{x^2-2x}$,
 - в) $y = xe^{-x}$.
6. Найти производные первого порядка функции $z = \cos\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)$.

7. Вычислить производную сложной функции: $z = ctgu \cdot \ln v$,

$$u = 2x + 3y, v = \frac{x}{y}.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.

9. Проверить тождество: $u'_x + u'_y = 2 \left(\frac{x+y}{x-y} \right), u = \frac{x^2 + y^2}{x-y}$.

ВАРИАНТ 3

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\cos x - \cos x}{x^2}$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x^2} + x$.

3. Найти точки перегиба функции $y = x^3 \ln x + 1$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{3 - 2x^2}{x - 4}$ на отрезке $[-1; 3]$.

5. Построить графики функций:

а) $y = x^2(x - 2)^2$, б) $y = \frac{4x}{4 - x^2}$, в) $y = (x - 1)e^{3x+1}$.

6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \sqrt{y^2 + z^2 - 2yz \cos x}, M_0(\pi/2; 3; 4).$$

7. Вычислить производную сложной функции $z = tgu \cdot e^v, u = \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 + 24xy$.

9. Проверить тождество $\frac{1}{x} u'_x + \frac{1}{y} u'_y = \frac{u}{y^2}, u = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$.

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{5x^5 + x + 2}$.

2. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{1}{2x - x^2}$.

3. Найти точки перегиба $y = xe^{2x} + 1$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 + 4x$ на отрезке $[-2; 2]$.

5. Построить графики функций:

а) $y = 2 - 3x^2 - x^3$, б) $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + x - 6}$, в) $y = e^{x-x^2}$.

6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \frac{yz}{y-x}, M_0(1;3;1).$$

7. Вычислить производную сложной функции $z = \arccos u + e^v$,
 $u = \frac{y}{x}, v = \sqrt{xy}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$.

9. Проверить тождество: $xu'_x + yu'_y = 0$, $u = \arcsin \frac{x}{x+y}$.

ВАРИАНТ 5

1. Вычислите предел, применяя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\operatorname{tg} x}$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$.

3. Найти точки перегиба функции $y = (x+1)^2(x-1)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{1+x^2}$.

5. Построить графики функций:

а) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$, б) $y = \frac{2(x-1)^2}{x^2}$, в) $y = x3^{x^2-4}$.

6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 ,
 $u = \sqrt{y} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{z}), M_0(4;4;1)$.

7. Вычислить производную сложной функции $z = \arccos u + e^v$,
 $u = x^2 - y^2, v = \sqrt{xy}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

9. Проверить тождество: $u'_x u''_{xy} - u'_y u''_{xx} = 0$, $u = \ln(x + e^{-y})$.

ВАРИАНТ 6

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^x$.

2. Найти промежутки монотонности функции $y = (x-2)(x+1)(x-3)$.

3. Найти точки перегиба функции $y = \ln(1+x^2)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{x(10-x)}$.

5. Построить графики функций:

а) $y = \frac{2x^2}{3(x-2)}$, б) $y = \ln(x^2 - 4)$, в) $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

6. Найти производные первого порядка функции $z = \arctg(x^2 + 3y^2)$.

7. Вычислить производную сложной функции $z = \sqrt{\cos u} \cdot \frac{u}{v}$,

$$u = 3x + 2y, v = \sqrt{y} \cdot x.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

9. Проверить тождество: $xu'_x + yu'_y = 0$, $u = \arctg \frac{x}{y}$.

ВАРИАНТ 7

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x + 3}$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = (x^2 + 4x + 5)^2$.

3. Найти точки перегиба функции $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x)$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

5. Построить графики функций:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$, б) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$, в) $y = \log_2(x^2 - 4)$.

6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = xe^{\frac{-(y^2+z^2)}{2}}, M_0(1;0;0).$$

7. Вычислить производную сложной функции: $z = \sin u \cdot e^v, u = \frac{y}{x}, v = y\sqrt{x}$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

9. Проверить тождество: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, $u = \arctg \frac{y}{x}$.

ВАРИАНТ 8

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{\tg 5x}$.

2. Найти промежутки монотонности функции $y = 2 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$.

3. Найти точки перегиба $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3 - 2x^2 + 2x - \sqrt{x}$ на отрезке $[1;3]$.
5. Построить графики функций:
 - а) $y = \frac{4x^3}{3(x^2 + 1)}$, б) $y = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$, в) $y = 1/(e^x - 1)$.
6. Найти производные первого порядка функции $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}}$.
7. Вычислить производную сложной функции $z = \frac{\sqrt{\ln u}}{v}$, $u = x^y$, $v = yx$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(12 - x - y)$.
9. Проверить тождество: $x^2 u''_{xx} + 2y u''_{yx} + y^2 u''_{yy} = 0$, $u = x e^{y/x}$.

ВАРИАНТ 9

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x - \arctg 2x$.
3. Найти точки перегиба функции $y = x^7 + 7x + 1$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1;4]$.
5. Построить графики функции:
 - а) $y = (x-1)^2(x-3)^2$, б) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$, в) $y = x \ln x$.
6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \ln(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - z), M_0(1;1;1).$$
7. Вычислить производную сложной функции: $z = u \ln v$, $u = x^y$, $v = yx$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.
9. Проверить тождество: $9u''_{xx} - u''_{yy} = 0$, $u = e^{-(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)$.

ВАРИАНТ 10

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

2. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{x}{\ln x}$.
3. Найти точки перегиба функции $y = xe^{-x^2/2}$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0;3]$.
5. Построить графики функций:
 - а) $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, б) $y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5$, в) $y = \ln(x^2 + 1)$.
6. Найти производные первого порядка функции $z = \operatorname{tg}(x^3 + y^2)$.
7. Вычислить производную сложной функции: $z = \sqrt{\ln u} \cdot \frac{u}{v}$, $u = e^{xy}$, $v = \frac{3x}{y^2}$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
9. Проверить тождество $xu'_x + yu'_y = 2u$, $u = (x^2 + y^2)\operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

ВАРИАНТ 11

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = 4x - \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Найти точки перегиба функции $y = \ln(1 - x^2)$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$ на отрезке $[-3;3]$.
5. Построить графики функций:
 - а) $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$, б) $y = x^2 \ln x$, в) $y = (x - 2)e^{x-3}$.
6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 ,

$$u = \ln \left(\frac{x}{y^4 + z^2} \right), M_0(25; 2; 3).$$
7. Вычислить производную сложной функции: $z = v \cdot \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$,

$$u = x^2 y^2, v = \frac{x}{y}.$$
8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

9. Проверить тождество: $(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 = 1$, $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ВАРИАНТ 12

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
2. Найти промежутки монотонности функции $y = e^x \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.
3. Найти точки перегиба функции $y = \frac{x^3}{x^2 + 48}$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$.
5. Построить графики функций:
 - а) $y = 16x^2(x-1)^2$, б) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, в) $y = (1-x)e^x$.
6. Найти производные первого порядка функции $z = \cos(x^3 - 3xy)$.
7. Вычислить производную сложной функции $z = u \cdot \arctg \frac{v}{u}$, $u = 6xy$, $v = \frac{x}{y}$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
9. Проверить тождество: $x^2 u''_{xx} + 2xy u''_{xy} + y^2 u''_{yy} = 0$, $u = \frac{y}{x}$.

ВАРИАНТ 13

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - 1/x)$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.
3. Найти точки перегиба функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x-1}{x+1}$ на отрезке $[0; 4]$.
5. Построить графики функций:
 - а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$, б) $y = \frac{10x + 10}{x^2 - 2x + 1}$, в) $y = \log_2(4x^2 - 16)$.
6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + z^2}}, M_0(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

7. Вычислить производную сложной функции $z = u \cdot \sqrt{v^2 - u^2}$,
 $u = 3x + 4y, v = 7xy$
8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
9. Проверить тождество: $xu'_x + yu'_y = 3(x^3 - y^3)$, $u = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$.

ВАРИАНТ 14

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.
2. Найти промежутки монотонности функции $y = x - 2\sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.
3. Найти точки перегиба функции $y = x^4 + 24x^2 - 8x^3$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ на отрезке $[0; 1]$.
5. Построить графики функции:
а) $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$, б) $y = \frac{2x^3 + 3}{x^2}$, в) $y = e^{3x-x^2}$.
6. Найти производные первого порядка функции $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}$.
7. Вычислить производную сложной функции $z = \frac{1}{\cos u} + \operatorname{arctg} \frac{v+1}{u}$,
 $u = \ln x + y, v = x^2 + y^2$
8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(6 - x - y)$.
9. Проверить тождество: $u''_{xx} - u''_{yy} = 0$, $u = \ln(x^2 - y^2)$.

ВАРИАНТ 15

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$.
3. Найти точки перегиба функции $y = \frac{x^3}{3} - x$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$ на отрезке $[-1; 2]$.
5. Построить графики функции:

а) $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16)$, б) $y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x}$, в) $y = x^2 e^{-x}$.

6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \ln(3x + y^2) - \sqrt{xz^3}, M_0(5;3;2).$$

7. Вычислить производную сложной функции $z = u^2 + \sqrt{uv^3}$,
 $u = e^{xy}, v = x^2 + y^2$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

9. Проверить тождество: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, $u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$

ВАРИАНТ 16

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

2. Найти промежутки монотонности функции $y = (x-1)^3 \sqrt{x^2}$.

3. Найти точки перегиба функции $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 11$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4$ на отрезке $[-1;2]$.

5. Построить графики функции:

а) $y = x - 2 + \frac{4}{x-2}$, б) $y = \log_4(8 - 2x^2)$, в) $y = 4^{2x-x^2}$.

6. Найти производные первого порядка функции $z = \operatorname{ctg}(\sqrt{xy^2} + x^2 y)$.

7. Вычислить производную сложной функции: $z = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{uv}} \cdot e^v$,

$$u = \frac{x}{y}, v = x^3 y^2$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

9. Проверить тождество $u u''_{xy} = (1 + y \ln x) u'_x$, $u = x^y$

ВАРИАНТ 17

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

3. Найти точки перегиба функции $y = (x-5)^{5/3} + 2$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3;2]$.

5. Построить графики функции:

а) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$, б) $y = \frac{3x^3}{4x^2 - 1}$, в) $y = e^{x^2 - 2x}$.

6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, M_0(1;2;1).$$

7. Вычислить производную сложной функции $z = \ln \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{1}{v}$,

$$u = 2x + y, v = \frac{x}{y}.$$

8. Исследовать функцию на экстремум $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.

9. Проверить тождество: $xu'_x + yu'_y = u$, $u = \frac{xy}{x + y}$.

ВАРИАНТ 18

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x - 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

2. Найти промежутки монотонности функции $y = x^2 \sqrt{1 - x^3}$.

3. Найти точки перегиба функции $y = \ln x^2$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1 + \ln x}{x}$.

5. Построить графики функции:

а) $y = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$, б) $y = \frac{x}{x + 2}$, в) $y = xe^{-x^2 + x}$.

6. Найти производные первого порядка функции $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$.

7. Вычислить производную сложной функции $z = \arcsin \frac{u}{v} - \ln v$,

$$u = 3xy^2, v = \sqrt{x} + y.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

9. Проверить тождество: $x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} = 0$, $u = e^{xy}$.

ВАРИАНТ 19

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

3. Найти точки перегиба функции $y = x^3 \ln x + 1$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ на отрезке $[1;4]$.
5. Построить графики функции:
 - а) $y = \frac{27(x^3 - x^2)}{4} - 4$, б) $y = \frac{2x}{4 - x^2}$, в) $y = x \ln x$.
6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \operatorname{arctg}\left(\frac{yz}{x^2}\right), M_0(1;2;1).$$
7. Вычислить производную сложной функции $z = u \sin v + u^2$, $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + (y + 2)^2$.
9. Проверить тождество: $a^2 u''_{xx} = u''_{yy}$, $u = \sin^2(x - ay)$.

ВАРИАНТ 20

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}$.
2. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.
3. Найти точки перегиба функции $y = 2x^2 + \frac{4}{x}$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4$ на отрезке $[-1;2]$.
5. Построить графики функции:
 - а) $y = x(x + 2)(x - 1)$, б) $y = \frac{4x^3}{3(x^2 + 1)}$, в) $y = \frac{e^{x-1}}{x}$.
6. Найти производные первого порядка функции $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{xy}}{y + x}\right)$.
7. Вычислить производную сложной функции $z = (u^2 + v^2)^{u^2 - v^2}$, $u = 2x + y$, $v = xy$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = -x^2 - y^2 + 2(y + x)$.
9. Проверить тождество: $x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} = 0$, $u = x \sqrt{\frac{y}{x}}$.

ВАРИАНТ 21

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctgx}$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = 1 - (x - 2)^{4/5}$.
3. Найти точки перегиба функции $y = xe^{2x} + 1$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{2(x - 2)^2(8 - x)} - 1$ на отрезке $[0; 6]$.
5. Построить графики функции:
 - а) $y = \frac{1}{16}x^2(x - 4)^2$,
 - б) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$,
 - в) $y = \frac{e^{x-2}}{x}$.
6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \sqrt{x} \sin \frac{y}{z}, M_0(4; 0; 2).$$

7. Вычислить производную сложной функции $z = \arcsin(u\sqrt{v})$,
 $u = \frac{x}{y}, v = x^2 y^4$.
8. Исследовать функцию на экстремум $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.
9. Проверить тождество: $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$, $u = \sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$

ВАРИАНТ 22

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$.
2. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$.
3. Найти точки перегиба функции $y = \sqrt[3]{(x - 2)^5} + 3$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ на отрезке $[0; 1]$.
5. Построить графики функции:
 - а) $y = (x + 2)^3(x - 1)$,
 - б) $y = x \ln(4x)$,
 - в) $y = \frac{2x^3}{x^2 - 9}$.
6. Найти производные первого порядка функции $z = \operatorname{tg}(\sqrt{x^3 + xy^2})$.
7. Вычислить производную сложной функции $z = e^{u/v} \cdot \ln v$, $u = 6x + y, v = \frac{x}{y}$

8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 15$.

9. Проверить тождество: $a^2 u''_{xx} = u''_{yy}, u = e^{-\cos(x+ay)}$

ВАРИАНТ 23

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\operatorname{tg} x}$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(1 - x\sqrt{x})$.

3. Найти точки перегиба функции $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sqrt{x} - x$ на отрезке $[0;4]$.

5. Построить графики функции:

а) $y = (16 - 6x^2 - x^3)/8$, б) $y = \frac{x^2}{x-1}$, в) $y = x^2 - 2\ln x$.

6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :

$$u = \operatorname{arctg}(yz^2 + x), M_0(0;2;1).$$

7. Вычислить производную сложной функции $z = e^{u^2v} \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = 3xy, v = 2x - y$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z = 15x - 2x^2 - xy + 1 - 2y^2$.

9. Проверить тождество: $u'_x + u'_y + u'_z = 0$, $u = (x-y)(y-z)(z-x)$.

ВАРИАНТ 24

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$.

2. Найти промежутки монотонности функции $y = \ln(1 - x^2)$.

3. Найти точки перегиба функции $y = \frac{x^3}{x^2 + 48}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{4x}{4 + x^2}$ на отрезке $[-4;2]$.

5. Построить графики функции:

а) $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$, б) $y = \frac{4x^2 + 5}{x}$, в) $y = e^{-x^3 + 3x}$.

6. Найти производные первого порядка функции $z = \operatorname{ctg} \frac{x^2 - y}{\sqrt{xy}}$.

7. Вычислить производную сложной функции $z = \cos\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{1}{\sqrt{vu}}$,
 $u = x^2 y, v = x + y^2$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = 6x - x^2 - xy + 1 - y^2$.
9. Проверить тождество: $xu'_x + yu'_y = u, u = x \ln \frac{y}{x}$.

ВАРИАНТ 25

1. Вычислить предел, применяя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{5x^5 + x + 2}$
2. Исследовать на экстремум функцию $y = \ln(x^2 + 1)$.
3. Найти точки перегиба функции $y = \frac{x^3}{x^2 + 48}$.
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{10x}{1 + x^2}$ на отрезке $[0; 3]$.
5. Построить графики функции:
 а) $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$, б) $y = \frac{x^2}{x - 2}$, в) $y = \frac{x}{\ln x}$.
6. Вычислить значения частных производных первого порядка в точке M_0 :
 $u = 27\sqrt[3]{x^3 + y^2 + z}, z = \sqrt{\ln(2 - x - y)}$.
7. Вычислить производную сложной функции $z = u \ln(v^2 - u^2)$,
 $u = xy, v = 3x + 2y^2$.
8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
9. Проверить тождество: $yu'_x - xu'_y = 0, u = \ln(x^2 + y^2)$.

Справочный материал

- **Производная** от функции $y = f(x)$ в точке x :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- **Дифференциал** функции $y = f(x)$: $dy = y'dx$.

- **Правила дифференцирования:**

$$1. (c \cdot u)' = c \cdot u'$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$3. (u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

$$5. (f(u))' = f'_u \cdot u'$$

- **Производные основных элементарных функций:**

$$1. c' = 0.$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; x' = 1; (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a; (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x.$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$7. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$8. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

- **Правило Лопиталья:** Если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой

неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$, и существуют производные функций $f(x)$

и $g(x)$ в окрестностях точки a , то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Если производные

$f'(x), g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции, то возможно повторное применение правила:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}, \text{ и т.д.}$$

• **Схема исследования функции:**

1. Найти область определения функции, множество значений (по возможности), точки разрывов, вертикальные асимптоты.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ и (или) $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$. Ищем точки бесконечных разрывов функции, в которых $y = \infty$.

2. Исследовать функцию на четность и нечетность, периодичность.

$y(-x) = y(x)$ - четная функция, $y(-x) = -y(x)$ - нечетная функция..

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

4. Исследовать функцию на монотонность, найти точки экстремума.

Монотонность: функция возрастает (убывает), если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Точки, подозрительные на экстремум (**критические**): $f'(x) = 0$, $f'(x)$ не существует.

Достаточное условие существования экстремума. Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в этой точке существует максимум (минимум) функции.

5. Найти точки перегиба, определить направление выпуклости графика функции.

Выпуклость вверх (вниз) на (a, b) , если на (a, b) $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).

Точки, подозрительные на перегиб: $f''(x) = 0$, $f''(x)$ не существует.

Достаточное условие существования перегиба. Если при переходе через точку, подозрительную на перегиб, вторая производная меняет знак, то в этой точке перегиб - изменение направления выпуклости функции - существует.

6. Найти наклонные асимптоты графика функции.

Наклонные асимптоты графика $f(x)$: $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Горизонтальная асимптота при $k = 0$: $y = b$.

7. Построить график функции.

- Функция двух переменных $z = z(x, y)$ имеет 2^n производных n -го порядка, функция трех переменных $u = u(x, y, z)$ - 3^n .
- Производная функции одного аргумента $y = f(x)$, заданной неявно в виде $F(x, y) = 0$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$.
- Частные производные функции двух аргументов $z = f(x, y)$, заданной неявно в виде $F(x, y, z) = 0$: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.
- Дифференциалы функции нескольких переменных:
 $z = z(x, y)$; $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$; $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$.
 $u = u(x, y, z)$; $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.
- Экстремум функции двух переменных $z = z(x, y)$. Точки, подозрительные на экстремум (стационарные) находятся из системы уравнений: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Пусть $P(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = z(x, y)$. Обозначим $A = z''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = z''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = z''_{yy}(x_0, y_0)$ и $D = AC - B^2$. Тогда
 - а) при $D > 0$ в т. $P(x_0, y_0)$ максимум, если $A < 0$ ($C < 0$), и минимум, если $A > 0$ ($C > 0$);
 - б) при $D < 0$ экстремума нет;
 - в) при $D = 0$ необходимы дополнительные исследования.
- Дифференцирование сложных функций двух аргументов $z = f(x, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$