

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ»

**Целями работы являются**

- повторение основных понятий теории числовых и степенных рядов: числового ряда, его сходимости, необходимого признака сходимости, достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов, знакочередующегося ряда, признака Лейбница, абсолютной сходимости, степенного ряда, интервала его абсолютной сходимости, разложений функций в степенные ряды;
- закрепление навыков решения задач по теории числовых и степенных рядов, полученных на аудиторных занятиях.

### Задание для разбора

**Задача 1.** Найти сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$

**Задача 2.** Исследовать ряды на сходимость.

а)  $\frac{5}{1} + \frac{5^2}{2^5} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$       б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$       в)  $\frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$

**Задача 3.** Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

**Задача 4.** Определить интервал абсолютной сходимости ряда и исследуйте его на сходимость на концах интервала.

$$1 + \frac{2x}{3^2 \sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2 \sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2 \sqrt{3^3}} + \dots$$

**Задача 5.** Вычислить  $\sqrt[3]{65}$  с точностью до 0,0001.

## Разбор задач

**Задача 1.** Найти сумму числового ряда  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$

*Решение.* Общий член ряда  $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ . Представим рациональную дробь в виде суммы двух простейших

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} = \frac{n(3A+3B)+A-2B}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Найдем коэффициенты  $A$  и  $B$  методом неопределенных коэффициентов. Так как  $1 = n(3A + 3B) + A - 2B$ , то, приравнявая коэффициенты слева и справа, получим систему  $\begin{cases} 3A + 3B = 0, \\ A - 2B = 1. \end{cases}$  Отсюда  $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$ . Тогда общий член ряда

можно представить в виде  $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$ . Составим частичную сумму ряда

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3n+1} \right). \end{aligned}$$

Тогда сумма исходного ряда равна  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}$ .

Ответ: Сумма ряда  $S = \frac{1}{3}$ .

**Задача 2.** Исследовать числовые ряды на сходимость.

*Решение.* а)  $\frac{5}{1} + \frac{5^2}{2^5} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$

Составим общий член ряда  $a_n = \frac{5^n}{n^5}$ . Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left( \frac{n}{n+1} \right)^5 = 5 > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

Общий член ряда  $a_n = \frac{1}{4^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$ . Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{4e} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

$$в) \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$$

Составим общий член ряда  $a_n = \frac{n}{1+n^2}$ . Используем интегральный признак Коши:

$$\int_1^\infty \frac{ndn}{1+n^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{ndn}{1+n^2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(1+n^2) \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\ln(1+B^2) - \ln 2) = \infty.$$

Следовательно, ряд расходится.

**Задачи 3.** Исследовать числовой ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

*Решение.* Так как ряд знакочередующийся, то составим общий член ряда, составленный из абсолютных величин  $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ . Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость, применяя предельный признак сравнения. Сравним его с рядом, общий член которого равен  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , который расходится по интегральному признаку  $\int_1^\infty \frac{dn}{\sqrt{n}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dn}{\sqrt{n}} = \lim_{B \rightarrow \infty} 2\sqrt{n} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} (2\sqrt{B} - 2) = \infty$ .

Проверим условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ , условие выполняется, следовательно ряд, составленный из абсолютных величин  $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$  расходится. Абсолютной сходимости нет. Применим признак Лейбница и исследуем ряд на условную сходимость. Проверим два условия признака Лейбница:

$$1) a_n > a_{n+1}, \quad \frac{1}{\sqrt{2n-1}} > \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ выполняется;}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0 \text{ выполняется.}$$

Следовательно, исходный ряд условно сходится.

**Задача 4.** Определить интервал абсолютной сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах интервала.

$$1 + \frac{2x}{3^2 \sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2 \sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2 \sqrt{3^3}} + \dots$$

*Решение.* Составим общий член ряда  $u_n = \frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$ . Применяя признак Даламбера, найдем область абсолютной сходимости ряда из условия  $\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ ,

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x)^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}} \cdot \frac{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}{(2x)^{n-1}} \right| = \frac{2|x|}{\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^2 < 1,$$

отсюда  $\frac{2|x|}{\sqrt{3}} < 1$ ,  $|x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Тогда область абсолютной сходимости ряда  $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала. Пусть  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , тогда общий член ряда равен  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ . Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость:  $|u_n| = \frac{1}{(2n-1)^2}$ . Сравним его с рядом  $b_n = \frac{1}{n^2}$ , который сходится, так как степень неизвестного  $2 > 1$ . Проверим условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4(2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

условие выполняется, следовательно ряд  $|u_n| = \frac{1}{(2n-1)^2}$  сходится, а ряд  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$  сходится абсолютно.

Пусть  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , общий член полученного числового ряда равен  $u_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ , этот ряд сходится, что было показано выше.

Таким образом, область абсолютной сходимости исходного ряда  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Задача 5.** Вычислить  $\sqrt[3]{65}$  с точностью до 0,0001.

*Решение.* Так как  $4^3$  является ближайшим к числу 65 кубом целого числа, то целесообразно число 65 представить в виде суммы двух слагаемых:  $65=64+1$ . Тогда

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} = \sqrt[3]{64 \left(1 + \frac{1}{64}\right)} = 4 \left(1 + \frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся разложением  $(1+x)^m$  в ряд, полагая  $x = \frac{1}{64}$ ,  $m = \frac{1}{3}$ . Имеем

$$\begin{aligned} 4 \left(1 + \frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} &= 4 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64^2} + \dots\right) = \\ &= 4(1 + 0,00521 - 0,000027 + \dots). \end{aligned}$$

Третий и следующие за ним члены отбрасываем, так как третий член меньше 0,0001. Итак,  $\sqrt[3]{65} \approx 4,0208$ .

## Варианты для самостоятельной работы

**Задача 1.** Найдите сумму ряда.

1.  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$

3.  $\frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{6 \cdot 3} + \dots$

5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+4)}$

7.  $\frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{1}{8 \cdot 6} + \frac{1}{10 \cdot 8} + \dots$

9.  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$

11.  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots$

13.  $\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots$

15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

17.  $1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} - \frac{1}{216} + \dots$

19.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{4}{18} + \frac{8}{54} + \dots$

21.  $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$

23.  $\frac{2}{3} - \frac{6}{12} + \frac{18}{48} - \frac{54}{192} + \dots$

25.  $\frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \dots$

2.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

4.  $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \dots$

6.  $\frac{1}{10 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 16} + \dots$

8.  $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$

10.  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

12.  $\frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 8} + \dots$

14.  $\frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 12} + \dots$

16.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$

18.  $\frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 7} + \frac{2}{5 \cdot 9} + \dots$

20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+2)^2 - 1}$

22.  $\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots$

24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n^2 + 4n - 3}$

**Задача 2.** Исследуйте ряды на сходимость.

1.a)  $\frac{5}{1} + \frac{5^2}{2^5} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$

в)  $\frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$

2.a)  $\frac{5}{1 \cdot 3} + \frac{5^2}{3 \cdot 3^2} + \frac{5^3}{5 \cdot 3^3} + \dots$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$

в)  $\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots$

3.a)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}$

в)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$

$$4.a) \frac{4 \cdot 1!}{1} + \frac{4^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{4^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n-3}{5n+1} \right)^n \quad в) \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+3^2}} + \dots$$

$$5.a) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n \quad в) \frac{1}{101} + \frac{2}{104} + \frac{3}{109} + \dots$$

$$6.a) \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{3n+1} \right)^{2n+1} \quad в) \frac{1}{2^3 \sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{3^3 \sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{4^3 \sqrt{\ln 2}} + \dots$$

$$7.a) \frac{7}{1 \cdot 3} + \frac{7^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{7^3}{3 \cdot 3^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n} \quad в) \frac{1}{3(\ln 3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{4(\ln 3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{5(\ln 3)^{\frac{2}{3}}} + \dots$$

$$8.a) \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2} \quad в) 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

$$9.a) 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{8}{4^4} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n} \quad в) 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots$$

$$10.a) \frac{2}{4 \cdot 1!} + \frac{2^2}{5 \cdot 2!} + \frac{2^3}{6 \cdot 3!} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad в) \frac{1}{9+1^2} + \frac{1}{9+2^2} + \frac{1}{9+3^2} + \dots$$

$$11.a) \frac{\sqrt{1!}}{3} + \frac{\sqrt{2!}}{3^2} + \frac{\sqrt{3!}}{3^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{n^3} \quad в) \frac{1}{10 \ln^3 10} + \frac{1}{20 \ln^3 20} + \dots$$

$$12.a) \frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{3n+1} \right)^{n/2} \quad в) \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots$$

$$13.a) \frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n} \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{9+n^4} \dots$$

$$14.a) \frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \quad в) e + \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + \frac{e^{\sqrt{4}}}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$15.a) \frac{3}{2!} + \frac{9}{4!} + \frac{27}{6!} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-2}{12n+1} \right)^{3n} \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \dots$$

$$16.a) \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5^2} + \frac{4^3}{3^3 \cdot 5^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n} \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{1+n^2} \dots$$

$$17.a) \frac{10}{1!} + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{3n-3} \right)^{n^2} \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{1+2n^2} \dots$$

$$18.a) \frac{7 \cdot 1!}{1} + \frac{7^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{7^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{10n+5} \right)^{n^2} \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-4n+10} \dots$$

- 19.a)  $\frac{100}{1!} + \frac{100^2}{2!} + \frac{100^3}{3!} + \dots$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n^2 - 2}{4n^2 + 2} \right)^{n^3}$  в)  $\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{3\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{4\sqrt{\ln 4}} + \dots$
- 20.a)  $\frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{6^2} + \frac{2^4}{9^3} + \dots$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n^2 - 2n + 3}{3n^2 - 1} \right)^n$  в)  $\frac{1}{3\ln^3 3} + \frac{1}{4\ln^3 4} + \frac{1}{5\ln^3 5} + \dots$
- 21.a)  $\frac{1!}{3!} + \frac{2!}{6!} + \frac{3!}{9!} + \dots$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^{n-1}}$  в)  $\frac{5}{1} + \frac{5}{4} + \frac{5}{7} + \dots$
- 22.a)  $\frac{7^2}{1!} + \frac{7^4}{3!} + \frac{7^6}{5!} + \dots$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{2n+2}$  в)  $\frac{5}{1+1^2} + \frac{10}{1+2^2} + \frac{15}{1+3^2} + \dots$
- 23.a)  $\frac{3}{4 \cdot 3!} + \frac{3^2}{4^2 \cdot 4!} + \frac{3^3}{4^3 \cdot 5!} + \dots$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{(n-1)^2}{2n^2 + 3} \right)^n$  в)  $\frac{1}{3\ln^2 3} + \frac{1}{5\ln^2 5} + \frac{1}{7\ln^2 7} + \dots$
- 24.a)  $\frac{1}{3!} + \frac{2^2}{4!} + \frac{3^2}{5!} + \dots$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n-1}{3n+2} \right)^{3n/2}$  в)  $\frac{1+2}{1} + \frac{2+2}{2^2} + \frac{3+2}{3^2} + \dots$
- 25.a)  $\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 3!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 5!}{3^2} + \dots$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{7n^2 + 2}{9n^2 - 1} \right)^{2n}$  в)  $\frac{4}{1+3^2} + \frac{4}{1+5^2} + \frac{4}{1+7^2} + \dots$

**Задача 3.** Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость.

- $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$
- $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$
- $\frac{1}{2\ln^2 2} - \frac{1}{3\ln^2 3} + \frac{1}{4\ln^2 4} - \dots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \right)^{n+1} \frac{n}{n+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$
- $2 - \frac{2}{4} + \frac{2}{9} - \frac{2}{16} + \dots$
- $\frac{1}{2^5} - \frac{2}{2^6} + \frac{3}{2^7} - \dots$
- $1 - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+8} - \frac{1}{1+27} + \dots$
- $\frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{9}{27} - \frac{16}{81} + \dots$
- $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \dots$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 4n + 8}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1 + (0,1)^n)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n^2 + n + 1}$
- $\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \dots$
- $\left( \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{6}{7} \right)^2 + \left( \frac{9}{10} \right)^3 - \dots$
- $\frac{1}{e} - \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} - \dots$
- $1 - \frac{2}{2^2} + \frac{4}{3^3} - \frac{8}{4^4} + \dots$

$$19. 1 - \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!} - \frac{8}{3!} + \dots$$

$$21. 1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \dots$$

$$23. \frac{21}{3} - \frac{41}{9} + \frac{61}{27} - \dots$$

$$25. 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$20. -\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \dots$$

$$22. 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 - \dots$$

$$24. 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \dots$$

**Задача 4.** Определите интервал абсолютной сходимости ряда и исследуйте его на сходимость на концах интервала.

$$1. 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots$$

$$3. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$$

$$5. \frac{2x-3}{1} + \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} + \dots$$

$$7. \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$9. \frac{x-3}{2 \cdot 5} + \frac{(x-3)^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{(x-3)^3}{4 \cdot 5^3} + \dots$$

$$11. x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$$

$$13. \frac{x+1}{1 \cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 2^3} + \dots$$

$$15. \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{x^3}{5^2\sqrt{3}} + \frac{x^5}{5^3\sqrt{4}} + \dots$$

$$17. x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$19. \frac{2x-5}{1} + \frac{(2x-5)^2}{3} + \frac{(2x-5)^3}{5} + \dots$$

$$21. \frac{2^5 x^2}{3} + \frac{3^5 x^4}{5} + \frac{4^5 x^6}{7} + \dots$$

$$23. \frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{(x+1)^6}{3} + \dots$$

$$2. \frac{x}{7} + \frac{x^2}{2 \cdot 7^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 7^3} + \dots$$

$$4. \frac{x}{e} + \frac{x^2}{e^2} + \frac{x^3}{e^3} + \dots$$

$$6. \frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \dots$$

$$8. \frac{x+1}{1} + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \dots$$

$$10. 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \dots$$

$$12. \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$$

$$14. \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots$$

$$16. \frac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{x^6}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \dots$$

$$18. \frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(x-1)^3}{5^3} + \dots$$

$$20. \frac{x+2}{1} + \frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{(x+2)^3}{3^3} + \dots$$

$$22. \frac{x+2}{3 \cdot 3} + \frac{(x+2)^2}{5 \cdot 3^2} + \frac{(x+2)^3}{7 \cdot 3^3} + \dots$$

$$24. \frac{x-7}{4} + \frac{(x-7)^3}{4^2} + \frac{(x-7)^5}{4^3} + \dots$$



25.  $\frac{(x-1)^2}{1 \cdot 9} + \frac{(x-1)^4}{2 \cdot 9^2} + \frac{(x-1)^6}{3 \cdot 9^3} + \dots$

## Задача 5.

1. Вычислите  $\sqrt[3]{65}$  с точностью до 0,001.

2. Разложите в ряд по степеням  $x$  функцию  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

3. Разложите в ряд по степеням  $x$  функцию  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

4. Вычислите  $\int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$  с точностью до 0,001.

5. Вычислите  $\arctg(1/2)$  с точностью до 0,001.

6. Вычислите  $\sqrt[3]{7}$  с точностью до 0,001.

7. Разложите в ряд по степеням  $x$  функцию  $f(x) = xe^{-2x}$ .

8. Вычислите  $\int_2^3 \arctg(1/x) dx$  с точностью до 0,001.

9. Вычислите  $\cos 36^\circ$  с точностью до 0,001.

10. Вычислите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$ , разложив числитель и знаменатель в ряд.

11. Вычислите  $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$  с точностью до 0,001.

12. Вычислите  $\sqrt[4]{17}$  с точностью 0,001.

13. Вычислите  $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  с точностью 0,001.

14. Вычислите  $\sin 72^\circ$  с точностью до 0,001.

15. Вычислите  $\int_0^1 \sqrt{e^{3x^2}} dx$  с точностью до 0,001.

16. Разложите в ряд по степеням  $x-1$  функцию  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

17. Вычислите  $e^{1/3}$  с точностью до 0,001.

18. Вычислите  $\cos 12^\circ$  с точностью до 0,001.

19. Разложите в ряд по степеням  $x - \frac{\pi}{4}$  функцию  $f(x) = \cos x$ .

20. Вычислите  $e^{1/5}$  с точностью до 0,001.

21. Вычислите  $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$  с точностью до 0,001.

22. Разложите в ряд по степеням  $x$  функцию  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

23. Разложите в ряд по степеням  $x$  функцию  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

24. Вычислите  $\sin 12^\circ$  с точностью до 0,001.

25. Вычислите  $\cos 24^\circ$  с точностью до 0,001.

## Справочный материал

### • Числовые ряды

Ряд вида  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется числовым рядом. Сумма  $n$  первых членов ряда  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  называется частичной суммой. Ряд сходится, если существует конечный предел  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Для сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ .

### • Признаки сходимости числовых рядов

*Необходимый признак сходимости.* Если ряд  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

*Следствие.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд расходится.

### • Признаки сходимости знакоположительных рядов

- *Признак Даламбера.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$ , то при  $p < 1$  ряд сходится, при  $p > 1$  ряд расходится, при  $p = 1$  вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.
- *Радикальный признак Коши.* Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = p$ , то при  $p < 1$  ряд сходится, при  $p > 1$  ряд расходится, при  $p = 1$  признаком пользоваться нельзя.
- *Интегральный признак Коши.* Если члены ряда  $u_n = f(n)$  монотонно убывают ( $u_n > u_{n+1}$ ) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то если интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  сходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится; если интеграл расходится, то и ряд расходится.
- *Первый признак сравнения рядов.* Если  $0 \leq v_n \leq u_n$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  расходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  расходится. Если  $0 \leq u_n \leq v_n$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  сходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится.
- *Второй признак сравнения (предельный).* Если существует конечный, отличный от нуля предел отношения соответствующих членов числовых

рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$ , то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

- **Знакопеременные ряды**

*Признак Лейбница.* Если члены знакопеременного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$  монотонно убывают ( $u_n > u_{n+1}$ ) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то ряд сходится.

- **Знакопеременные ряды**

Знакопеременный ряд абсолютно сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ . Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  расходится, а знакопеременный ряд сходится по признаку Лейбница, то знакопеременный ряд сходится условно. Если ряд из абсолютных величин расходится и знакопеременный ряд расходится, то исследуемый ряд расходится.

- **Гармонический ряд**

Ряд вида  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  называется гармоническим, этот ряд расходится.

Замечание. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится, если  $p > 1$ , и расходится, если  $p \leq 1$ .

- **Геометрическая прогрессия**

Ряд  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ , где  $|q| < 1$ , составленный из членов убывающей геометрической прогрессии, является сходящимся и имеет сумму  $S = \frac{a}{1-q}$ .

- **Степенные ряды**

Ряд вида  $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ , называется степенным рядом. Интервал абсолютной сходимости степенного ряда находят из неравенств:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1, \quad \text{где} \quad u_n = a_n(x - x_0)^n.$$

- **Ряды Тейлора и Маклорена**

Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Остаточный член ряда в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Остаточный член ряда в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

- **Разложение в ряд Маклорена элементарных функций**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad |x| \leq 1.$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

.