

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Целями работы являются

- повторение основных понятий аналитической геометрии: линии на плоскости, поверхности в пространстве, их уравнений, взаимных расположений прямых, плоскостей, плоскости и прямой, расстояний между геометрическими объектами, простейших задач на плоскости;
- закрепление навыков решения задач по аналитической геометрии, полученных на аудиторных занятиях.

Задание для разбора

Задача 1. Даны вершины треугольник $A(-1; 4), B(3; 2), C(6; 6)$. Найти:

1. длину и уравнение стороны BC ;
 2. длину и уравнение высоты AK ;
 3. длину и уравнение медианы CM ;
 4. угол B ;
 5. площадь треугольника ABC ;
 6. координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части.
- Сделать чертеж.

Задача 2. Построить кривую $3x^2 - 2y^2 - 6x - 12y - 21 = 0$.

Задача 3. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $A(0; 5)$.

Задача 4. Найти расстояние от точки $D(-2; 3; -4)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1; -2; 0), B(3; 0; 5), C(-1; -2; 1)$.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD (D – середина отрезка AC), если точки $A(1; 7; -3), B(3; 2; 1), C(5; 3; -1)$.

Задача 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$ и плоскости $x + 2y - 3z = 0$ и угол между ними.

Задача 7. Найти расстояние от точки $A(1; -1; 2)$ до прямой

$$\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0, \\ x + 2y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

Разбор задач

Задача 1. Даны вершины треугольника $A(-1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(6; 6)$. Найти:

1. длину и уравнение стороны BC ;
2. длину и уравнение высоты AK ;
3. длину и уравнение медианы CM ;
4. угол B ;
5. площадь треугольника ABC ;
6. координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части. Сделать чертеж.

Решение.

1. Длина стороны BC вычисляется по формуле

$$|BC| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(3 - 6)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Уравнение прямой BC найдем как уравнение прямой, проходящей через 2 точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

$$\frac{x - 3}{6 - 3} = \frac{y - 2}{6 - 2} \Rightarrow 4x - 12 = 3y - 6 \Rightarrow 4x - 3y - 6 = 0.$$

Уравнение прямой BC : $4x - 3y - 6 = 0$.

2. Длину высоты AK можно найти как расстояние от точки A до прямой BC :

$$|AK| = d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{22}{5}.$$

Угловой коэффициент прямой BC равен $k_{BC} = \frac{4}{3}$, тогда угловой коэффициент прямой AK равен $k_{AK} = -1/k_{BC} = -\frac{3}{4}$. Уравнение прямой, проходящей через точку A с угловым коэффициентом k_{AK} :

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 1) \Rightarrow 4y - 16 = -3x - 3 \Rightarrow 3x + 4y - 13 = 0.$$

Уравнение высоты AK : $3x + 4y - 13 = 0$.

3. Точка M – середина отрезка AB . Найдем ее координаты

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \Rightarrow M(1; 3).$$

Найдем длину отрезка CM :

$$|CM| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(6 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{34}.$$

Уравнение стороны CM :

$$\frac{x - 1}{6 - 1} = \frac{y - 3}{6 - 3} \Rightarrow 3x - 3 = 5y - 15 \Rightarrow 3x - 5y + 12 = 0.$$

4. Угол B – это угол между векторами $\overrightarrow{BA} = (-4; 2)$ и $\overrightarrow{BC} = (3; 4)$:

$$\cos B = \frac{-4 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-4}{\sqrt{20} \cdot 5} = \frac{-2\sqrt{5}}{25}.$$

Угол вычисляем на калькуляторе. Тогда $\alpha = 100,3^\circ$.

5. Площадь треугольника ABC вычисляется по формуле:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} (8 + 8) = 8.$$

6. Найдем координаты точки F_1 , которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-1 + 0,5 \cdot 3}{1 + 0,5} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3};$$

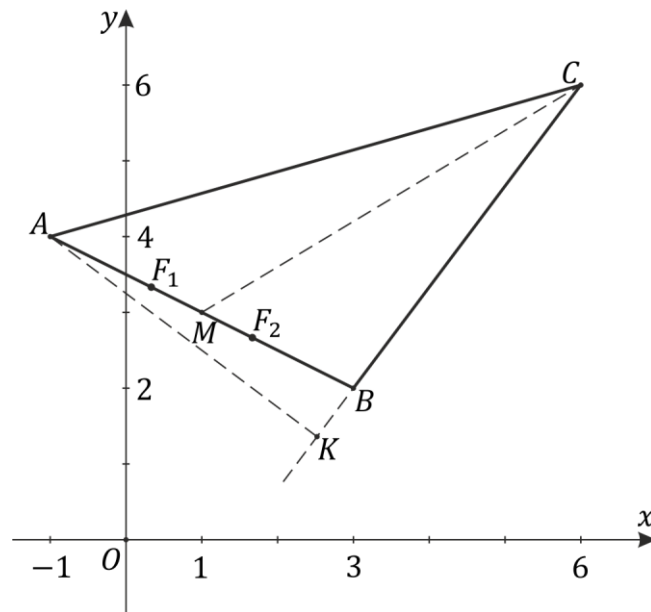
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + 0,5 \cdot 2}{1 + 0,5} = \frac{5}{1,5} = \frac{10}{3}; \Rightarrow F_1 \left(\frac{1}{3}; \frac{10}{3} \right)$$

Найдем координаты точки F_2 , которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = 2$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-1 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = \frac{5}{3};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{8}{3}; \Rightarrow F_2 \left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3} \right)$$

Построим треугольник, нанеся на чертеж все рассматриваемые объекты. Рекомендуем сделать рисунок в координатах до решения задачи для проверки получаемых результатов.



Задача 2. Построить кривую $3x^2 - 2y^2 - 6x - 12y - 21 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты для неизвестных x, y :

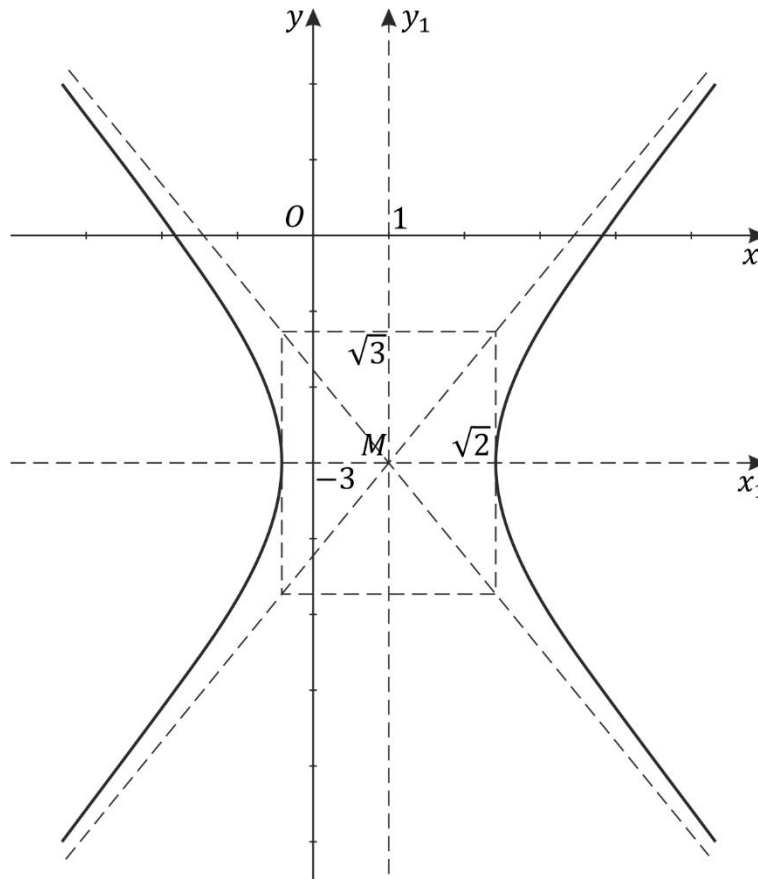
$$3(x^2 - 2x) - 2(y^2 + 6y) - 21 = 0;$$

$$\begin{aligned} 3((x-1)^2 - 1) - 2((y+3)^2 - 9) - 21 &= 0; \\ 3(x-1)^2 - 2(y+3)^2 &= 6; \\ \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{3} &= 1. \end{aligned}$$

Это гипербола с центром в точке $M(1; -3)$, действительной полуосью $a = \sqrt{2}$ и мнимой полуосью $b = \sqrt{3}$. Переносим начало координат в центр гиперболы и переносим оси, параллельные Ox , Oy . В системе координат x_1My_1 уравнение гиперболы

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{3} = 1.$$

Для построения гиперболы необходимо построить ее асимптоты $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$.



Задача 3. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $A(0; 5)$.

Решение. На оси Ox отметим точку $B(x; 0)$, тогда $|MA| = |MB| \Rightarrow |y| = |MA| \Rightarrow |y| = \sqrt{x^2 + (y-5)^2}$. Возведем обе части в равенства квадрат:
 $y^2 = x^2 + y^2 - 10y + 25 \Rightarrow x^2 - 10y + 25 = 0$.

Отсюда $y = \frac{1}{10}(x^2 + 25)$ – уравнение параболы.

Задача 4. Найти расстояние от точки $D(-2; 3; -4)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1; -2; 0)$, $B(3; 0; 5)$, $C(-1; -2; 1)$.

Решение. Найдем уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки по формуле

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим координаты точек, получим: $\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z \\ 3 - 1 & 0 + 2 & 5 \\ -1 - 1 & -2 + 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ или

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z \\ 2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Раскроем определитель:}$$

$$(x - 1) \cdot 2 - 10 \cdot (y + 2) + 4z - 2(y + 2) = 0;$$

$$2x - 2 - 10y - 20 + 4z - 2y - 4 = 0;$$

$$x - 6y + 2z - 13 = 0 - \text{уравнение искомой плоскости.}$$

Расстояние от точки D до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-2 - 6 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) - 13|}{\sqrt{1^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{41}{\sqrt{41}} = \sqrt{41}.$$

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если точки $A(1; 7; -3), B(3; 2; 1), C(5; 3; -1)$, а D – середина отрезка AC ,

Решение. Нормальный вектор искомой плоскости: $\vec{N} = \overrightarrow{BC} = (2; 1; -2)$.

Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{N} :

$$2(x - 1) + (y - 7) - 2(z + 3) = 0;$$

$$2x - 2 + y - 7 - 2z - 6 = 0;$$

$$2x + y - 2z - 15 = 0.$$

Найдем координаты точки D :

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3; \quad y_D = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5;$$

$$z_D = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-3 - 1}{2} = -2 \Rightarrow D(3; 5; -2).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки B и D :

$$\frac{x - 3}{3 - 3} = \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{z - 1}{-2 - 1} \Rightarrow \frac{x - 3}{0} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 1}{-3}.$$

Тогда параметрическое уравнение прямой BD :

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$$

Задача 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$ и плоскости $x + 2y - 3z = 0$ и угол между ними.

Решение. Переведем канонические уравнения прямой в параметрические уравнения:
$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t, \\ z = 5. \end{cases}$$

Подставим полученные координаты в уравнение плоскости: $2t - 1 + 2t - 3 \cdot 5 = 0 \Rightarrow t = 4$. Тогда координаты точки пересечения прямой и плоскости $(7; 4; 5)$.

Угол между прямой и плоскостью находим по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{p}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{p}|},$$

где $\vec{N} = (1; 2; -3)$, $\vec{p} = (2; 1; 0)$, тогда

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{p}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{8}{\sqrt{70}}, \text{отсюда}$$

$\varphi \approx 73^\circ$.

Задача 7. Найти расстояние от точки $A(1; -1; 2)$ до прямой
$$\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0, \\ x + 2y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем канонические уравнения прямой. Так как нормальные векторы плоскостей имеют вид $\vec{N}_1 = (1; -1; 3)$, $\vec{N}_2 = (1; 2; -4)$, то направляющий вектор прямой найдем по формуле:

$$\vec{P} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} + 4\vec{j} - 6\vec{i} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Направляющий вектор прямой $\vec{P} = (-2; 7; 3)$. Найдем координаты точки, которая принадлежит данной прямой. Пусть $z = 0$, тогда, решая систему

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$$

найдем точку $M(1; 2; 0)$. Расстояние от точки A до прямой найдем по формуле:

$$d = \frac{|\overrightarrow{MA} \times \vec{P}|}{|\vec{P}|},$$

где $\overrightarrow{MA} = (0; -3; 2)$;

$$\overrightarrow{MA} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k} - 14\vec{i} = -23\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Тогда

$$d = \frac{|\overrightarrow{MA} \times \vec{P}|}{|\vec{P}|} = \frac{\sqrt{(-23)^2 + (-4)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{581}{62}}.$$

Варианты для решения

ВАРИАНТ 1

- Даны вершины $A(-5;1), B(2;5), C(1;-1)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
- Построить кривую $3x^2 + 2y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$.
- Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5;0)$ относятся как 2:1.
- Найти расстояние от точки $D(-6;7;-10)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(3;10;-1), B(-2;3;-5), C(-6;0;-3)$.
- Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-2;0;-5), B(2;7;-3), C(1;10;-1)$.
- Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$ и плоскостью $x - 2y + 4z - 19 = 0$.
- Найти расстояние от точки $A(-2;0;5)$ до прямой $\begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 2

- Даны вершины $A(2;-3), B(3;2), C(-2;5)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
- Построить кривую $2x^2 - 4x - y + 3 = 0$.
- Составить уравнение линии, каждая точка которой остается вдвое дальше от точки $A(-8;0)$, чем от прямой $x = -2$.
- Найти расстояние от точки $D(-1;0;-1)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(-2;-1;-1), B(0;3;2), C(3;1;-4)$.
- Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(5;-1;2), B(2;-4;3), C(4;-1;3)$.

6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ и плоскостью $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(2;1;4)$ до прямой $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 3

- Даны вершины $A(-3;0)$, $B(2;5)$, $C(3;2)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
- Построить кривую $y^2 - 4x - 8y = 0$.
- Составить уравнение траектории точки M , которая при своем движении остается вдвое ближе к прямой $y = 2$, чем к точке $A(1;1)$.
- Найти расстояние от точки $D(-5;-9;1)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;-2;1)$.
- Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-3;5;-2)$, $B(-4;0;3)$, $C(-3;2;5)$.
- Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $x + 3y - 5z + 9 = 0$.
- Найти расстояние от точки $A(7;-5;1)$ до прямой $\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 4

- Даны вершины $A(4;3)$, $B(-2;1)$, $C(1;0)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
- Построить кривую $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$.
- Составить уравнение траектории точки M , которая при своем движении остается вдвое дальше от прямой $y = 2$, чем от прямой $x = -3$.
- Найти расстояние от точки $D(-3;-7;6)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1;1;1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-3;6;4)$, $B(8;-3;5)$, $C(10;-3;7)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}$ и плоскостью $5x+7y+9z-32=0$.
7. Найти расстояние от точки $A(-1;-1;7)$ до прямой $\begin{cases} 6x-5y+3z+8=0, \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 5

1. Даны вершины $A(-2;0)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.
3. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от каждой точки до точек $A(2;3)$ и $B(4;5)$ равна 54.
4. Найти расстояние от точки $D(-5;-4;8)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(7;-5;0)$, $B(8;3;-1)$, $C(8;5;1)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}$ и плоскостью $3x-7y-2z+7=0$.
7. Найти расстояние от точки $A(1-1;-5)$ до прямой $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 6

1. Даны вершины $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$.
3. Составить уравнение линии, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(-3;0)$ и $B(3;0)$ равна 50.

4. Найти расстояние от точки $D(-13;-8;16)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-3;-1;7)$, $B(0;2;-6)$, $C(2;3;-5)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$ и плоскостью $3x - 2y + 5z - 3 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(3;5;0)$ до прямой $\begin{cases} x + 5y - z - 11 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 7

1. Даны вершины $A(2;4)$, $B(0;1)$, $C(4;2)$ треугольника. Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$.
3. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2;2)$ и $B(5;5)$.
4. Найти расстояние от точки $D(-1;-8;7)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(14;4;5)$, $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-3)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(0;7;-9)$, $B(-1;8;-11)$, $C(-4;3;-12)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$ и плоскостью $x + 4y + 13z - 23 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(-4;0;3)$ до прямой $\begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0 \\ x + y + z + 10 = 0 \end{cases}$.

ВАРИАНТ 8

1. Даны вершины $A(2;-1)$, $B(4;3)$, $C(-2;1)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$.

3. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(0;2)$ равно расстоянию этой точки до прямой $y = -2$.
4. Найти расстояние от точки $D(-6;5;5)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(2;0;-4)$, $B(-1;7;1)$, $C(4;-8;-4)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(1;-5;-2)$, $B(6;-2;1)$, $C(2;-2;-2)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$ и плоскостью $5x + 9y + 4z - 25 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(2;-1;3)$ до прямой $\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 9

1. Даны вершины $A(1;2)$, $B(4;5)$, $C(10;-2)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $5x^2 + 2y^2 - 20x - 12y - 12 = 0$.
3. Составить уравнение линии, каждая точки которой отстоит от точки $A(-4;0)$ втрое дальше, чем от начала координат.
4. Найти расстояние от точки $D(-3;6;-8)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-4;-2;5)$, $B(3;-3;-7)$, $C(9;3;-7)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$ и плоскостью $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(-1;2;4)$ до прямой $\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 10

1. Даны вершины $A(3;-5)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;

- координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
- сделать чертеж.
- 2. Построить кривую $x^2 + 6x - 2y + 5 = 0$.
- 3. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A(2;0)$ и $B(0;2)$ равна 4.
- 4. Найти расстояние от точки $D(14;-3;7)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;1)$, $C(5;0;-6)$.
- 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(0;-8;10)$, $B(-5;5;7)$, $C(-8;0;4)$.
- 6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$ и плоскостью $4x + y - 6z - 5 = 0$.
- 7. Найти расстояние от точки $A(-1;-3;2)$ до прямой $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 11

1. Даны вершины $A(0;7)$, $B(4;-1)$, $C(2;1)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 - 10x - 4y + 13 = 0$.
3. Составить уравнение линии, по которой движется точка M , равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4;2)$.
4. Найти расстояние от точки $D(-4;-13;6)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-3;1;0)$, $B(6;3;3)$, $C(9;4;-2)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$ и плоскостью $x + 7y + 3z + 11 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(5;2;0)$ до прямой $\begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 12

1. Даны вершины $A(-3;1)$, $B(2;-1)$, $C(2;3)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;

- площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 + 2y^2 + 8y + 4 = 0$.
 3. Составить уравнение траектории точки M , которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0; -1)$, чем к точке $B(0; 4)$.
 4. Найти расстояние от точки $D(10; -8; -7)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(-1; -5; 2)$, $B(-6; 0; -3)$, $C(3; 6; -3)$.
 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(1; 0; -6)$, $B(-7; 2; 1)$, $C(-9; 6; 1)$.
 6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$ и плоскостью $x - 2y - 3z + 18 = 0$.
 7. Найти расстояние от точки $A(-5; -2; -1)$ до прямой $\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 13

1. Даны вершины $A(-5; 3)$, $B(2; 5)$, $C(-1; -2)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $2x^2 + 3y^2 - 8x - 6y - 1 = 0$.
3. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(0; 2)$ и от прямой $y - 4 = 0$.
4. Найти расстояние от точки $D(-3; 1; 8)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(2; 1; 4)$, $B(3; 5; -2)$, $C(-7; -3; 2)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-7; 1; -4)$, $B(8; 11; -3)$, $C(9; 9; -1)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$ и плоскостью $2x - 5y - 4z + 24 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(2; -1; 4)$ до прямой $\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 14

1. Даны вершины $A(-3; -2)$, $B(-1; 3)$, $C(6; -2)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;

- длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $-3y^2 + 4x - 12y + 12 = 0$.
 3. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(3;0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(6;0)$.
 4. Найти расстояние от точки $D(10;1;8)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(-5;-2;-1)$.
 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(2;1;7)$, $B(9;0;2)$, $C(9;2;3)$.
 6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$ и плоскостью $3x + 4y + 7z - 16 = 0$.
 7. Найти расстояние от точки $A(4;3;0)$ до прямой $\begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 15

1. Даны вершины $A(2;3)$, $B(4;7)$, $C(8;-2)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $3x^2 - 12x - 12y - 36 = 0$.
3. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2;0)$ и от прямой $5x + 8 = 0$ относятся как 4:5.
4. Найти расстояние от точки $D(-12;1;8)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(3;-3;-6)$, $B(1;9;-5)$, $C(6;6;-4)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$ и плоскостью $2x + 3y + 7z - 52 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(3;1;-4)$ до прямой $\begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 16

1. Даны вершины $A(-4;2)$, $B(2;-5)$, $C(5;0)$ треугольника ABC . Найти:

- длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$.
 3. Составить уравнение траектории точки M , которая при своем движении остается вдвое дальше от прямой $y = 2$, чем от прямой $x = 4$.
 4. Найти расстояние от точки $D(-3;4;-5)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$, $C(2;-1;5)$.
 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-7;0;3)$, $B(1;-5;-4)$, $C(2;-3;0)$.
 6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$ и плоскостью $2x - 3y - 5z - 7 = 0$.
 7. Найти расстояние от точки $A(-2;-1;-1)$ до прямой $\begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0, \\ x + 7y - z - 5 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 17

1. Даны вершины $A(5;1)$, $B(-2;2)$, $C(-8;0)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 - 2x + y + 12 = 0$.
3. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от оси OY и от точки $A(4;0)$.
4. Найти расстояние от точки $D(-2;3;5)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(-1;2;4)$, $B(-1-2;-4)$, $C(3;0;-1)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(1;9;-4)$, $B(5;7;1)$, $C(3;5;0)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$ и плоскостью $2x - y + 3z + 23 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(-7;0;3)$ до прямой $\begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 18

1. Даны вершины $A(-2;0), B(6;6), C(1;-4)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $y^2 - 2x + 4y = 0$.
3. Составить уравнение линии, по которой движется точка M , равноудаленная от точек $A(-2;2)$ и $B(4;6)$.
4. Найти расстояние от точки $D(-5;3;7)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(5;3;-1)$, $B(0;0;-3)$, $C(5;-1;0)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$ и плоскостью $3x - y + 4z = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(3;1;-4)$ до прямой $\begin{cases} 6x - 7y - z - 2 = 0, \\ x + 7y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 19

1. Даны вершины $A(2;4), B(5;0), C(-3;-4)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$.
3. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4;0)$, чем от точки $B(1;0)$.
4. Найти расстояние от точки $D(-7;0;-1)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(-3;-1;1)$, $B(-9;1;-2)$, $C(3;-5;4)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-4;-2;0)$, $B(1;-1;-5)$, $C(-2;1;-3)$.

6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ и плоскостью $x - 3y + 7z - 24 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(-1; 3; 4)$ до прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 20

- Даны вершины $A(3;1), B(4;6), C(6;3)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
- Построить кривую $x^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
- Составить уравнение траектории точки M , которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0;4)$, чем к точке $B(0;1)$.
- Найти расстояние от точки $D(3; -2; -9)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1; 2; -3), B(1; 0; 1), C(-2; -1; 6)$.
- Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(1; -1; 8), B(-4; -3; 10), C(-1; -1; 7)$.
- Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и плоскостью $x - 2y + 5z + 17 = 0$.
- Найти расстояние от точки $A(1; -1; 8)$ до прямой $\begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 21

- Даны вершины $A(-3;2), B(5;-2), C(1;3)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
- Построить кривую $x^2 + 2y^2 - 12y + 10 = 0$.
- Составить уравнение множества точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = -4$.
- Найти расстояние от точки $D(2; -1; 4)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1; 2; 0), B(1; -1; 2), C(0; 1; -1)$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(7; -5; 1)$, $B(5; -1; -3)$, $C(3; 0; -4)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$ и плоскостью $3x + y - 5z - 12 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(-8; 0; 7)$ до прямой $\begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 22

1. Даны вершины $A(-2; 4)$, $B(3; -1)$, $C(2; 3)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.
3. Составить уравнение линии, каждая точка которой остается вдвое дальше от оси OX , чем от оси OY .
4. Найти расстояние от точки $D(4; 3; 0)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1; 3; 0)$, $B(4; -1; 2)$, $C(3; 0; 1)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(0; -3; 5)$, $B(-7; 2; 6)$, $C(-3; 2; 4)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ и плоскостью $4x + 2y - 11 - z = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(-3; -5; 6)$ до прямой $\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 23

1. Даны вершины $A(3; 6)$, $B(-1; 3)$, $C(2; -1)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0$.

3. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A(2;0)$ и $B(0;2)$ равна квадрату расстояния между точками A и B .
4. Найти расстояние от точки $D(3;6;6)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(-3;-5;6)$, $B(2;1;-4)$, $C(0;-3;-1)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(-3;7;2)$, $B(3;5;1)$, $C(4;5;3)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ и плоскостью $x+2y-z-2=0$.
7. Найти расстояние от точки $A(1;3;0)$ до прямой $\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y-z+5=0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 24

1. Даны вершины $A(3;-4)$, $B(-2;3)$, $C(4;5)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;
 - координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
 - сделать чертеж.
2. Построить кривую $x^2 - 2x - y + 2 = 0$.
3. Составить уравнение множества точек равноудаленных от точки $A(2;2)$ и от оси OX .
4. Найти расстояние от точки $D(2;-10;8)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(2;-4;-3)$, $B(5;-6;0)$, $C(-1;3;-3)$.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(0;-2;8)$, $B(4;3;2)$, $C(1;4;3)$.
6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$ и плоскостью $5x - y + 4z + 3 = 0$.
7. Найти расстояние от точки $A(1;2;-3)$ до прямой $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

ВАРИАНТ 25

1. Даны вершины $A(-2;3)$, $B(1;6)$, $C(5;2)$ треугольника ABC . Найти:
 - длину и уравнение стороны BC ;
 - длину и уравнение высоты AK ;
 - длину и уравнение медианы CM ;
 - угол B ;
 - площадь треугольника ABC ;

- координаты точек F_1, F_2 , делящих отрезок AB на три равные части;
- сделать чертеж.
- 2. Построить кривую $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 14 = 0$.
- 3. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(5;0)$ и от прямой $2x + 5 = 0$ относятся как 2:1.
- 4. Найти расстояние от точки $D(-3;2;7)$ до плоскости, проходящей через три точки $A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$.
- 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{BC} , и параметрическое уравнение медианы BD , если $A(1;-1;5)$, $B(0;7;8)$, $C(-1;3;8)$.
- 6. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ и плоскостью $x + 3y + 5z - 42 = 0$.
- 7. Найти расстояние от точки $A(1;-1;1)$ до прямой $\begin{cases} 3x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2x - 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$

Справочный материал

Аналитическая геометрия на плоскости

1. **Расстояние между двумя точками** $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. **Площадь треугольника** с вершинами $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

3. **Деление отрезка в данном отношении.** Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , тогда координаты точки M вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \text{ где } \lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

4. Координаты **середины** отрезка ($\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

5. **Полярные координаты:**
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

6. **Уравнения прямой:**

- Уравнение прямой с **угловым коэффициентом** $y = kx + b$, $k = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент; α – угол между OX и прямой; b – отрезок, отсекаемый прямой на оси OY .

- Уравнение прямой, проходящей через **данную точку** $M(x_0, y_0)$ с **данным угловым коэффициентом** k :

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

- Уравнение прямой, проходящей через **две точки**:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой $x = x_1$; если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой $y = y_1$.

- Уравнение прямой, проходящей через **данную точку** $M(x_0, y_0)$ **перпендикулярно вектору** $\vec{N} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

- **Общее** уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$. Здесь A, B – координаты нормального вектора \vec{N} , перпендикулярного прямой. Угловой коэффициент $k = -\frac{A}{B}$.

- Уравнение прямой **в отрезках**: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a – отрезок, отсекаемый прямой на оси OX ; b – отрезок, отсекаемый прямой на оси OY .

7. Угол между двумя прямыми:

- $L_1 : y = k_1x + b_1$, $L_2 : y = k_2x + b_2$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|;$$

- $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

- Если прямые **параллельны**, то $k_1 = k_2$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.
- Если прямые **перпендикулярны**, то $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ или $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

8. Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

9. Кривые второго порядка. Если уравнение $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ описывает действительную кривую, то имеем:

- 1) при $A = B$ – окружность;
- 2) при $A \neq B, AB > 0$ – эллипс;
- 3) при $AB < 0$ – гиперболу;
- 4) при $A = 0$ ($B = 0$) – параболу.

10. Канонические уравнения кривых:

- **Окружность** радиуса R с центром в точке $M(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2;$$

окружность радиуса R с центром в точке $O(0,0)$:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

- **Эллипс:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

a – большая полуось; $b^2 = a^2 - c^2$ – малая полуось; $2c$ – расстояния между фокусами, $c < a$; $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет; $F_1(-c, 0)$,

$F_2(c, 0)$ – фокусы; $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – директрисы.

- **Гипербола:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

a – действительная полуось; $b^2 = c^2 - a^2$ – мнимая полуось; $2c$ – расстояния между фокусами, $c > a$; $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – эксцентриситет;

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоты; $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – директрисы; если $a = b$: $x^2 - y^2 = a^2$ – равнобочная гипербола; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ – сопряженная гипербола.

• **Парабола:**

$$y^2 = 2px;$$

p – расстояние от фокуса $F(p/2; 0)$ до директрисы $x = -p/2$ (параметр параболы);

другие виды: $x^2 = 2py$; $y^2 = -2px$; $x^2 = -2py$.

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Уравнения плоскости:

- Уравнение плоскости, проходящей **через точку** $M(x_0, y_0, z_0)$, **перпендикулярно нормальному вектору** $\vec{N} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

- Общее** уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

- Уравнение плоскости **в отрезках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

a – отрезок на оси OX , b – отрезок на оси OY , c – отрезок на оси OZ .

- Уравнение плоскости, проходящей через **три данные точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. **Угол** между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

- Условие **параллельности** плоскостей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

- Условие **перпендикулярности** плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

3. Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. Уравнения прямой в пространстве:

- Уравнение прямой, как **линии пересечения** двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

$\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы плоскостей. Направляющий вектор прямой: $\vec{P} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

- Канонические уравнения прямой, проходящей через **точку** $M(x_0, y_0, z_0)$ **параллельно** направляющему вектору $\vec{P} = (m, n, p)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

- **Параметрические** уравнения прямой:

$$x = mt + x_0, y = nt + y_0, z = pt + z_0.$$

- Уравнение прямой, проходящей через **две** данные точки $M(x_1, y_1, z_1), M(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

5. Угол между прямыми:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{|\vec{P}_1| \cdot |\vec{P}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

- Условие **параллельности** прямых: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

- Условие **перпендикулярности** прямых: $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

6. Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{P} = (m, n, p)$:

$$d = \frac{\left| \vec{M_0M_1} \times \vec{P} \right|}{|\vec{P}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

7. Взаимное расположение прямой и плоскости:

- Угол между прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

$$\sin \alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

- Условие параллельности прямой и плоскости: $Am + Bn + Cp = 0$.
- Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.