

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ»

**Целями работы** являются

- повторение основных понятий дифференциального исчисления функции одной переменной: функции, ее предела, непрерывности функции, производной и дифференциала;
- закрепление навыков решения задач по математическому анализу, полученных на аудиторных занятиях.

### Задание для разбора

Вычислить пределы.

**Задача 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{1+3+5+\dots+2n-1} - \frac{2}{n} \right)$ . **Задача 2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3n)^{100}}{(3n-2)^{97}(n+2)^3}$ .

**Задача 3.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 2} - x)$ . **Задача 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-5x}}{x+x^2}$ .

**Задача 5.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ . **Задача 6.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x^2}$ .

**Задача 7.**  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$ . **Задача 8.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} 6x(\ln(3x+1) - \ln 3x)$ .

**Задача 9.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3x}{4+3x} \right)^{3x+2}$ .

**Задача 10.** Исследовать на непрерывность функцию  $f(x) = \frac{2}{3+4\frac{2}{2x+4}}$  и установить тип точек разрыва.

**Задача 11.** Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 9, \\ 4, & x \geq 9 \end{cases}$$

Найти первую производную от функций.

**Задача 12.**  $y = \frac{x+5}{\sqrt{x^2-1}}$ . **Задача 13.**  $y = \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}$ . **Задача 14.**  $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}$ .

**Задача 15.**  $y = \ln^3(1 + \cos x)$ . **Задача 16.**  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Задача 17.**  $y = (tg\sqrt{x})^{-\sin x^2}$ . **Задача 18.**  $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{2x} + 4})$ .

**Задача 19.**  $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$

**Задача 20.** По определению найти производную функции  $y = \sqrt{x^2 - 4}$ .

## Разбор задач

Вычислить пределы.

**Задача 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{1+3+5+\dots+2n-1} - \frac{2}{n} \right).$

*Решение.* Применяя формулу суммы  $n$  членов арифметической прогрессии  $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ , получим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{\frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n} - \frac{2}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2} - \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-2n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

**Задача 2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3n)^{100}}{(3n-2)^{97}(n+2)^3}.$

*Решение.* Имеем неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3n)^{100}}{(3n-2)^{97}(n+2)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100} \cdot \left(\frac{1}{n} + 3\right)^{100}}{n^{97} \cdot \left(3 - \frac{2}{n}\right)^{97} \cdot n^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{100}}{3^{97} \cdot 1^3} \\ &= 27. \end{aligned}$$

**Задача 3.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2} - x).$

*Решение.* Имеем неопределенность вида  $\infty - \infty$ . Умножим и разделим на сопряженное выражение – сумму членов в скобке:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2} - x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+2} + x}{\sqrt{x^2+2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2+2-x^2)}{\sqrt{x^2+2} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + 1} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1. \end{aligned}$$

**Задача 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-5x}}{x+x^2}.$

*Решение.* Имеем неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Умножим и разделим на сумму корней, стоящих в числителе:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-5x}}{x+x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-5x}}{\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-5x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+4x) - (1-5x)}{(x+x^2) \cdot (\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-5x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{x(1+x) \cdot (\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-5x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{(1+x) \cdot (\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-5x})} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

**Задача 5.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}.$

*Решение.* Имеем неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Разложим на множители числитель и знаменатель, и сократим на множитель, дающий неопределенность:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

**Задача 6.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x^2}.$

*Решение.* Имеем неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2} \\ &= \left\{ x \rightarrow 0 \Rightarrow 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot (1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Задача 7.**  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{1/x}}.$

*Решение.*

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{x} = t, \\ x \rightarrow -0, t \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^t}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

**Задача 8.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} 6x(\ln(3x+1) - \ln 3x).$

*Решение.* Воспользуемся свойствами логарифма и применим второй замечательный предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 6x(\ln(3x+1) - \ln 3x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 6x \cdot \ln \frac{3x+1}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 6x \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{3x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{6x} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{3x} \right)^2 = \ln e^2 = 2. \end{aligned}$$

**Задача 9.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3x}{4+3x} \right)^{3x+2}.$

*Решение.* Имеем неопределенность  $1^\infty$ . Воспользуемся универсальной формулой:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3x}{4+3x} \right)^{3x+2} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \left( \frac{1+3x}{4+3x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \left( \frac{1+3x-4-3x}{4+3x} \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3(3x+2)}{4+3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x-6}{3x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9-\frac{6}{x}}{3+\frac{4}{x}}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.\end{aligned}$$

**Задача 10.** Исследовать на непрерывность функцию  $f(x) = \frac{2}{3 + 4\frac{2}{2x+4}}$  и уста-

новить тип точек разрыва.

*Решение.* Функция имеет разрыв в точке  $x = -2$ , так как в этой точке функция не определена. Найдем пределы слева и справа в точке

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2}{3 + 4\frac{2}{2x+4}} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2}{3 + 4\frac{2}{2(-2+0)+4}} = 0,$$

так как  $\frac{2}{2x+4} \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -2+0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2}{3 + 4\frac{2}{2x+4}} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2}{3 + 4\frac{2}{2(-2-0)+4}} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3},$$

так как  $\frac{2}{2x+4} \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow -2-0$ .

Так как  $f(-2+0) \neq f(-2-0)$  и конечны, то  $x = -2$  – точка разрыва 1 рода, скачок равен  $\frac{2}{3}$ .

**Задача 11.** Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 9, \\ 4, & x \geq 9 \end{cases}$$

*Решение.* Так как каждая функция непрерывна в своей области задания, то исследуем на непрерывность точки «стыков» функции  $x = 0$  и  $x = 9$ . Найдем пределы слева и справа в точке  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} 2x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} = 0.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0)$ , то в точке  $x = 0$  функция непрерывна.

Найдем пределы слева и справа в точке  $x = 9$ :

$$\lim_{x \rightarrow 9-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9-0} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 9+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9+0} 4 = 4.$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow 9-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 9+0} f(x)$ , то  $x$

$= 9$  точка разрыва 1 рода, скачок равен 1.

Найти первую производную от функций.

**Задача 12.**  $y = \frac{x+5}{\sqrt{x^2-1}}.$

*Решение.* Применим правило дифференцирования частного.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+5)' \cdot \sqrt{x^2-1} - (x+5) \cdot (\sqrt{x^2-1})'}{(\sqrt{x^2-1})^2} = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - (x+5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x}{x^2-1} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x(x+5)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{x^2-1-x^2-5x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \\ &= \frac{-5x-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

**Задача 13.**  $y = \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}.$

*Решение.* Применим правило дифференцирования частного.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin^3 x)' \cdot (1+\cos x) - \sin^3 x \cdot (1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot (1+\cos x) - \sin^3 x \cdot (-\sin x)}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{3 \sin^2 x \cdot \cos x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x}{(1+\cos x)^2}. \end{aligned}$$

**Задача 14.**  $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$

*Решение.* Дифференцирование сложной функции.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{3}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3-x^4}{3}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^4}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}. \end{aligned}$$

**Задача 15.**  $y = \ln^3(1+\cos x).$

*Решение.* Дифференцирование сложной функции.

$$y' = 3 \ln^2(1+\cos x) \cdot \frac{1}{1+\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{-3 \sin x \cdot \ln^2(1+\cos x)}{1+\cos x}.$$

**Задача 16.**  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2}.$

*Решение.* Дифференцирование функции, заданной неявно.

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (2x + 2y \cdot y');$$

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{2 \cdot (x + yy')}{2 \cdot (y^2 + x^2)}; \quad \frac{xy' - y}{y^2 + x^2} = \frac{x + yy'}{y^2 + x^2};$$

$$xy' - y = x + yy'; \quad xy' - yy' = x + y; \quad (x - y) \cdot y' = x + y;$$

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

**Задача 17.**  $y = (tg\sqrt{x})^{-\sin x^2}$ .

*Решение.* Дифференцирование показательно-степенной функции по формуле

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

$$y' = -\sin x^2 \cdot (tg\sqrt{x})^{-\sin x^2 - 1} \cdot (tg\sqrt{x})' +$$

$$+ (tg\sqrt{x})^{-\sin x^2} \cdot \ln tg\sqrt{x} \cdot (-\sin x^2)' =$$

$$= -\sin x^2 \cdot (tg\sqrt{x})^{-\sin x^2 - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} -$$

$$- (tg\sqrt{x})^{-\sin x^2} \cdot \ln tg\sqrt{x} \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

**Задача 18.**  $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{2x} + 4})$ .

*Решение.* Дифференцирование сложной функции.

$$y' = \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot \left( e^{2x} \cdot 2 + \frac{1}{2\sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot e^{2x} \cdot 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot \left( e^{2x} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + 4}} \cdot e^{2x} \right).$$

**Задача 19.**  $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t. \end{cases}$

*Решение.* Дифференцирование функции, заданной параметрически.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(e^t)' \cdot \sin t + e^t \cdot (\sin t)'}{(e^t)' \cdot \cos t + e^t \cdot (\cos t)'} = \frac{e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t}{e^t \cdot \cos t + e^t \cdot (-\sin t)} =$$

$$= \frac{e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t}{e^t \cdot \cos t - e^t \cdot \sin t} = \frac{e^t \cdot (\sin t + \cos t)}{e^t \cdot (\cos t - \sin t)} = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}.$$

**Задача 20.** По определению найти производную функции  $y = \sqrt{x^2 - 4}$ .

*Решение.*

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 4}}{\Delta x} = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 4}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{\Delta x \cdot (\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 4 - x^2 + 4}{\Delta x \cdot (\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x \cdot (\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x \cdot (\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 4}} = \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ .

В этой задаче рекомендуем сначала найти производную с помощью правила дифференцирования сложной функции и таблицы производных

Варианты для решения

**ВАРИАНТ 1**

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}. 2. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3}). 3. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 75x - 39}{x + (1/2)}. 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}. 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}. 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2 + 4n - 1}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{1-2n}. 8. \lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 6x}{2x} \right)^{2+x}. 10. f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}. 11. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций (12-19):

$$12. y = x^2 \sqrt{1-x^2}. 13. y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x}. 14. y = \operatorname{arctg} e^{2x}. 15. y = \ln^2(\sqrt{1+x^2} - 2x).$$

$$16. x - y^2 x + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = x^2 y. 17. y = (x^2 - 1)^{\frac{1}{x-2}}. 18. y = 2^{4x-x^2} \sin 6x. 19. \begin{cases} x = t^3 + \sqrt{8t}, \\ y = t^5 + \sqrt{2t}. \end{cases}$$

20. По определению найти производную функции  $y = \sqrt{1+x^2}$ .

**ВАРИАНТ 2**

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3}). 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}. 3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x+3}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-3x^2}}{2x^3 - x^2}. 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(1-x)}{x^2 - 2x + 1}. 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} 3x}. 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-4} \right)^{2x}. 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+5}{2n-7} \right)^{\frac{n}{6}+1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{x} \right)^{\frac{2}{x+2}}. 10. f(x) = 12^{\frac{1}{x}}. 11. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 2, \\ 3, & x \geq 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}. 13. y = \sin x - x \cos^2 x. 14. y = x^m \ln(2x - \sqrt{x}). 15. y = \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

$$16. y = (\sin x)^{-\operatorname{tg} x}. 17. \frac{y^2}{x} = \arcsin xy + \ln \frac{x}{y}. 18. y = e^{-1/3x} \cdot \sin 2 \cdot \cos^3 4x. 19. \begin{cases} x = \sin^2 \frac{t}{2}, \\ y = t^2 - \sin \sqrt{t}. \end{cases}$$

20. По определению найти производную функции  $y = \frac{3}{2x-5}$ .

**ВАРИАНТ 3**



Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ .
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2})$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{6x} \right)^{\frac{x}{x+2}}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \right)^{3+3x^2}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ .
10.  $f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}}$ .
11.  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ x - 2, & x > \pi. \end{cases}$

Найти первую производную от функций:

12.  $y = \frac{x\sqrt{x-1}}{1-x}$ .
13.  $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)/2$ .
14.  $y = x \arcsin \sqrt{x}$ .
15.  $y = \ln(\sqrt{1+x^2} + 2)$ .
16.  $y = e^{4x} \sin 5x$ .
17.  $y^2 \sin x^2 + x \cos y^2 = 1$ .
18.  $y = (\sin x)^{5e^x}$ .
19.  $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = 3 \cos 2t \sin 2t. \end{cases}$
20. По определению найти производную функции  $y = 2x - \frac{3}{x}$ .

## ВАРИАНТ 4

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-5})$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{1+2+\dots+n} - \frac{2}{3} \right)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x-2}}{3 - \sqrt{2x+1}}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{2x^2}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{x+4} \right)^{\cos x}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+4}{1+2x} \right)^{3x-1}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4x}{\sin 5x} \right)^{\frac{1}{x+2}}$ .
10.  $f(x) = 8^{\frac{2}{x+5}}$ .
11.  $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$

Найти первую производную от функций:

12.  $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{(4+x^2)^5}$ .
13.  $y = \ln \sin 1/2 - 1/24 \frac{\sin^2 12x}{\cos 24x}$ .
14.  $y = \sin^3(\sqrt{x} + 1) \cos \sqrt{x}$ .
15.  $y = 3^{\sin 3x} + 2^{\cos 2x}$ .
16.  $y = \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \sqrt{x})$ .
17.  $2y^2 \ln(xy) = \sqrt{y^2 + x}$ .
18.  $y = \frac{x^{x+1}}{e^{x^2}}$ .
19.  $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \sqrt{\cos t/2}. \end{cases}$
20. По определению найти производную функции  $y = \frac{3}{\sqrt{2x+5}}$ .

## ВАРИАНТ 5

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)})$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9\ldots+3n}{2n^2+4}$ . 3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+7}-3}$ . 4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{2x^2-5x-3}$ .  
 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x/3)}{4x}$ . 6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ . 7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$ . 8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{12x+5} \right)^{\frac{x+2}{3}}$ . 9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} 4x}{x} \right)^{2+x}$ .  
 10.  $f(x) = 10^{\frac{2}{7-x}}$ . 11.  $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$

Найти первую производную от функций:

12.  $y = \frac{x^2+5}{2x-3}$ . 13.  $y = \frac{\sin(\cos 3) \cos^2 2x}{4 \sin 4x}$ . 14.  $y = x \arccos 1/x$ . 15.  $y = \ln \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ .  
 16.  $y = e^{3x} \cos^2 4x$ . 17.  $x^{2/3} + y^{2/3} = \sqrt[3]{(xy)^2}$ . 18.  $y = x^{x^2}$ . 19.  $\begin{cases} x = \arcsin(t^2-1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$   
 20. По определению найти производную функции  $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ .

## ВАРИАНТ 6

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3})$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (3n+5)^3}$ . 3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ . 4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{x^2}$ .  
 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} + 2^{\frac{-1}{x}} \right)$ . 6.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ . 7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2+x}{x+3} \right)^{\frac{1+4x^2}{x^2}}$ . 8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x/\sqrt{1-x^2})}{\ln(1-x)}$ .  
 9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}}$ . 10.  $f(x) = 14^{\frac{1}{4-2x}}$ . 11.  $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

Найти первую производную от функции:

12.  $y = \frac{x\sqrt{x-1}}{1-x}$ . 13.  $y = \frac{x(\cos \ln x + \sin \ln x)}{2}$ . 14.  $y = \frac{\operatorname{ctg} x + x}{1-x \operatorname{ctg} x}$ . 15.  $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x} + \ln \operatorname{tg}^2 2x$ .  
 16.  $y = \arcsin \sqrt{1-3x}$ . 17.  $y \sin^2 x = \sqrt{\cos(x-y)}$ . 18.  $y = (\sin^2 x)^{\ln^2 x}$ . 19.  $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2 + \cos t^2. \end{cases}$   
 20. По определению найти производную функции  $y = \frac{5}{3-2x}$ .

## ВАРИАНТ 7

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3}$ . 3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-8}{x^2+6x-16}$ . 4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$ .  
 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$ . 6.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{4-\sqrt{3x+7}}$ . 7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3x}{2+3x} \right)^{\frac{1}{4x}}$ . 8.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$ .  
 9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}$ . 10.  $f(x) = 15^{\frac{2}{3x+6}}$ . 11.  $f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$

Найти первую производную от функций:

12.  $y = \frac{2x-1}{3x^2+4}$ . 13.  $y = 3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos^4 x}$ . 14.  $y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$ . 15.  $y = 3 \cos^2 \ln^2 x$ .  
 16.  $y = 5^{\ln(1+x)}$ . 17.  $\operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x} = \log_2 \sqrt{x^2 + y^2}$ . 18.  $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$ . 19.  $\begin{cases} x = \sin^2 2t^2, \\ y = \cos^2 2t. \end{cases}$

20. По определению найти производную функции  $y = x^2 + x^3$ .

## ВАРИАНТ 8

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n+1)(n+3)})$ . 3.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$ .  
 4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}}$ . 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{3 \operatorname{arctg} x}$ . 6.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$ . 7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}$ .  
 8.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{2 - \cos x}$ . 9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3+1}{x^3+8} \right)^{\frac{2}{x+1}}$ . 10.  $f(x) = 11^{\frac{-1}{x+3}}$ . 11.  $f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$

Найти первую производную от функций:

12.  $y = 5\sqrt{x^2+x+1}/x$ . 13.  $y = \ln \operatorname{ctg}^2 2x$ . 14.  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ . 15.  $y = (\cos^2 x)^{-x}$ .  
 16.  $\ln^2 y = \arcsin \frac{x^2+y}{xy}$ . 17.  $y = e^{2^{3x}}$ . 18.  $y = \cos^2(\sqrt{x}+x) \cdot \sin 2$ . 19.  $\begin{cases} x = t - \ln \sin t, \\ y = t + \ln \cos t. \end{cases}$

20. По определению найти производную функции  $y = \sqrt{3-5x}$ .

## ВАРИАНТ 9

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 + (n+1)^2}{n^2 + n + 1}$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$ . 3.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$ . 4.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$ .  
 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 7x}{x \operatorname{tg} 3x}$ . 6.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 8x \cdot \operatorname{ctg} 3x)$ . 7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^3+2}{5x^3} \right)^{\sqrt{x}}$ . 8.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$ . 9.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x+3}$ .

$$10. f(x) = 13^{\frac{3}{x+4}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} \cos x, x \leq 0, \\ x^2 + 1, 0 < x < 1, \\ x, x \geq 1. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \frac{\sqrt{2-x}}{x^3}. \quad 13. y = \frac{\sin 3x}{\cos 3x + \sqrt{\cos 3x}}. \quad 14. y = \frac{x}{a} \arcsin \frac{x}{a}. \quad 15. y = \ln^3(\sin^2 3x).$$

$$16. y = \ln \frac{e^x}{1+e^{2x}}. \quad 17. e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0. \quad 18. y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2. \quad 19. \begin{cases} x = a \cos^3 2t, \\ y = a \sin^3 \frac{t}{2}. \end{cases}$$

$$20. \text{ По определению найти производную функции } y = \frac{4}{(2-3x)^2}.$$

### ВАРИАНТ 10

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3}). \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 5x + 4}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x/3)}{7x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{3 - \sqrt{x+4}}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{3-x} \right)^x. \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} 4x}{3x} \right)^{2+x}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}.$$

$$10. f(x) = 2^{\frac{3}{6x-12}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} -x^2, x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}}. \quad 13. y = \sin^3(\sqrt{x}+1) \cdot \cos \sqrt{x}. \quad 14. y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}}. \quad 15. y = \ln \left( \frac{\cos x}{x} \right).$$

$$16. y = e^{e^x}. \quad 17. x^y - y^x = 0. \quad 18. y = (\sqrt[3]{x})^{1/\ln x}. \quad 19. \begin{cases} x = \frac{a}{\sin t}, \\ y = \frac{a}{\cos t}. \end{cases}$$

$$20. \text{ По определению найти производную функции } y = \frac{5}{(x+2)^3}.$$

### ВАРИАНТ 11

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2+1)(n^2-9)} - \sqrt{n^4-9}). \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{2n^2} + \dots + \frac{n+1}{2n^2} \right). \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 5x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{5x^2}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+3} \right)^{x-2}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-2}{x+2} \right)^{3x+2} \quad 10. f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad 11. f(x) = \begin{cases} x, x \leq -\pi, \\ \sin x, -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad 13. y = \frac{\sin^2 x}{2 + 3 \cos^2 x} \quad 14. y = 3^{\arctg x^3} \quad 15. (e^x - 1)(e^y - xy) - \sqrt{xy} = 0.$$

$$16. y = xe^x(\sin x - \cos x) \quad 17. y = \sqrt{x} \ln \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \quad 18. y = (\arcsin x)^{\ln^2 x^2} \quad 19. \begin{cases} x = 3 \cos \sqrt{t}, \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}$$

20. По определению найти производную функции  $y = (2x-1)^3$ .

### ВАРИАНТ 12

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}). \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{16n^4-1}}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-9x^2}}{2x^3-x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(x-2)}{\arcsin^2 3x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{(x/2)}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{3x}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{1/x}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{x+4} \right)^{\cos x}.$$

$$10. f(x) = 2^{\lg 2x}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} x^3+1, x \leq 1, \\ 2, 1 < x \leq 2, \\ 3x, x > 2. \end{cases}$$

Найти первую производную функций:

$$12. y = \frac{x}{(1-x)^2}. \quad 13. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x}. \quad 14. y = \arctg \frac{\ln^2 x}{3}. \quad 15. y = \frac{1}{2a} \ln^2 \frac{x-a}{x+a}.$$

$$16. y = \frac{x^x}{e^x} (x \ln x - x - 1). \quad 17. \ln(y-x^2) + 2\sqrt{y-x^2} - 3 = 0. \quad 18. y = (\arccos^2 x)^{\arcsin x}.$$

$$19. \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left( \frac{t}{t+1} \right)^2. \end{cases} \quad 20. \text{ По определению найти производную функции } y = \sin x^2.$$

### ВАРИАНТ 13

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}). \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2+4+\dots+2n}{n+3} - n \right). \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-14x+12}{x^3+2x^2-3x}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-\sqrt{8x}}{16-2x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{x \operatorname{tg} x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right). \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2+x} \right)^{3x}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)^{x^2}.$$

$$10. f(x) = \frac{2}{1+2^{tgx}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} 2, & x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = x\sqrt{a^2 - x^2}. \quad 13. y = \cos \ln 2 - \frac{\cos^2 3x}{3 \sin 6x}. \quad 14. y = e^x \arctg e^x - \ln \sqrt{1+e^{2x}}.$$

$$15. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}). \quad 16. y = 3 \sin(x2^x - 3^x). \quad 17. x^3 + \ln y - x^2 e^{xy} = 0.$$

$$18. y = (tg 3x)^{\ln(tgx/4)}. \quad 19. \begin{cases} x = 2^{-3t}, \\ y = 2^{3t^2 - 2t}. \end{cases}$$

20. По определению найти производную функции  $y = (2x-1)^3$ .

### ВАРИАНТ 14

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+15)} - (\sqrt{n})^2). \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2 - x - 1}{x - (1/2)}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3tg^2 x)^{ctg^2 x}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 4}{x + 2} \right)^{x^2 + 3}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{2x}. \quad 10. f(x) = 1 - 2^{\frac{1}{x}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi, \\ \sin x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi, & x > 0. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c}. \quad 13. y = x^2 + tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}. \quad 14. y = \arctg \frac{2x^4}{1-x^8}.$$

$$15. y = \sin^3(xe^x - e^x). \quad 16. y = x\sqrt{x}(3 \ln x - 2). \quad 17. \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0. \quad 18. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

$$19. \begin{cases} x = tg^2 t, \\ y = \sin 2t + 2 \cos 2t. \end{cases}$$

20. По определению найти производную функции  $y = \frac{-3}{4x+3}$ .

### ВАРИАНТ 15

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}). \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right). \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - (1/3)}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(1-x)}{x^2 - 1}. \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + n + 1}{n^3 + 2} \right)^{2n^2}. \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{n} \right)^{n+3}. \quad 8. \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{n+3}{n+5} \right)^{n+3}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{4 - \sqrt{3x+7}}.$$

$$10. f(x) = \frac{2}{2 + 5^{\frac{1}{x-2}}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} x+1, x < 0, \\ (x+1)^2, 0 \leq x \leq 2, \\ -x+4, x > 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}. \quad 13. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sin x + \ln \cos \sin x. \quad 14. y = \arcsin \sqrt{1-0,2x^2}.$$

$$15. y = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}. \quad 16. y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^x}. \quad 17. t \ln^2 x - x \ln^2 t = 1. \quad 18. y = (x^2)^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$19. \begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases} \quad 20. \text{ По определению найти производную функции } y = \sqrt{2x^2 - x}.$$

### ВАРИАНТ 16

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3}). \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x^2+1}. \quad 10. f(x) = \frac{1}{3 + 2^{\frac{1}{2x}}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} -x, x < 0, \\ x^3, 0 \leq x \leq 2, \\ 4, x > 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}. \quad 13. y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}. \quad 14. \quad \text{ю} \quad 15. y = \frac{2^{\sin 2x}}{\cos 2x}.$$

$$16. y = \frac{\sin 3x}{\cos x + \sqrt{\cos 3x}}. \quad 17. y = x^{x^x}. \quad 18. x^3 y + y^3 \sqrt{x} - 3a \frac{x}{y} = 0. \quad 19. \begin{cases} x = \frac{a}{\sin t}, \\ y = \frac{a}{\cos t}. \end{cases}$$

$$20. \text{ По определению найти производную функции } y = \frac{2}{5-3x}.$$

### ВАРИАНТ 17

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2 - 3n}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)}). \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - x^2}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4}}{\sin(x/2)}. \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 1} \right)^{n^2}. \quad 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{x+4} \right)^{\cos x}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+3n}{3n-2} \right)^{5n}. \quad 10. f(x) = \frac{5}{2+7^{\frac{4}{5-x}}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} -2, & x < -\pi/2, \\ 2 \sin x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = (2x^3 + 5)^4 \cdot \sqrt[4]{x}. \quad 13. y = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)}. \quad 14. y = \operatorname{arccctg} \frac{1 + \sin x}{\cos x}. \quad 15. y = \ln \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$

$$16. y = 1 - e^{\sin^2 3x} \cdot \cos^2 3x. \quad 17. \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad 18. y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}. \quad 19. \begin{cases} x = 3 \log_2 \operatorname{ctgt}, \\ y = \operatorname{tgt} + \operatorname{ctgt}. \end{cases}$$

$$20. \text{ По определению найти производную функции } y = \frac{4}{\sqrt{4x-5}}.$$

### ВАРИАНТ 18

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3+\dots+n}{n-n^2+3}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x-5}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}. \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)^{-n^2}. \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{6x} \right)^{\frac{x}{x+2}}. \quad 10. f(x) = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 4-x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4, & x > 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-ax-dx^2}}. \quad 13. y = \frac{\operatorname{ctg}(2x-1)}{\ln 2} + \ln \operatorname{tg}^2 2x. \quad 14. y = \log_{x^2}(x-2)^{1/3}.$$

$$15. y = (x+x^2)^{\frac{1}{x-2}}. \quad 16. y = \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 17. y = e^{-2x+2} \cdot \sin^3 x.$$

$$18. 3^{x+y} + (x^2 + y^2)^3 = x(y - y^2). \quad 19. \begin{cases} x = 2t - \sqrt{t}, \\ y = 2t^2 + \sqrt[3]{t}. \end{cases}$$

$$20. \text{ По определению найти производную функции } y = \frac{x}{x+3}.$$

### ВАРИАНТ 19

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+4+\dots+(n-1)}{2n+n^2+3}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}). \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + 2^{\frac{-1}{(x-2)^2}} \right). \quad 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 5n + 7} \right)^{n+1}. \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}.$$



$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 6x}{2x} \right)^{2+x} \cdot 10. f(x) = \frac{1}{2 + 4^{\frac{1}{x-2}}} \cdot 11. f(x) = \begin{cases} 0,5x^2, & x < 0, \\ 2,5, & 0 \leq x \leq 2, \\ 3, & x > 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = \frac{x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} \cdot 13. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\ln 2} \operatorname{ctg}^2 x^2 \cdot 14. y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

$$15. y = \log_{\cos x} \sin^{2/3} x \cdot 16. y = \sin e^x \cdot \cos^3 e^x \cdot 17. 2^{x^2} + 2^{y^2} = 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot 18. y = (\operatorname{ctg}^{3/4} \sqrt{x})^{\sin x}.$$

$$19. \begin{cases} x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}. \end{cases} \cdot 20. \text{ По определению найти производную функции } y = \frac{2-x}{2+x}.$$

## ВАРИАНТ 20

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n+3)^3 - (n-3)^3} \cdot 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2+4+\dots+(2n+2)}{n+3} - n \right) \cdot 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} \cdot 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1-\cos 3x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \cdot 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x} \cdot 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{3n^2-7} \cdot 8. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2+x}{3-x} \right)^{x+1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) \cdot 10. f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+1}}} \cdot 11. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = x^{5/2} \cdot \sqrt[4]{x^3+2} \cdot 13. y = \operatorname{tg} \ln \frac{1-2x}{3} \cdot 14. y = 2^{2^x} (x^2 - 2^x) \cdot 15. y = \sqrt[3]{\ln(x \cos x - \sin x)}.$$

$$16. y = \operatorname{arccctg} \frac{2x^3}{1+x^6} \cdot 17. y^2 \ln(yx) = \sqrt[3]{xy} \cdot 18. y = (\cos^2 x)^{\sin \sqrt{x}} \cdot 19. \begin{cases} x = 3 \cos^{2/3} t, \\ y = 2 \sin^{3/2} t. \end{cases}$$

20. По определению найти производную функции  $y = \sqrt{3x-x^2}$ .

## ВАРИАНТ 21

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \cdot 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2} \cdot 3. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{9x^2-1}{x+1/3} \cdot 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x \sin x} \cdot 6. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\arcsin(1-3x)}{9x^2-1} \cdot 7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1} \cdot 8. \lim_{x \rightarrow 2} 2^{\frac{-1}{(x-2)^2}} \cdot 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x} \right)^{2-3x}.$$

$$10. f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} \cdot 11. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = x^{3/2} \cdot \sqrt[3]{x^5 + a}. \quad 13. y = \ln^3 \operatorname{tg} \frac{3x^3 - 4}{4}. \quad 14. y = \arcsin \frac{1 + x^6}{3x^3 - 4}. \quad 15. 2\sqrt{y} \ln \frac{x^2}{\sqrt{y}} = x^2 \sqrt{y}.$$

$$16. y = \log_2(\sqrt{x} \cos x - \sin \sqrt{x}) - 1. \quad 17. y = 3^{2^x} \cdot 2^{3^x}. \quad 18. y = (\sin^2 \sqrt{x})^{e^{1/x}}.$$

$$19. \begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t). \end{cases} \quad 20. \text{ По определению найти производную функции}$$

$$y = \frac{3x - 2}{4x + 1}.$$

## ВАРИАНТ 22

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 3)^3}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n). \quad 3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}. \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n - 1}{2n + 1} \right)^{2n - 1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1 + x} - 1)}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}. \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 + 5n + 1} \right)^{n/2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + 2}{x + 4} \right)^{2 \cos 2x}. \quad 10. f(x) = \frac{1}{2 + 3^{\frac{2}{x}}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = x \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}. \quad 13. y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x} + \sin^2 2x. \quad 14. y = \arcsin \sqrt{1 - 3x}. \quad 15. y = \frac{e^{x/3}}{\cos^2(x/3)}.$$

$$16. y = (\ln(x^5 + 3) - 1)(x^5 + 3). \quad 17. y = x^{e^x} \cdot x^9. \quad 18. e^x + e^y - 2^{xy} - e^{(xy)^2} = 0.$$

$$19. \begin{cases} x = t^2 - \sin^2 t, \\ y = t - \cos 2t. \end{cases}$$

$$20. \text{ По определению найти производную функции } y = \sqrt{3x + 2x^2}.$$

## ВАРИАНТ 23

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 - 1)(x^5 + x^4 - x - 1)}{(2x^3 + 1)^3}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x - 1} \right). \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + b}).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 + x^2 - x}}{x^2 - x}. \quad 5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x}. \quad 7. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{2} \right)^{1/(x-2)}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[7]{(1 - \cos x)^2}}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 4}{2 + 3x} \right)^{\frac{x+1}{2}}. \quad 10. f(x) = \frac{1}{2^x - 1}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ \pi/2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

12.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$ . 13.  $y = \operatorname{tg} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 2x$ . 14.  $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$ .  
 15.  $y = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$ . 16.  $y = \frac{e^x 5^x}{3^{4x}}$ . 17.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = a^2 \sqrt{xy} + b^2 \sqrt{\frac{x}{y}}$ . 18.  $y = (\sin^3 x)^{5x/2}$ .  
 19.  $\begin{cases} x = 3 \cos \sqrt{t}, \\ y = 4 \sin^{2/3} t. \end{cases}$  20. По определению найти производную функции  $y = x^3 + x$ .

## ВАРИАНТ 24

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$ . 3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1+x)}{x}$ . 4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{5x^2}$ .  
 5.  $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + (1/3)}$ . 6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{2x-1}$ . 7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$ . 8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$ . 9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{\frac{1}{x+2}}$ .  
 10.  $f(x) = \frac{3}{4^{\frac{1}{x}}}$ . 11.  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \pi/2, \\ x, & x \leq \pi/2. \end{cases}$

Найти первую производную от функций:

12.  $y = \frac{a}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}$ . 13.  $y = 3x \sin^3 x + 3 \cos x - \cos^3 x$ . 14.  $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .  
 15.  $y = \ln(\sin \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x})$ . 16.  $y = \frac{e^{-x^2}}{2x}$ . 17.  $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$ . 18.  $y = (\operatorname{ctg} x^2)^{-x^3}$ .  
 19.  $\begin{cases} x = \cos^{2/3}(t/2), \\ y = t - \sin^{4/3}(t/2). \end{cases}$   
 20. По определению найти производную функции  $y = \cos x^2$ .

## ВАРИАНТ 25

Вычислить пределы (1-9).

Исследовать функцию на непрерывность (10-11), построить график в пункте 11.

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x - 2})$ . 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{3n^2 + 2}\right)^{n^2 + 4n - 1}$ . 3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 2}{6n + 5}\right)^{\operatorname{tg}(1/n)}$ .  
 4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{4n+1}\right)^{5n^2-1}$ . 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4+x^2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 6x\right) \operatorname{tg} 3x}$ . 6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{\sqrt[3]{4n^3+3}-5}$ . 7.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ .

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x) \cdot x^3}{5x^4 - x^2}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5} \right)^{x^2 + 1}. \quad 10. f(x) = 10^{\frac{2}{9-3x}}. \quad 11. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - 2x, 1 < x < 2,5, \\ 2x - 7, x \geq 2,5. \end{cases}$$

Найти первую производную от функций:

$$12. y = (3\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^4}. \quad 13. y = \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2. \quad 14. y = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

$$15. y = \ln(3x^x + \sqrt{9x^4 + 1}). \quad 16. y = e^{0,5 \operatorname{tg}^2 x} \cdot \cos^2 x. \quad 17. \sin^2(xy) + \cos^2(x/y) = 8.$$

$$18. y = (\cos^3 x^2)^{1/x^2}. \quad 19. \begin{cases} x = e^{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{\cos \frac{t}{2}}. \end{cases}$$

$$20. \text{ По определению найти производную функции } y = \frac{10}{5x - 2}.$$

## Справочный материал

### Вычисление пределов

#### 1. Определенные выражения при нахождении пределов:

$$\infty + \infty = \infty; \quad \infty \pm A = \infty; \quad \infty \cdot A = \infty (A \neq 0); \quad \frac{A}{\infty} = 0 (A \neq 0); \quad \frac{A}{0} = \infty (A \neq 0);$$

$$A^\infty = \begin{cases} \infty, & A > 1, \\ 0, & A < 1. \end{cases}$$

#### 2. Неопределенности:

	Раскрытие неопределенностей
$\frac{\infty}{\infty}$	Разделить числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень неизвестного, содержащуюся в дроби, или вынести за скобки наивысшую степень неизвестного и сократить. При $x \rightarrow \infty$ , $\frac{A}{x^k} \rightarrow 0$ .
$\infty - \infty$	Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму; разность дробей привести к общему знаменателю; неопределенность $\infty - \infty$ приводится к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ .
$\frac{0}{0}$	Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль. Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму, а разность кубических корней – на неполный квадрат суммы или сделать замену. Применяем первый замечательный предел или сравнение бесконечно малых.
$1^\infty$	Применяем второй замечательный предел или универсальной формулой.

#### 3. Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

#### 4. Эквивалентные бесконечно малые в точке $\alpha = 0$ :

$$\sin \alpha \sim \alpha; \quad \sin^2 \alpha \sim \alpha^2; \quad \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha; \quad 1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}; \quad \arcsin \alpha \sim \alpha; \quad \ln(1 + \alpha) \sim \alpha;$$

$$e^\alpha - 1 \sim \alpha; \quad a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a; \quad (1 + \alpha)^n - 1 \sim n\alpha; \quad \sqrt{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}.$$

#### 5. Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

#### 6. Универсальная формула: если $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$ , $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)(v(x)-1)}.$$

## 7. Непрерывность функции.

Если в определении непрерывной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  через односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

односторонние пределы конечны и нарушается одно из равенств, то функция терпит **разрыв I рода** – конечный разрыв. Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0),$$

то имеем **устранимый разрыв**. Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

то у функции существует разрыв – **скачок**. Величина скачка

$$|\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)|.$$

Если хотя бы один из односторонних пределов равен  $\pm \infty$ , то у функции существует **разрыв II рода** – бесконечный.

*Производная функции*

**1. Производная** от функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

**2. Дифференциал функции:**  $y = f(x)$ :  $dy = y'dx$ .

**3. Правила дифференцирования:**

$$1. (c \cdot u)' = c \cdot u'$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$3. (u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

$$5. \text{Производная сложной функции: } f'_x(u(x)) = f'_u(u(x)) \cdot u'(x).$$

**4. Производные основных элементарных функций:**

$$1. c' = 0.$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad x' = 1; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a; \quad (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x.$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$7. (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$8. (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$12. (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**5.** Производная показательно-степенной функции:

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

**6.** Производная функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$