РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Целями работы являются

– повторение основных понятий: первообразной, неопределенного интеграла, его основных свойств, таблицы интегралов, методов интегрирования;
– закрепление навыков вычисления неопределенных интегралов, полученных на аудиторных занятиях.

Задание для разбора

Вычислить интегралы и в задачах 1-5 проверить правильность вычисления.

Задача 1. $\int \frac{x^3+x}{x^2+1}dx.$

Задача 2. $\int \frac{x+\arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

Задача 3. $\int \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$

Задача 4. $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{4\sqrt{x}}{x^4} - \frac{5}{x^5} \right) dx.$

Задача 5. $\int (3+x)^{22} dx.$

Задача 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x+2x^2}}.$

Задача 7. $\int \frac{2x+3}{2x^2-7x+3}dx.$

Задача 8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$

Задача 9. $\int (x+2)\ln^2 x dx.$

Задача 10. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x+\cos x+1}.$

Задача 11. $\int \frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}.$

Задача 12. $\int \frac{1}{1-x^3}dx.$

Задача 13. $\int \frac{x}{(1-\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}dx.$

Задача 14. $\int \cos x \cos 6x \sin 2x dx.$

Разбор задач

Вычислить интегралы и в задачах 1-5 проверить правильность вычисления.

Задача 1. $\int \frac{x^3+x}{x^2+1}dx.$

Решение. Разложим числитель на множители и получим табличный интеграл

$$\int \frac{x^3+x}{x^2+1}dx = \int \frac{x\cdot(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{2}+C\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x + 0 = x.$$

Задача 2. $\int \frac{x+\arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

Решение. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов. Во втором интеграле внесем $\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{x+\arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-25x^2}}dx + \int \frac{\arcsin 5x}{\sqrt{1-(5x)^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{5x}{\sqrt{1-(5x)^2}}d(5x) + \frac{1}{5}\int \arcsin 5x \; d(\arcsin 5x) =$$

$$= -\frac{1}{25}\sqrt{1-(5x)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{(acrsin\,5x)^2}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{25}\sqrt{1-25x^2} + \frac{1}{10}acrsin^2\,5x + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{25}\sqrt{1-25x^2} + \frac{1}{10}acrsin^2\,5x + C\right)' =$$

$$= \frac{-1}{25}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-25x^2}}\cdot(-25\cdot 2x) + \frac{2}{10}\cdot\arcsin 5x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot 5 =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-25x^2}} + \frac{\arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{x+\arcsin 5x}{\sqrt{1-25x^2}}.$$

Задача 3. $\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$

Решение. Воспользуемся свойствами степеней и преобразуем подынтегральную функцию, сведя ее к табличным интегралам:

$$\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx=\int\left(2\sqrt{x}-x^{-\frac{3}{4}}\right)dx=2\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1}+C=$$

$$=\frac{4x\sqrt{x}}{3}-4\sqrt[4]{x}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{4x\sqrt{x}}{3}-4\sqrt[4]{x}+C\right)'=\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{4}}+C\right)'=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-4\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Задача 4. $\int\left(\frac{3}{x^3}+\frac{4\sqrt{x}}{x^4}-\frac{5}{x^5}\right)dx.$

Решение. Воспользуемся свойствами степеней и преобразуем подынтегральную функцию, сведя ее к табличным интегралам:

$$\int\left(\frac{3}{x^3}+\frac{4\sqrt{x}}{x^4}-\frac{5}{x^5}\right)dx=\int\left(3x^{-3}+4x^{-\frac{7}{2}}-5x^{-5}\right)dx=$$

$$=3\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+4\cdot\frac{x^{-\frac{7}{2}+1}}{-\frac{7}{2}+1}-5\cdot\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C=$$

$$=-\frac{3}{2x^2}-\frac{8}{5x^2\sqrt{x}}+\frac{5}{4x^4}+C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{3}{2x^2}-\frac{8}{5x^2\sqrt{x}}+\frac{5}{4x^4}+C\right)'=\left(-\frac{3}{2}\cdot x^{-2}-\frac{8}{5}\cdot x^{-\frac{5}{2}}+\frac{5}{4}\cdot x^{-4}+C\right)'=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot(-2)\cdot x^{-3}-\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot x^{-\frac{7}{2}}+\frac{5}{4}\cdot(-4)\cdot x^{-5}=$$

$$=3x^{-3}+4x^{-\frac{7}{2}}-5x^{-5}=\frac{3}{x^3}+\frac{4\sqrt{x}}{x^4}-\frac{5}{x^5}.$$

Задача 5. $\int(3+x)^{22}dx.$

Решение. Сделаем замену:

$$\int(3+x)^{22}\,dx=\left\{\begin{matrix}3+x=t, x=t-3\\ dx=dt\end{matrix}\right\}=\int t^{22}\,dt=\frac{t^{23}}{23}+C=\frac{(3+x)^{23}}{23}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{(3+x)^{23}}{23}+C\right)'=\frac{1}{23}\cdot 23\cdot(3+x)^{22}=(3+x)^{22}.$$

Задача 6. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x+2x^2}}.$

Решение. В квадратном трехчлене выделим полный квадрат и сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x+2x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} 2x^2 - x + 3 = 2\cdot\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8} + 3 = \\ = 2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} = 2\cdot\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\cdot\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(x-\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}}\right| + C.$$

Задача 7. $\int \frac{2x+3}{2x^2-7x+3}dx.$

Решение. Преобразуем числитель, выделив в нем производную знаменателя; разобьем интеграл на два интеграла, во втором интеграле выделим полный квадрат и сведем интеграл к табличному

$$\int \frac{2x+3}{2x^2-7x+3}dx = \{(2x^2-7x+3)' = 4x-7\} = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot(4x-7) + \frac{13}{2}}{2x^2-7x+3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{4x-7}{2x^2-7x+3}dx + \frac{1}{2}\int \frac{13}{2x^2-7x+3}dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} 2x^2 - 7x + 3 = 2\cdot\left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{7}{4} + \frac{49}{16}\right) - \frac{49}{8} + 3 = \\ = 2\cdot\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} = 2\cdot\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x^2-7x+3| + \frac{13}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2x^2-7x+3) + \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{\left(x-\frac{7}{4}\right) - \frac{5}{4}}{\left(x-\frac{7}{4}\right) + \frac{5}{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2x^2-7x+3) + \frac{13}{10}\ln\left|\frac{x-3}{x-0{,}5}\right| + C.$$

Задача 8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

Решение. Сделаем замену, после преобразования выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{x}=t, & x=\frac{1}{t} \\ & dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t}-1}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{3-2t-t^2}{t^2}}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{3-2t-t^2}}{t}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = \left\{\begin{matrix} 3-2t-t^2 = 3-(t^2+2t+1)+1 = \\ = 4-(t+1)^2 = 2^2-(t+1)^2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\int \frac{d(t+1)}{\sqrt{2^2-(t+1)^2}} = -\arcsin\frac{t+1}{2} + C = -\arcsin\frac{\frac{1}{x}+1}{2} + C =$$

$$= -\arcsin\frac{1+x}{2x} + C.$$

Задача 9. $\int (x+2)\ln^2 x dx$.

Решение. Применяем метод интегрирования по частям два раза:

$$\int (x+2)\ln^2 x\,dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln^2 x, du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv=(x+2)dx, v=\frac{(x+2)^2}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \ln^2 x\cdot\frac{1}{2}(x+2)^2 + \int (x+2)^2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \ln^2 x\cdot\frac{1}{2}(x+2)^2 + \int \ln x\cdot\frac{x^2+4x+4}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 x\cdot(x+2)^2 + \int \ln x\cdot\left(x+4+\frac{4}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 x\cdot(x+2)^2 + \int \ln x\cdot(x+4)\,dx + 4\int\frac{\ln x}{x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=(x+4)dx, v=\frac{x^2}{2}+4x \end{matrix}\right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 x\cdot(x+2)^2+\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\cdot\frac{1}{x}dx+4\int\ln x\, d(\ln x)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 x\cdot(x+2)^2+\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{1}{2}x+4\right)dx+4\frac{(\ln x)^2}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 x\cdot(x+2)^2+\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\cdot\ln x-\frac{1}{4}x^2-4x+2\ln^2 x+C.$$

Задача 10. $\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x+\cos x+1}$.

Решение. Применяем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x+\cos x+1}=\left\{\begin{aligned} t=tg\ \frac{x}{2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dt=\frac{2dt}{1+t^2}\end{aligned}\right\}=\int\frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=$$

$$=\int\frac{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t+1-t^2+1+t^2}{1+t^2}}=\int\frac{(t+1)^2 2dt}{(1+t^2)\cdot 2(t+1)}=\int\frac{(t+1)dt}{(1+t^2)}=$$

$$=\int\frac{tdt}{1+t^2}+\int\frac{dt}{1+t^2}==\frac{1}{2}\ln|1+t^2|+arctg\ t+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1+tg^2\frac{x}{2}\right|+arctg\ \left(tg\ \frac{x}{2}\right)+C.$$

Задача 11. $\int\frac{(x^5+3x^3-1)dx}{x^2+x}$.

Решение. Выделяем целую часть и правильную дробь:

$$\int\frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx=\int\left(x^3-x^2+4x-4+\frac{4x-1}{x(x+1)}\right)dx.$$

Правильную дробь представим в виде двух простейших дробей и методом неопределенных коэффициентов найдем неизвестные:

$$\frac{4x-1}{x^2+x}=\frac{4x-1}{x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+A+Bx}{x\cdot(x+1)};$$

$$Ax+A+Bx=4x-1;$$

$$\begin{cases}A+B=4,\\ A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1+B=4,\\ A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=5,\\ A=-1.\end{cases}$$

Тогда

$$\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx = \int \left(x^3-x^2+4x-4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+2x^2-x-\ln x+5\ln(x+1)+C.$$

Задача 12. $\int \frac{1}{1-x^3}dx.$

Решение. Разложим рациональную дробь на сумму простейших дробей и методом неопределенных коэффициентов найдем неизвестные

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{1+x+x^2} =$$
$$= \frac{A+Ax+Ax^2+Bx-Bx^2+C-Cx}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)};$$
$$Ax^2-Bx^2+Ax+Bx-Cx+A+C=1;$$

Приравняем коэффициенты слева и справа при неизвестных:

$$\begin{cases} A-B=0, \\ A+B-C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=A, \\ A+B-C=0, \\ C=1-A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=A, \\ A+A-1+A=0, \\ C=1-A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3}, \\ A=\frac{1}{3}, \\ C=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1-x^3}dx = \int \left(\frac{1}{3(1-x)}+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \{(x^2+x+1)' = 2x+1\} =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x+1)-\frac{1}{2}+2}{x^2+x+1}dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1} =$$
$$= \left\{\begin{matrix} x^2+x+1 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \\ = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\ \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задача 13. $\int \frac{x}{(1-\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}dx$.

Решение. Сделаем замену, выделим целую часть и правильную дробь:

$$\int \frac{x}{\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}dx = \begin{Bmatrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{Bmatrix} = \int \frac{t^4}{(1-t)^3t^2}\cdot 4t^3\,dt = \int \frac{4t^5}{(1-t)^3}dt =$$

$$= -4\int \frac{t^5}{(t-1)^3}dt = -4\int\left(t^2+3t+6+\frac{10t^2-18t+6}{(t-1)^3}\right)dt.$$

Разложим правильную дробь на сумму простейших дробей и методом неопределенных коэффициентов найдем неизвестные:

$$\frac{10t^2-18t+6}{(t-1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} = \frac{At^2-2At+A+Bt-B+C}{(t-1)^3};$$

$$At^2-2At+Bt+A-B+C = 10t^2-18t+6;$$

$$\begin{cases} A = 10, \\ B-2A = -18, \\ A-B+C = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 10, \\ B = 2, \\ A-B+C = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 10, \\ B = 2, \\ C = -2. \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}dx = -4\int\left(t^2+3t+6+\frac{10}{t-1}+\frac{2}{(t-1)^2}-\frac{2}{(t-1)^3}\right)dt =$$

$$= -4\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+6t+10\ln(t-1)-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)+C =$$

$$= -\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - 6\sqrt{x} - 24\sqrt[4]{x} - 40\ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right) + \frac{4}{\sqrt[4]{x}-1} - \frac{4}{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^2} + C.$$

Задача 14. $\int \cos x \cos 6x \sin 2x dx$.

Решение. Используем формулы тригонометрии:

$$\int \cos x \cos 6x \sin 2x \ dx = \left\{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos 5x)\cdot \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 7x \sin 2x \ dx + \frac{1}{2}\int \cos 5x \sin 2x \ dx =$$

$$= \left\{\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 9x - \sin 5x)\, dx + \frac{1}{4}\int (\sin 7x - \sin 3x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-\cos 9x}{9} + \frac{\cos 5x}{5}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-\cos 7x}{7} + \frac{\cos 3x}{3}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{36}\cos 9x + \frac{1}{20}\cos 5x - \frac{1}{28}\cos 7x + \frac{1}{12}\cos 3x + C.$$

Варианты для самостоятельной работы

Вычислить интегралы и в задачах 1-5 проверить правильность вычисления.

ВАРИАНТ 1

1. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3}dx$.
2. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.
4. $\int tg^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx$.
5. $\int \frac{3x-4}{x^2-4}dx$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.
7. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-2x-1}}dx$.
8. $\int \frac{xdx}{x^2+4x+29}$.
9. $\int x^2 \cos 2x dx$.
10. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-1}}$.
11. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$.
12. $\int \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}dx$.
13. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$.
14. $\int \frac{x-3}{x^3-3x^2+2x}dx$.

ВАРИАНТ 2

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$.
2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$.
3. $\int \sqrt[4]{5-6x}dx$.
4. $\int e^{-x^2} x dx$.
5. $\int \frac{x^2}{4+x^6}dx$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}}$.
7. $\int \frac{x-4}{\sqrt{-x^2-2x+1}}dx$.
8. $\int \frac{(2x+1)dx}{-x^2-4x+5}$.
9. $\int x arctg x dx$.
10. $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.
11. $\int \frac{2x^2-5x+2}{x^3+1}dx$.
12. $\int x\sqrt[4]{x+2}dx$.
13. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$.
14. $\int \frac{x^4-x+1}{x^3-2x^2+2x-4}dx$.

ВАРИАНТ 3

1. $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$.

2. $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-1)^3}{x}dx$.

3. $\int \sqrt[5]{4x-1}dx$.

4. $\int x\sqrt{3x^2-2}dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}$.

6. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x^2+5}}$.

7. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$.

8. $\int \frac{xdx}{3x^2-4x+9}$.

9. $\int x^2\ln(x-1)dx$.

10. $\int \frac{\cos x}{4-3\sin^2 x}dx$.

11. $\int \frac{x^3dx}{3x^4-x^2-2}$.

12. $\int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^3}}dx$.

13. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}dx$.

14. $\int \frac{1}{x^3(x^2+1)}dx$.

ВАРИАНТ 4

1. $\int (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)dx$.

2. $\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx$.

3. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

4. $\int (4-3x)^{2005}dx$.

5. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}dx$.

6. $\int \frac{xdx}{2x^4+5}$.

7. $\int \frac{2-2x}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx$.

8. $\int \frac{(x+3)dx}{2x^2-2x+3}$.

9. $\int (x+1)e^{2x}dx$.

10. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x+1}$.

11. $\int \frac{dx}{9x^3+6x^2+x}$.

12. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+3}}dx$.

13. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$.

14. $\int \frac{x^3-x-1}{x^2+2x}dx$.

ВАРИАНТ 5

1. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$.

8. $\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{3x^3-2x-1}}$.

2. $\int \frac{4arctgx - x}{1+x^2}dx$.

3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$.

4. $\int \left(\frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5} \right) dx$.

5. $\int (3-2x)^{12} dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

7. $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+1}dx$.

9. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x - 1}$.

11. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$.

12. $\int \frac{x^3+1}{1-x^3}dx$.

13. $\int \frac{2x}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}dx$.

14. $\int \cos x \cos 6x dx$.

ВАРИАНТ 6

1. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

2. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$.

3. $\int x \cos(x^2) dx$.

4. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

5. $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$.

6. $\int \sqrt[5]{12-5x} dx$.

7. $\int \frac{3-5x}{2x^2-3x+7}dx$.

8. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

9. $\int (x^2-4)\cos 3x dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)(x+1)}$.

11. $\int \frac{x+8}{x^3+4x^2+4x}dx$.

12. $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x+2}}dx$.

13. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

14. $\int \sin^4 \frac{2x}{9} dx$.

ВАРИАНТ 7

1. $\int \frac{1}{x(2+3\ln x)^5}dx$.

2. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{3\cos^2 5x - 2}}dx$.

8. $\int \frac{x-4}{3x^2-2x-1}dx$.

9. $\int x^2 e^{5x} dx$.

3. $\int \frac{3tg^2 x + 4}{\sin^2 x} dx$.

4. $\int x arcctg\, 2x dx$.

5. $\int \frac{3\sqrt{x-5}}{(x-5)^2 + \sqrt{x-5}} dx$.

6. $\int \frac{e^{5\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$.

7. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 7}} dx$.

10. $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$

11. $\int \frac{1}{x(x^2 - 1)(x + 2)} dx$.

12. $\int \sqrt{\frac{x-2}{9-x}} dx$.

13. $\int \cos^2 \frac{3x}{5} \sin^4 \frac{3x}{5} dx$.

14. $\int \frac{(1 - \sin x)}{\cos x (1 + \cos x)} dx$.

ВАРИАНТ 8

1. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2 - 3x}} dx$.

2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$.

3. $\int \frac{ctg^3 10x}{1 - \cos 20x} dx$.

4. $\int \frac{e^{2x-5}}{3 - e^{4x}} dx$.

5. $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

6. $\int e^{5x} \cos 3x dx$.

7. $\int \frac{6x - 1}{4x^2 - 3x + 5} dx$.

8. $\int \frac{1 - x}{\sqrt{3 - 2x - 2x^2}} dx$.

9. $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$.

10. $\int \frac{dx}{1 - x^4}$.

11. $\int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)(x^2 - x + 1)} dx$.

12. $\int \sqrt{\frac{7-x}{x-5}} dx$.

13. $\int \frac{1}{8 - 4\sin x + 7\cos x} dx$.

14. $\int \sin 4x \cos x dx$.

ВАРИАНТ 9

1. $\int \frac{7x}{\sqrt[4]{(3x^2 - 8)^3}} dx$.

2. $\int \frac{e^{4x}}{5 + 2e^{4x}} dx$.

3. $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 4} dx$.

8. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

9. $\int (x - 2) \ln^2 x dx$.

10. $\int \frac{dx}{5x^3 + 7x^2 - 6x}$.

4. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x^2+1}}dx$.

5. $\int \frac{x^2+\ln^2 x}{x}dx$.

6. $\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx$.

7. $\int \frac{7x-1}{3x^2-5x+1}dx$.

11. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$.

12. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

13. $\int \frac{1}{\cos x(1+\sin x)}dx$.

14. $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{4-x}}dx$.

ВАРИАНТ 10

1. $\int \frac{x+\sqrt{arctg\,3x}}{1+9x^2}dx$.

2. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$.

3. $\int \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

4. $\int \frac{3}{6x^2+5}dx$.

5. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

6. $\int \frac{2+3x}{7x^2-3x+1}dx$.

7. $\int tg^3 \frac{x}{2}dx$.

8. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{5-\cos^2 x}}dx$.

9. $\int \ln(x^2+2)dx$.

10. $\int \frac{dx}{x(x+2)(x-3)^2}$.

11. $\int \frac{1}{x^3-1}dx$.

12. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

13. $\int \frac{1}{\cos^4 3x}dx$.

14. $\int (1-6x)e^{2x}dx$.

ВАРИАНТ 11

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx$.

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+0.5}}dx$.

3. $\int \frac{arctg^3 x+5x}{1+x^2}dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-5x^2}}$.

8. $\int \frac{2x+1}{3x-3x^2+4}dx$.

9. $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}dx$.

10. $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$.

11. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

5. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{3x^2-2}}dx$.

6. $\int (x^2+2)\cos 2x dx$.

7. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{3x^2-5x}}dx$.

12. $\int \cos^6 x dx$.

13. $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}dx$.

14. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

ВАРИАНТ 12

1. $\int \frac{dx}{x(\ln x+1)^7}$.

2. $\int \frac{2^{3tgx}}{\cos^2 x}dx$.

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^8}}dx$.

4. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$.

5. $\int \frac{1}{e^{4x}}dx$.

6. $\int 5^{2x}\cos 5x dx$.

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+5}}$.

8. $\int \frac{3xdx}{x^2-3x+2}$.

9. $\int \frac{\sqrt[9]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-8}dx$.

10. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x-3)^2}$.

11. $\int \sin^2\frac{x}{3}\cos^5\frac{x}{3}dx$.

12. $\int \frac{(6-x)dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

13. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

14. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$.

ВАРИАНТ 13

1. $\int \frac{5-4tg^2 x}{\sin^2 x}dx$.

2. $\int \frac{(2\sqrt{x}-x)^3}{x^2}dx$.

3. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-7x}}dx$.

4. $\int x^3\sqrt{2x^4+3}dx$.

5. $\int \frac{1}{\sqrt{5-2x^2}}dx$.

8. $\int \frac{-x+3}{-3x-2x^2+3}dx$.

9. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$.

10. $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)}dx$.

11. $\int \cos 2x\sin^2 x dx$.

12. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx$.

6. $\int x^2 \sin 4x dx$.

7. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx$.

13. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$.

14. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx$.

ВАРИАНТ 14

1. $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx$.

2. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx$.

3. $\int \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} dx$.

4. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx$.

5. $\int 2^{2x-5} dx$.

6. $\int x \sin 3x dx$.

7. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+6}} dx$.

8. $\int \frac{2x+3}{5x+4x^2+7} dx$.

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx$.

10. $\int \frac{2x^2+3x+6}{(x+1)^2(-x+4)} dx$.

11. $\int \cos^6 x dx$.

12. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x^2+1)(x+1)^2} dx$.

13. $\int arctg \sqrt{x} dx$.

14. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$.

ВАРИАНТ 15

1. $\int \frac{dx}{(9x+2)^3}$.

2. $\int \frac{4+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

3. $\int 3^x (3+\frac{3^{-x}}{\sqrt{x}}) dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-7}}$.

5. $\int 2^{2x-5} dx$.

6. $\int x^2 \cos 2x dx$.

8. $\int \frac{x+3}{5x+4x^2-6} dx$.

9. $\int \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+3} dx$.

10. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$.

11. $\int tg^4 2x dx$.

12. $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} dx$.

13. $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx$.

7. $\int \frac{x+7}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$.

14. $\int x\ln(x+2)dx$.

ВАРИАНТ 16

1. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^4}$.

2. $\int \cos 3x\sqrt{2\sin 3x-1}dx$.

3. $\int \frac{2ctg^2 x-3}{\cos^2 x}dx$.

4. $\int 2^x\left(\frac{2^{-x}}{\sqrt{x^5}}+3\right)dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+4}}$.

6. $\int x^2 e^{-x}dx.$

7. $\int \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2+3}}dx$.

8. $\int \frac{2x+5}{4x^2-2x+1}dx$.

9. $\int \sqrt[3]{x}\ln\sqrt{x}dx$.

10. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)(x+2)}$.

11. $\int \sin 3x\sin 2x\cos 4x dx$.

12. $\int x(2x^2-1)^{1/3}dx$.

13. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

14. $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx$.

ВАРИАНТ 17

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{1-4x}}$.

2. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}dx$.

3. $\int \frac{(\arcsin x)^4-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-a}}$.

5. $\int (4x^2-2)\ln x dx$.

6. $\int \frac{1-\cos^4 x}{\cos^2 x}dx$.

7. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{3-x-x^2}}dx$.

8. $\int \frac{5x-1}{4x-x^2-5}dx$.

9. $\int x^2 4^x dx$.

10. $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x(x^2+1)^2}dx$.

11. $\int \sin^2\frac{2x}{9}\cos^2\frac{2x}{9}dx$.

12. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$.

13. $\int tg^5\frac{x}{5}dx$.

14. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$.

ВАРИАНТ 18.

1. $\int \frac{(x^2-5)dx}{\sqrt[6]{2x^3-30x+1}}$.

2. $\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}dx$.

3. $\int \frac{tg^7 2xdx}{(2\cos^2 x-1)^2}$.

4. $\int \frac{3x-1}{2x^2+3}dx$.

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

6. $\int x^2 e^{3x}dx.$

7. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

8. $\int \frac{3x+5}{6x+x^2-1}dx$.

9. $\int \frac{\sqrt{x-1}-x}{x\sqrt{x-1}}dx$.

10. $\int \frac{x^4-2x^3+3x+4}{1+x^3}dx$.

11. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

12. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$.

13. $\int (1+2\cos x)^3 dx$.

14. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

ВАРИАНТ 19

1. $\int \frac{(arctgx)^{50}-2x}{1+x^2}dx$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+3x^2}}$.

3. $\int \frac{\cos 2x}{4-\sin^2 2x}dx$.

4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

5. $\int \frac{(3^x-6)dx}{\sqrt{3^x}}$.

6. $\int x^2 \cos\frac{x}{2}dx$.

7. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

8. $\int \frac{3x-2}{2x^2+3x+4}dx$.

9. $\int x\ln(x^2-4)dx$.

10. $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$.

11. $\int \sin^3 x\cos^4 xdx$.

12. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.

13. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$.

14. $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}-1}dx$.

ВАРИАНТ 20

1. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx.$

8. $\int \frac{3x+7}{2x^2-3x+4}dx$.

2. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

3. $\int\frac{2^{3/x}}{x^2}dx$.

4. $\int\frac{x+\sqrt{arctg\,3x}}{1+9x^2}dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$.

6. $\int e^{3x}\cos 2x dx$.

7. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+5}}dx$.

9. $\int\sqrt[3]{x}\ln^2 x dx$.

10. $\int\frac{dx}{(2+x)(x-3)}$.

11. $\int\frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx$.

12. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

13. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$.

14. $\int\frac{\sqrt[4]{2x-1}+2}{1+\sqrt[4]{2x-1}}dx$.

ВАРИАНТ 21

1. $\int\left(\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}-3\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{x^7}\right)dx$.

2. $\int x\cos^2 x^2 dx$.

3. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\cos^2\sqrt[3]{x}}$.

4. $\int\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$.

6. $\int x\,arctg\,\frac{x}{3}dx$.

7. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{1-3x-x^2}}dx$.

8. $\int\frac{5x+4}{3+4x-x^2}dx$.

9. $\int e^{5x}\sin 3x dx$.

10. $\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$.

11. $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$.

12. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

13. $\int\frac{dx}{(x^2-2x)^2}$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$.

ВАРИАНТ 22

1. $\int\frac{4-2ctg^2 x}{\sin^2 x}dx$.

2. $\int\frac{(\sqrt{x}-2)^3}{x^2}dx$.

8. $\int\frac{2x^3dx}{3x^4-2x^2+4}$.

9. $\int\frac{dx}{x^3-4x}$.

3. $\int \frac{2e^x}{3+2e^{2x}}dx$.

4. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+1}}dx$.

5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{arctgx+1}}$.

6. $\int (x+3)\sin 3xdx$.

7. $\int \frac{(\cos x+2)\sin xdx}{\sqrt{2-2\cos x+\cos^2 x}}$.

10. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

11. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+4})\sqrt[6]{(x+4)^5}}$.

12. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$.

14. $\int \frac{x^4-2x^3+3x+4}{1+x^3}dx$.

ВАРИАНТ 23

1. $\int \frac{(\ln x)^6}{x}dx$.

2. $\int \frac{3-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. $\int (3x-4)^{40}dx$.

4. $\int \frac{6x-1}{\sqrt{2-x^2}}dx$.

5. $\int \frac{xdx}{3x^4+7}$.

6. $\int (x+2)2^x dx$.

7. $\int \frac{1-x}{\sqrt{4x+3-x^2}}dx$.

8. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7}dx$.

9. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

10. $\int \cos^7 xdx$.

11. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+4})\sqrt[6]{(x+4)^5}}$.

12. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.

13. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

14. $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx$.

ВАРИАНТ 24

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x+2}}$.

2. $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$.

3. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{arctgx+1}}$.

8. $\int \frac{xdx}{1-x-2x^2}$.

9. $\int \frac{dx}{x^3-4x}$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^6 5x}$.

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$.

5. $\int \frac{ctg^7 4x}{1-\cos 8x}dx$.

6. $\int (x-1)e^{-2x}dx$

7. $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2+4}}$.

11. $\int \frac{\sqrt[4]{2x-1}+2}{1+\sqrt[4]{2x-1}}dx$.

12. $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$.

13. $\int \frac{\sin 16x dx}{1-\cos^2 8x}$.

14. $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx$.

ВАРИАНТ 25

1. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt[5]{(x^2-2x+5)^2}}$.

2. $\int \cos 5x e^{2\sin 5x}dx$.

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x(1-tg^2 3x)}$.

4. $\int \frac{2^{x+3}}{\sqrt{4^x+81}}dx$.

5. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$.

6. $\int ctg^5 7x dx$.

7. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$.

8. $\int \frac{(3x+4)dx}{2x^2-3x+3}$.

9. $\int \frac{xdx}{(x^2-4)(x^2+9)}$.

10. $\int \cos^4\frac{2x}{7}\sin^2\frac{2x}{7}dx$.

11. $\int \frac{(6-\sqrt[4]{x})dx}{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}}$.

12. $\int (x^2-1)2^x dx$.

13. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

14. $\int \frac{(2x^3-40x-8)dx}{x(x+4)(x-2)}$.

Справочный материал

- **Неопределенный интеграл и первообразная:**

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$: $F'^{(x)} = f(x)$.

- **Свойства интегралов**

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
5. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.
6. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

- **Таблица интегралов**

1. $\int 0dx = C$.
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$; $\int dx = x + C$; $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$; $\int \sqrt{x}dx = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$;

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin xdx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos xdx = \sin x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$.

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;.

15. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$.

16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$.

17. $\int tgxdx = -\ln\left|\cos x\right| + C$.

18. $\int ctgxdx = \ln\left|\sin x\right| + C$.

19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C$.

20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

21. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

- Формула **замены переменной** в неопределенном интеграле (метод подстановки).

$$\int f(x)dx = \left\{\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array}\right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

- **Подведение под знак дифференциала.** Если подынтегральное выражение содержит функцию $g(x)$ и ее производную, то эту функцию можно подвести под знак дифференциала:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))d(g(x)) = \{t = g(x)\} = \int f(t)dt.$$

- **Таблица основных дифференциалов.**

$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$; $xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+b) = \frac{1}{2a}d(x^2+b)$; $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3)$;

$x^3dx = \frac{1}{4}d(x^4)$; $x^n dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$; $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$; $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$; $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$;

$a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$; $e^x dx = d(e^x)$; $\sin x dx = -d(\cos x)$; $\cos x dx = d(\sin x)$;

$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$; $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx)$; $\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx)$;

$\sin 2x dx = d(\sin^2 x) = -d(\cos^2 x)$; $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$.

- Формула **интегрирования по частям** в неопределенном интеграле:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Интегралы, вычисляемые по частям.

I группа. $\int x^n e^x dx$**;** $\int x^n \sin x dx$**;** $\int x^n \cos dx$. Здесь $u = x^n$, $dv = \{e^x dx; \sin x dx; \cos x dx\}$. Интегрирование по частям n раз.

II группа. $\int x^n \ln x dx$; $\int x^n \arcsin x dx$; $\int x^n \arccos x dx$. Здесь $u = \{\ln x; \arcsin x; \arccos x\}$, $dv = x^n$. Один раз по частям.

III группа. $\int e^{ax} \sin bx dx$; $\int e^{ax} \cos bx dx$. Здесь $u = e^{ax}$, $dv = \{\sin bx; \cos bx\}$.

Интегрирование по частям два раза, далее интеграл находится алгебраически, появляясь в правой части с коэффициентом, отличным от единицы.

- Интегралы, **содержащие квадратный трехчлен** $ax^2 + bx + c$ в знаменателе, находятся выделением полного квадрата из трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$ и линейной заменой переменной $t = x + \frac{b}{2a}$.

- При нахождении **интегралов вида** $\int \sin^m x \cos^n x dx$:

  а) если степень m у синуса нечетная, то применяют подстановку $\cos x = t$;

  б) если степень n у косинуса нечетная, то применяют подстановку $\sin x = t$;

  в) если m и n – четные, то применяют формулы понижения степени: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$.

- Если под интегралом содержится **произведение синуса и косинуса различных аргументов**, то применяют формулы преобразования произведения в сумму: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$,

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$,

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

- При нахождении **интегралов вида** $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная дробь, применяют **универсальную подстановку** $tg\frac{x}{2} = t$, тогда $x = 2arctgt$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
- В **интегралах** $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$, $\int R(tgx)dx$ применяют подстановку $tgx = t$, тогда $x = arctgt$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $\sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2}$.