РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Целями работы являются

– повторение основных понятий: понятие определенного интеграла, его свойства, формула Ньютона-Лейбница, методы интегрирования, геометрические приложения;
– закрепление навыков решения определенных интегралов, полученных на аудиторных занятиях.

Задание для разбора

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $\int_{3\pi/8}^{\pi/2} ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx.$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx.$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

Задача 4. Вычислить несобственный интеграл 1 рода $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8}.$

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y = x^2 - 13x + 22,\ y = -6x + 16,\ x = 0.$

б) $r = 3\sqrt{3}\cos\varphi$

Задача 6. Вычислить длину дуги кривой $r = 3(1 - \cos\varphi),\ \pi/2 \le \varphi \le \pi.$

Разбор задач

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $\int_{3\pi/8}^{\pi/2} ctg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$.

Решение. Сделаем замену переменной, поменяем пределы интегрирования:

$$\int_{3\pi/8}^{\pi/2} ctg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\left\{\begin{matrix} 2x-\frac{\pi}{4}=t, & \begin{array}{c|c|c} x & 3\pi/8 & \pi/2 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \end{array} \\ x=\frac{t}{2}+\frac{\pi}{8}, dx=\frac{dt}{2}, & \end{matrix}\right\}=\int_{\pi/2}^{3\pi/4} ctg\, t\, dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin t|\Big|_{\pi/2}^{3\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\sin\frac{3\pi}{4}\right|-\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-\ln 1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln 2-0\right)=-\frac{\ln 2}{4}.$$

Задача 2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

Решение. Сделаем замену переменной, поменяем пределы интегрирования:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx=\left\{\begin{matrix} \sqrt{x+1}=t, & dx=2tdt \\ x+1=t^2, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \\ x=t^2-1, & \end{matrix}\right\}=\int_1^2 (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt=$$

$$=2\int_1^2 (t^4-t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=2\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=2\left(\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right)=2\cdot\frac{93-35}{15}=2\cdot\frac{58}{15}=\frac{116}{15}.$$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\cos^2 x}=\left\{\begin{matrix} u=x, du=dx \\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x}, v=tg\,x \end{matrix}\right\}=x\cdot tg\,x\,\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}-\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg\,xdx=$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot tg\,\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{4}+\ln|\cos x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Задача 4. Вычислить несобственный интеграл 1 рода $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8}$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8} = \left\{ \begin{matrix} x^2-6x+8 = x^2-6x+9-1 = \\ = (x-3)^2-1 \end{matrix} \right\} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^2-1} =$$

$$= \lim_{B\to\infty} \int_1^{B} \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{B\to\infty} \ln\left|\frac{(x-3)-1}{(x-3)+1}\right|\Bigg|_1^B =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{B\to\infty} \ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\Bigg|_1^B = = \frac{1}{2} \lim_{B\to\infty} \ln\left|\frac{B-4}{B-2}\right| - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3.$$

Задача 5. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями.

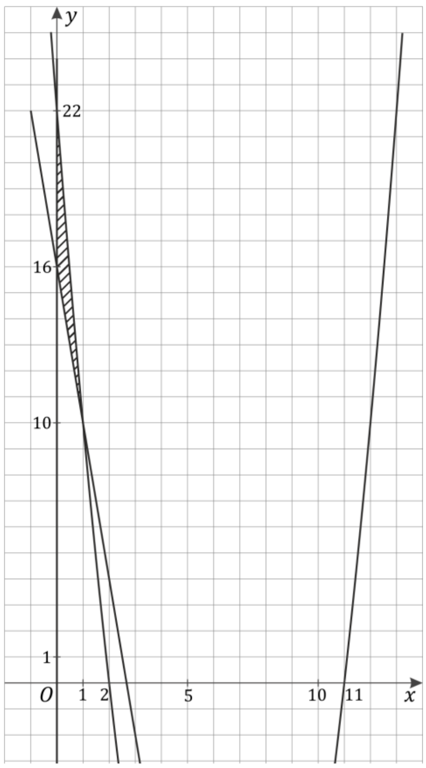
Решение. а) $y = x^2 - 13x + 22,\ y = -6x + 16,\ x = 0.$

$$x^2 - 13x + 22 = -6x + 16,$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0, x_1 = 6, x_2 = 1$$

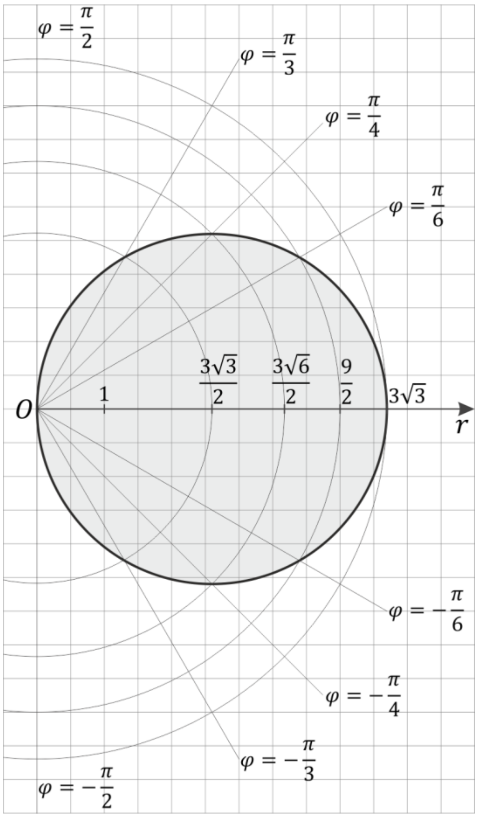
$$S = \int_0^1 (x^2 - 13x + 22 + 6x - 16)\, dx = \int_0^1 (x^2 - 7x + 6)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 7\cdot\frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 6 = \frac{2-21+36}{6} = \frac{17}{6}.$$



б) $r = 3\sqrt{3}\cos\varphi$.

Это окружность. Так как $r \geq 0$, то $\cos\varphi \geq 0$, отсюда $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.



$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(3\sqrt{3}\cos\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{27}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{27}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{27}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{27}{4}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right) = \frac{27\pi}{4}.$$

Задача 6. Вычислить длину дуги кривой $r = 3(1-\cos\varphi)$, ${}^{\pi}/_{2} \leq \varphi \leq \pi$.

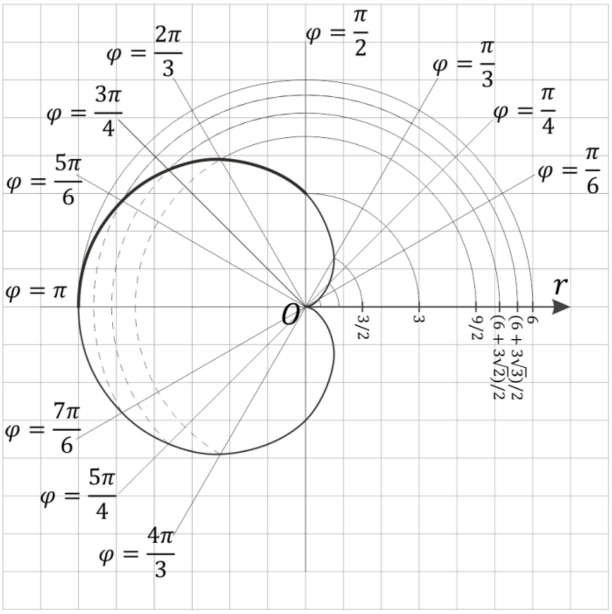
Решение.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2} d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{9(1-\cos\varphi)^2 + 9\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 3\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 3\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 3\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 3\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 6\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= -6\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -12\cos\frac{\pi}{2} + 12\cos\frac{\pi}{4} = 12\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2}.$$



Варианты для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

Задача 1.

1. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\,dx.$
2. $\int\limits_0^1 \sqrt{4+5x}\,dx.$
3. $\int\limits_2^6 \sqrt{5x+6}\,dx.$
4. $\int\limits_0^4 \sqrt{9+4x}\,dx.$
5. $\int\limits_0^1 2^{4x-3}\,dx$
6. $\int\limits_1^2 3^{5x-4}\,dx.$
7. $\int\limits_1^2 5^{2x-1}\,dx.$
8. $\int\limits_0^2 4^{2x+1}\,dx.$
9. $\int\limits_1^2 e^{4x-3}\,dx.$
10. $\int\limits_1^3 e^{2x-1}\,dx.$
11. $\int\limits_{-1}^1 e^{2x+3}\,dx.$
12. $\int\limits_1^2 e^{5x-4}\,dx.$
13. $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx.$
14. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx.$

Задача 2.

1. $\int\limits_{-1}^3 \frac{xdx}{\sqrt{2x+3}}.$
2. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{3x+1}}.$
3. $\int\limits_0^{8/3} \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}.$
4. $\int\limits_{-0,5}^2 \frac{xdx}{\sqrt{2x+5}}.$
5. $\int\limits_0^{7,5} \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}.$
6. $\int\limits_{16}^{30} \frac{xdx}{\sqrt{0,5x+1}}.$
7. $\int\limits_{14}^{56} \frac{xdx}{2\sqrt{0,5x-3}}.$
8. $\int\limits_1^5 x^2\sqrt{x-1}\,dx.$
9. $\int\limits_{0,5}^5 x^2\sqrt{2x-1}\,dx.$
10. $\int\limits_0^6 \frac{x^2dx}{\sqrt{0,5x+1}}.$
11. $\int\limits_{36}^{56} \frac{xdx}{4\sqrt{0,25x-5}}.$
12. $\int\limits_{24}^{72} \frac{xdx}{3\sqrt{\frac{x}{3}+1}}.$
13. $\int\limits_{7/3}^{14/3} \frac{xdx}{\sqrt{3x+2}}.$
14. $\int\limits_{7,5}^{17,5} \frac{0,5xdx}{\sqrt{2x+1}}$

Задача 3.

1. $\int\limits_e^{e^2} \ln x\,dx.$
2. $\int\limits_1^e x\ln x\,dx.$
3. $\int\limits_1^e x^2\ln x\,dx.$
4. $\int\limits_1^e x^3\ln x\,dx.$
5. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx.$
6. $\int\limits_2^3 \ln(x-1)\,dx.$
7. $\int\limits_0^1 \ln(x^2+1)\,dx.$
8. $\int\limits_2^3 \ln(x^2-1)\,dx.$
9. $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\ln x\,dx.$
10. $\int\limits_1^e \frac{\ln x\,dx}{x^2}.$
11. $\int\limits_4^9 \sqrt{x}\ln x\,dx.$
12. $\int\limits_1^{16} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$
13. $\int\limits_1^3 xe^x\,dx.$
14. $\int\limits_1^2 xe^{2x}\,dx.$

Задача 4.

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-7x+10}.$
2. $\int\limits_3^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x}.$
3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{arctgx\,dx}{x^2+1}.$
4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}.$
5. $\int\limits_1^{\infty} \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$
6. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}\,dx.$
7. $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}dx}{x^2}.$
8. $\int\limits_0^{\infty} xe^{x^2}\,dx.$
9. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1}.$
10. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}.$
11. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctgx}}.$
12. $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{xdx}{4+x^2}.$
13. $\int\limits_0^{\infty} 3^{-2x}\,dx.$
14. $\int\limits_0^{\infty} x5^{-x^2}\,dx.$

15. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{3}dx.$	15. $\int_{-0,25}^{1,75} \frac{xdx}{\sqrt{4x+2}}.$	15. $\int_1^3 xe^{3x}dx$	15. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+3)^2}.$
16. $\int_0^{\pi/6} \sin 3xdx.$	16. $\int_{0,1}^{1} x\sqrt{10x-1}dx.$	16. $\int_1^4 xe^{4x}dx$	16. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x+5}}.$
17. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx.$	17. $\int_{10}^{12,5} x\sqrt{0,1x-1}dx.$	17. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\sin xdx.$	17. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(5x+3)^3}.$
18. $\int_0^{\pi/4} \cos 2xdx.$	18. $\int_6^{65} \frac{xdx}{5\sqrt{0,2x+3}}.$	18. $\int_{\pi.4}^{\pi.2} x\cos xdx.$	18. $\int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+7}}.$
19. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{3}dx.$	19. $\int_{13,5}^{21} \frac{xdx}{9\sqrt{2x/3-5}}.$	19. $\int_0^{\pi/2} x\sin 2xdx.$	19. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(20x+7)^4}}.$
20. $\int_0^{\pi/6} \cos 3xdx.$	20. $\int_{3/4}^{6} \frac{xdx}{\sqrt{x/3+2}}.$	20. $\int_0^{\pi/2} x\cos 2xdx.$	20. $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx.$
21. $\int_0^1 \frac{dx}{1+8x}.$	21. $\int_{19/4}^{7} \frac{xdx}{\sqrt{4x-3}}.$	21. $\int_0^{\pi/2} x\sin 3xdx.$	21. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx.$
22. $\int_0^1 \frac{dx}{3+6x}.$	22. $\int_{0,5}^{4,5} \frac{3xdx}{\sqrt{2,5x+1}}.$	22. $\int_0^{\pi/2} x\cos 3xdx.$	22. $\int_0^{\infty} x^3e^{-x^4}dx.$
23. $\int_0^4 \frac{dx}{9+4x}.$	23. $\int_{0,5}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{2x+3}}.$	23. $\int_{1/2}^{1} \arcsin xdx.$	23. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}.$
24. $\int_2^6 \frac{dx}{5x+6}.$	24. $\int_0^{7/4} \frac{xdx}{\sqrt{4x+9}}.$	24. $\int_0^{1/2} \arcsin 2xdx.$	24. $\int_{3/2}^{\infty} \frac{dx}{9+4x^2}.$
25. $\int_1^4 (x^2+\sqrt{x})dx.$	25. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{5x-1}}.$	25. $\int_0^1 arctgxdx.$	25. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}.$

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1. а) $y = x^2 - 7x + 10, y = -x + 5, x = 0.$ б) астроидой $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$
2. а) $y = x^2 - 6x + 5, y = 3x - 9, x = 8.$ б) $r = 3\sin 3\varphi,\quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$
3. а) $y = x^2 - 4x - 5, y = x - 9, x = 0.$ б) $r = 2(1-\cos\varphi), r = 2.$
4. а) $y = x^2 - 4x - 5, y = x - 9, x = 5.$ б) $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t, \end{cases}\quad 0 \le t \le \pi/2.$
5. а) $y = x^2 - 4x - 12, y = x - 16, x = 0.$ б) эллипсом $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$
6. а) $y = x^2 - 4x - 12, y = x - 16, x = 6.$ б) $r = 5\cos\varphi.$
7. а) $y = x^2 - 9x + 8, y = -x - 4, x = 7.$ б) $r = 3(1+\sin\varphi),\ -\pi/2 \le \varphi \le 0.$

8. а) $y = x^2 - 6x + 9, y = x - 1, x = 1.$ б) $r = \sqrt{3}\sin\varphi.$

9. а) $y = x^2 - 9x + 8, y = -x - 4, x = 0.$ б) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} 1 \le t \le 2.$

10. а) $y = x^2 - 6x + 9, y = x - 1, x = 6.$ б) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/2.$

11. а) $y = x^2 + 2x + 1, y = x + 3, x = -3.$ б) $r = 2\cos 2\varphi, \ \pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4.$

12. а) $y = x^2 + 2x + 1, y = x + 3, x = 2.$ б) $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}, \ 0 \le \varphi \le \pi/2.$

13. а) $y = -x^2 + 7x - 6, y = x - 1, x = 0.$ б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

14. а) $y = -x^2 + 7x - 6, y = x - 1, x = 6.$ б) $\begin{cases} x = 4 + 3\cos t, \\ y = 3 + 4\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/3.$

15. а) $y = -x^2 + 4x + 5, y = -x + 9, x = 0.$ б) $r = 2\sin 3\varphi, \ 0 \le \varphi \le \pi/6.$

16. а) $y = -x^2 + 4x + 5, y = -x + 9, x = 5.$ б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/4.$

17. а) $y = -x^2 + 4x + 12, y = -x + 16, x = 0.$ б) $r = 3(1 + \sin\varphi), \ -\pi/6 \le \varphi \le 0.$

18. а) $y = -x^2 + 4x + 12, y = -x + 16, x = 6.$ б) $r = a\sin 3\varphi, \ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

19. а) $y = -x^2 + 9x - 8, y = x + 4, x = 0.$ б) $r = 2\varphi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

20. а) $y = -x^2 + 9x - 8, y = x + 4, x = 7.$ б) $\begin{cases} x = \cos t - \cos 2t, \\ y = \sin t - \sin 2t. \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

21. а) $y = x^2 - 6x + 5, y = -x + 1, x = 0.$ б) астроидой $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$

22. а) $y = x^2 - 8x + 12, y = -x + 2, x = 0.$ б) $r = (1 - \cos\varphi), r = 1.$

23. а) $y = x^2 + x - 2, y = x + 2, x = 3.$ б) $\begin{cases} x = 1 + 2\cos t, \\ y = 2 + 1\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi/2.$

24. а) $y = x^2 - 10x + 9, y = x - 9, x = 0.$ б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

25. а) $y = x^2 + 6x + 5, y = -x - 5, x = 0.$ б) $r = \cos 2\varphi, \ \pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4.$

Задача 6. Вычислить длину дуги кривой.

1. $y = \ln\sin x$ от $x = \pi/3$ до $x = 2\pi/3.$
2. $y = -x^2 + 2x$ от вершины до точки $x = 2.$
3. $y = \ln\sin x$ от $x = \pi/3$ до $x = \sqrt{15}.$

4. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}$, отсеченной осью Ox.

5. $\frac{3}{2}x = y^{3/2}$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2\sqrt{3};3)$.

6. астроиды $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

7. $r = 1/\varphi$ от $\varphi = 3/4$ до $\varphi = 4/3$.

8. кардиоиды $r = 3{,}5(1 - \cos\varphi)$.

9. $r = \sqrt{2}\sin\varphi$.

10. одной арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

11. $y^2 = 16x$, отсеченной прямой $x = 4$.

12. $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

13. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

14. $r = 6(1 + \sin\varphi), -\pi/2 \le \varphi \le 0$.

15. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi/2$.

16. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

17. $y^2 = 9 - x, y = -3, y = 0$.

18. $y = \ln x$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(\sqrt{3};\ln\sqrt{3})$.

19. $x = \ln\cos y, \quad 0 \le y \le \pi/3$.

20. $r = 3(1 + \sin\varphi), \quad -\pi/6 \le \varphi \le 0$.

21. $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox.

22. $y = 1 - \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6$.

23. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4$.

24. $r = 5e^{5/12\varphi}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

25. $y = \sqrt{x-1}$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(2;1)$.

Справочный материал

- **Свойства** определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3. Линейность: $\int\limits_a^b (c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x))dx = c_1\int\limits_a^b f_1(x)dx \pm c_2\int\limits_a^b f_2(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (аддитивность).

- Формула **Ньютона-Лейбница:** $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

- **Замена переменных** в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left\{\begin{matrix} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \psi(x); t_1 = \psi(a), t_2 = \psi(b) \end{matrix}\right\} = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

- **Интегрирование по частям** в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

- **Приложения** определенного интеграла.

1. **Площадь плоской фигуры,** ограниченной:

а) кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$: $S = \int\limits_a^b f(x)dx$;

б) кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, $x \in [a,b]$: $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$;

в) линией, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt;$$

г) линией, заданной в полярной системе координат $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi.$$

2. **Длина дуги кривой:**

а) в прямоугольной системе координат $y = f(x)$, $a \le x \le b$: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$;

б) в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$:

$$l=\int_a^b \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

в) в полярной системе координат $r=r(\varphi)$: $l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$.

3. **Объем тела,** образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной:

а) линиями $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a, x=b$: $V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$;

б) линиями $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ на $[a,b]$: $V_{Ox}=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx$.

4. **Объем тела,** образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной:

а) линиями $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a,\ x=b$: $V_{Oy}=2\pi\int_a^b xf(x)dx$;

б) линиями $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ на $[a,b]$: $V_{Oy}=2\pi\int_a^b x(y_2-y_1)dx$.