

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

**Целями работы** являются

- повторение основных понятий: определение, порядок, общее и частное решение, общий и частный интегралы, задача Коши для уравнений 1 и 2 порядков; типы дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения; дифференциальные уравнения второго порядка: уравнения допускающие понижение порядка, линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами;
- закрепление навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных на аудиторных занятиях.

### Вариант для разбора

**Задача 1.** Решить уравнения с разделяющимися переменными:

а)  $\ln(\sin y) dx + x \operatorname{ctg} y dy = 0$ ,

б)  $2y'\sqrt{2x-1} - xy = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

**Задача 2.** Решить однородные уравнения:

а)  $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$ ,

б)  $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,

в)  $xy' = y \cos^2\left(\ln \frac{y}{x}\right)$ .

**Задача 3.** Решить линейные уравнения первого порядка:

а)  $e^{-y}dx + (2y + xe^{-y})dy = 0$ ,

б)  $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$ ,

в)  $y' + y = \sin x$ ,  $y(0) = 1$ .

**Задача 4.** Решить уравнения с помощью понижения порядка:

а)  $y'' = 4 \cos 2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ;

б)  $xy'' = (1 + 2x^2)y'$ ;      в)  $2yy'' = (y')^2$ ,  $y(-1) = 4$ ,  $y'(-1) = 1$ .

**Задача 5.** Решить линейные неоднородные уравнения методом неопределенных коэффициентов:

а)  $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$ ,  $y(0) = y''(0) = 0$ ;

б)  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ ;      в)  $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$ ;

г)  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$ ;      д)  $y'' + 2y' = x^2 + 2$ .

## Разбор задач

**Задача 1.** Решить уравнения с разделяющимися переменными:

а)  $\ln(\sin y)dx + x \operatorname{ctg} y dy = 0$ ,      б)  $2y'\sqrt{2x-1} - xy = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

*Решение.*

а) Разделим уравнение  $\ln(\sin y) dx + x \operatorname{ctg} y dy = 0$  на произведение функций  $x \cdot \ln(\sin y)$ , получим уравнение

$$\frac{dx}{x} + \frac{\operatorname{ctg} y dy}{\ln(\sin y)} = 0.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\operatorname{ctg} y dy}{\ln(\sin y)} = \int 0 dx.$$

У второго интеграла введем функцию  $\operatorname{ctg} y$  под знак дифференциала, получим  $d(\ln(\sin y))$ , тогда

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d \ln(\sin y)}{\ln(\sin y)} = \int 0 dx \Rightarrow \ln|x| + \ln|\ln(\sin y)| = \ln C.$$

Используя свойства логарифмов, получим общий интеграл (решение уравнения в неявном виде):  $x \cdot \ln(\sin y) = C$ .

б) В уравнении  $2y'\sqrt{2x-1} - xy = 0$  заменим  $y' = \frac{dy}{dx}$  и получим:

$$2 \frac{dy}{dx} \sqrt{2x-1} - xy = 0.$$

Умножим обе части на  $dx$ :  $2dy\sqrt{2x-1} - xydx = 0$ , затем разделив уравнение на произведение функций  $y\sqrt{2x-1}$ , получим:

$$\frac{2dy}{y} - \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}} = 0.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{2dy}{y} - \int \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}} = \int 0 dx.$$

Отдельно вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}} &= \left\{ \sqrt{2x-1} = t, x = \frac{t^2+1}{2}, dx = t dt \right\} = \int \frac{t(t^2+1)}{2t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int (t^2+1) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{t^3}{3} + t \right) + C. \end{aligned}$$

Таким образом, получим:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3} + \sqrt{2x-1} \right) + C.$$

Тогда

$$\int \frac{2dy}{y} - \int \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}} = \int 0 dx \Rightarrow 2 \ln|y| - \frac{1}{3}(x+1)\sqrt{2x-1} = C.$$

Найдем значение  $C$  постоянной интегрирования. Для этого в общий интеграл подставим начальное условие  $C = 0 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{2}{3}$ . Тогда частное решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$6 \ln|y| - (x+1)\sqrt{2x-1} = -2.$$

**Задача 2.** Решить однородные уравнения:

а)  $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$ , б)  $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0, y(1) = 1$ ,

в)  $xy' = y \cos^2\left(\ln \frac{y}{x}\right)$ .

*Решение.* а) Уравнение  $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$  относится к типу однородных дифференциальных уравнений, решение которого осуществляется подстановкой  $\frac{y}{x} = t$ . Отсюда  $y = xt, y' = xt' + t$ . После подстановки в дифференциальное уравнение получим:

$$x(xt' + t) = 4\sqrt{2x^2 + x^2t^2} + xt \Rightarrow xt' = 4\sqrt{2 + t^2}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Заменим  $t' = \frac{dt}{dx}$  и разделим переменные:

$$xdt = 4\sqrt{2 + t^2}dx \Rightarrow \frac{dt}{\sqrt{2 + t^2}} = \frac{4dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения  $\int \frac{dt}{\sqrt{2 + t^2}} = \int \frac{4dx}{x} + \ln C$ , это табличные интегралы:  $\ln|t + \sqrt{2 + t^2}| = 4 \ln|x| + \ln C$ . На основании свойств логарифмов получаем, что  $t + \sqrt{2 + t^2} = Cx^4$ . Производя обратную замену  $t = \frac{y}{x}$ , находим

общий интеграл исходного уравнения  $\frac{y}{x} + \sqrt{2 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx^4$ .

б) Сделаем замену  $y = xt, dy = xdt + tdx$ . После подстановки в уравнение получим:  $(x^2t^2 - 2x^2t)dx + x^2(xdt + tdx) = 0$ . Раскроем скобки, сократим на  $x^2$  и получим:  $(t^2 - t)dx + xdt = 0$ . Разделим переменные:  $\frac{dt}{t^2 - t} + \frac{dx}{x} = 0$ , и интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2 - t} + \int \frac{dx}{x} &= \int 0 dx \Rightarrow \int \frac{-(t-1+t)}{t(t-1)} dt + \ln|x| = \ln C \\ &\Rightarrow \ln|t-1| - \ln|t| + \ln|x| = \ln C. \end{aligned}$$

На основании свойств логарифмов

$$\frac{(t-1)x}{t} = C \Rightarrow (t-1)x = Ct \Rightarrow t(x-C) = x.$$

Производя обратную замену  $t = \frac{y}{x}$ , находим общее решение исходного уравнения:  $y = \frac{x^2}{x-C}$ .

Используя начальное условие  $y(1) = 1$ , получим  $1 = \frac{1}{1-C} \rightarrow C = 0$ .  
Частное решение имеет вид  $y = x$ .

в) В уравнении  $xy' = y \cos^2\left(\ln \frac{y}{x}\right)$  сделаем замену  $y = xt$ ,  $y' = xt' + t$ , получим:

$$x(xt' + t) = xt \cos^2(\ln t) \Rightarrow xt' = t(\cos^2(\ln t) - 1).$$

Заменим  $t' = \frac{dt}{dx}$  и разделим переменные:

$$\frac{dt}{t \cos^2(\ln t)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d \ln t}{\cos^2(\ln t)} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем:  $\int \frac{d \ln t}{\cos^2(\ln t)} = \int \frac{dx}{x}$ , это табличные интегралы  $\operatorname{tg}(\ln t) = \ln|x| + \ln C \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\ln \frac{y}{x}\right) = \ln|Cx|$ . Общий интеграл имеет вид:  $\operatorname{tg}\left(\ln \frac{y}{x}\right) = \ln|Cx|$ .

**Задача 3.** Решить линейные уравнения первого порядка:

а)  $e^{-y}dx + (2y + xe^{-y})dy = 0$ , б)  $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$ ,

в)  $y' + y = \sin x$ ,  $y(0) = 1$ .

*Решение.* а) Это уравнение относится к типу линейных дифференциальных уравнений первого порядка, относительно переменной  $x$ . Разделим его на  $dy$  и запишем в виде:  $e^{-y} \frac{dx}{dy} + xe^{-y} = -2y$ . Первоначально решим однородное уравнение, заменив правую часть нулем:  $e^{-y} \frac{dx}{dy} + xe^{-y} = 0$ . Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$dx + xdy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + dy = 0,$$

интегрируем последнее уравнение и находим:

$$\ln|x| + y = \ln C \Rightarrow \ln|xe^y| = \ln C \Rightarrow x = \frac{C}{e^y}.$$

Ищем решение исходного неоднородного уравнения в виде:  $x = \frac{u(y)}{e^y}$ , где  $u(y)$  – неизвестная функция. Подставляя в исходное уравнение  $x = \frac{u(y)}{e^y}$ ,  $x' = \frac{u' - u}{e^y}$ , перейдем к уравнению

$$e^{-y} \left( \frac{u' - u}{e^y} \right) + \frac{ue^{-y}}{e^y} = -2y \rightarrow e^{-2y}u' = -2y \rightarrow u' = 2ye^{2y}.$$

Найдем  $u(y)$ :

$$u = -2 \int y e^{2y} dy + C = \left\{ \begin{array}{l} u = y, du = dy \\ dv = e^{2y} dy, v = \int e^{2y} dy = \frac{e^{2y}}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= -2 \left( \frac{y e^{2y}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2y} dy \right) + C = -y e^{2y} + \frac{e^{2y}}{2} + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения:  $x = \frac{-y e^{2y} + \frac{e^{2y}}{2} + C}{e^y} = -y e^y + \frac{e^y}{2} + \frac{C}{e^y}$ .

б) Данное уравнение относится к типу линейных дифференциальных уравнений первого порядка, относительно переменной  $y$ . Решим однородное уравнение, заменив правую часть нулем:  $x(y' - y) = 0$ , это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим уравнение на  $y$ , получим:

$$y' - y = 0 \Rightarrow dy - y dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - dx = 0.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{dy}{y} - \int dx = \int 0 dx \Rightarrow \ln y - x = \ln C \Rightarrow \ln y - \ln e^x = \ln C.$$

Применяя свойства логарифмов, получим решение однородного уравнения:  $\ln \frac{y}{e^x} = \ln C \Rightarrow y = C e^x$ . Решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде  $y = u(x) e^x$ , где  $u(x)$  – неизвестная функция. Подставляя в исходное уравнение  $y = u(x) e^x$  и  $y' = u'(x) e^x + u(x) e^x$ , имеем:

$$x(u'(x) e^x + u(x) e^x) - x u(x) e^x = (1 + x^2) e^x \Rightarrow x u'(x) e^x = (1 + x^2) e^x.$$

Отсюда  $u'(x) = \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{x} + x$ . Проинтегрируем обе части последнего равенства, найдем функцию  $u(x)$ :

$$u(x) = \int \left( \frac{1}{x} + x \right) dx = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения:  $y = \left( \ln x + \frac{x^2}{2} + C \right) e^x$ .

в) Это задача Коши для линейного уравнения. Решим сначала однородное уравнение, заменив правую часть нулем:

$$y' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство, получим решение однородного уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} + \int dx = \int 0 dx \Rightarrow \ln|y| + x = \ln C \Rightarrow \ln|y| + \ln e^x = \ln C \Rightarrow y = \frac{C}{e^x}.$$

Тогда решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$y = \frac{u(x)}{e^x}$ , где  $u(x)$  – неизвестная функция. Подставляя в уравнение  $y = \frac{u(x)}{e^x}$  и  $y' = \frac{u'(x) e^x - u(x) e^x}{e^{2x}} = \frac{u' - u}{e^x}$  имеем:

$$\frac{u'-u}{e^x} + \frac{u}{e^x} = \ln x \Rightarrow u' = e^x \sin x \Rightarrow u(x) = \int e^x \sin x dx.$$

Вычислим этот интеграл применяя метод интегрирования по частям два раза:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

Перенесем интеграл справа в левую часть, получим:

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - e^x \cos x; \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C. \end{aligned}$$

Тогда  $u(x) = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C$ . Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{\frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C}{e^x} = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{C}{e^x}.$$

Найдем частное решение, используя начальное условие:

$$1 = \frac{1}{2} (\sin 0 - \cos 0) + \frac{C}{e^0} \Rightarrow 1 = C - \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{3}{2}.$$

Тогда частное решение имеет вид:  $y = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{3}{2e^x}$ .

**Задача 4.** Решить уравнения с помощью понижения порядка:

- а)  $y'' = 4 \cos 2x, y(0) = 0, y'(0) = 0$ ;
- б)  $xy'' = (1 + 2x^2)y'$ ;
- в)  $2yy'' = (y')^2, y(-1) = 4, y'(-1) = 1$ .

*Решение.* а) Это дифференциальное уравнение второго порядка типа  $y'' = f(x)$ , допускающее понижение порядка. Проинтегрируем данное дифференциальное уравнение два раза, получим:

$$\begin{aligned} y' &= \int 4 \cos 2x dx = \frac{4 \sin 2x}{2} + C_1 = 2 \sin 2x + C_1; \\ y &= \int (2 \sin 2x + C_1) dx = \frac{-2 \cos 2x}{2} + C_1 x + C_2 = -\cos 2x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Общее решение имеет вид:  $y = -\cos 2x + C_1 x + C_2$ . Найдем частное решение, для этого подставим начальные данные, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 0 = 2 \sin 0 + C_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Подставим найденные значения постоянных в общее решение, получим частное решение:  $y = -\cos 2x + 1$ .

б) Это дифференциальное уравнение второго порядка типа  $F(x, y', y'') = 0$ , допускающее понижение порядка. Понизим порядок данного уравнения с

помощью замены  $y' = z, y'' = z'$ , где  $z = z(x)$ . Тогда исходное уравнение примет вид:  $xz' = (1 + 2x^2)z$ . Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$xdz = (1 + 2x^2)zdx \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{(1+2x^2)}{x} dx \Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + x^2 + C_1 \Rightarrow$$

$$\ln|z| = \ln(C_1 x e^{x^2}) \Rightarrow z = C_1 x e^{x^2}.$$

Далее решаем уравнение

$$y' = C_1 x e^{x^2} \Rightarrow y = \int C_1 x e^{x^2} dx = C_1 \int e^{x^2} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{C_1 e^{x^2}}{2} + C_2.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:  $y = \frac{C_1 e^{x^2}}{2} + C_2$ .

в) Это дифференциальное уравнение второго порядка типа  $F(y, y', y'') = 0$ , допускающее понижение порядка. Понизим порядок данного уравнения с помощью замены  $y' = z, y'' = z'z$ , где  $z = z(y)$ . Тогда исходное уравнение примет вид:

$$2yz'z = z^2 \Rightarrow 2yz' = z \Rightarrow \frac{2dz}{z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow 2 \ln|z| = \ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$z^2 = C_1 y \Rightarrow z = \pm \sqrt{y C_1}.$$

Вернемся к замене и получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \pm \sqrt{y C_1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm \sqrt{C_1} dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = \pm \sqrt{C_1} x + C_2.$$

Следовательно, общее уравнение имеет вид:  $y = \frac{(\pm \sqrt{C_1} x + C_2)^2}{4}$ . Найдем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , для этого подставим начальные данные и

получим систему уравнений:  $\begin{cases} 1 = \sqrt{4C_1} \\ 4 = \frac{(0,5(-1)+C_1)^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{4}, \\ C_2 = \frac{9}{4}; -\frac{7}{4} \end{cases}$  Тогда частные

решения имеют вид  $y_1 = \frac{(0,5x+\frac{9}{4})^2}{4}, y_2 = \frac{(0,5x-\frac{7}{4})^2}{4}$ .

**Задача 5.** Решить линейные неоднородные уравнения методом неопределенных коэффициентов:

а)  $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, y(0) = y''(0) = 0;$

б)  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x;$

в)  $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x;$

г)  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x;$

д)  $y'' + 2y' = x^2 + 2.$

*Решение.* а) Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения можно записать в виде суммы  $y = \bar{y} + \tilde{y}$ , где  $\bar{y}$  – общее решение

однородного дифференциального уравнения;  $\tilde{y}$  – частное решение исходного уравнения. Найдем общее решение однородного уравнения  $y'' - 5y' + 6y = 0$ , для этого составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ , корни которого  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ . Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:  $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ . Частное решение исходного уравнения ищем в виде:  $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-x}$ . Находим  $\tilde{y}'$  и  $\tilde{y}''$ :

$$\tilde{y}' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}, \quad \tilde{y}'' = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}.$$

Подставим полученные производные в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x} - 5Ae^{-x} + 5(Ax + B)e^{-x} + 6(Ax + B)e^{-x} = \\ = (12x - 7)e^{-x}, \end{aligned}$$

или

$$12Axe^{-x} + 12Be^{-x} - 6Ae^{-x} = (12x - 7)e^{-x}.$$

Приравняем коэффициенты слева и справа, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 12A = 12, \\ 12B - 6A = -7. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = -\frac{1}{12}. \end{cases} \quad \text{Тогда} \quad \tilde{y} = \left(x - \frac{1}{12}\right)e^{-x}. \quad \text{Общее решение}$$

неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(x - \frac{1}{12}\right)e^{-x}$ . Найдем значения  $C_1$  и  $C_2$ , используя начальные данные,

получим систему уравнений:  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1/12, \\ 3C_1 + 2C_2 = -13/12. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -5/4, \\ C_2 = 4/3. \end{cases}$

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \frac{-5}{4}e^{3x} + \frac{4}{3}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{12}\right)e^{-x}.$$

б) Сначала найдем общее решение однородного уравнения  $y'' - 2y' + 5y = 0$ , для этого составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ , корни которого  $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$ . Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:  $\bar{y} = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ . Частное решение исходного уравнения ищем в виде:  $\tilde{y} = e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)x$ . Находим  $\tilde{y}'$  и  $\tilde{y}''$ :

$$\begin{aligned} \tilde{y}' = e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)x + e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)x + \\ + e^x(A \cos 2x + B \sin 2x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' = e^x(\cos 2x + B \sin 2x)x + e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)x + \\ + e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)x + \\ + e^x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)x + e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ + e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = e^x(A \cos 2x + \end{aligned}$$



$$+B \sin 2x)x + 2e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)x + 2e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)x + 2e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x).$$

Подставим полученные производные в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)x + 2e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)x + 2e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)x + 2e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) - 2e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)x - 2e^x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)x - 2e^x(A \cos 2x + B \sin 2x) + 5e^x(A \cos 2x + B \sin 2x)x = e^x \cos 2x;$$

приведем подобные члены:

$$4Be^x \cos 2x - 4Ae^x \sin 2x = e^x \cos 2x.$$

Приравняем коэффициенты слева и справа при  $\sin 2x$  и  $\cos 2x$ :

$$\begin{cases} 4B = 1, \\ -4A = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/4, \\ A = 0. \end{cases}$$

Тогда  $\tilde{y} = \frac{1}{4}xe^x \sin 2x$ . Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:  $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4}xe^x \sin 2x$ .

в) Найдем общее решение однородного уравнения  $y'' - 4y' + 8y = 0$ , для этого составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ , корни которого  $\lambda_1 = 2 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 2 - 2i$ . Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:  $\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ . Частное решение исходного уравнения ищем в виде:  $\tilde{y} = (A \cos 2x + B \sin 2x)$ . Находим  $\tilde{y}'$  и  $\tilde{y}''$ :  $\tilde{y}' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$ ;  $\tilde{y}'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$ . Подставим полученные производные в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x - 8A \cos 2x + 8B \sin 2x + 8A \sin 2x + 8B \cos 2x = \sin 2x.$$

Приведем подобные, получим:

$$4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 8A \cos 2x + 8B \sin 2x = \sin 2x.$$

Приравняем коэффициенты слева и справа при  $\sin 2x$  и  $\cos 2x$ :

$$\begin{cases} 4B - 8A = 0, \\ 4A + 8B = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1/10, \\ A = 1/20. \end{cases}$$

Тогда  $\tilde{y} = \frac{1}{20} \sin 2x + \frac{1}{10} \cos 2x$ . Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{20} \sin 2x + \frac{1}{10} \cos 2x.$$

г) Найдем общее решение однородного уравнения  $y'' - 4y' + 8y = 0$ , для этого составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ , корни

которого  $\lambda_1 = 2 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 2 - 2i$ . Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:  $\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ . Частное решение исходного уравнения ищем в виде:  $\tilde{y} = Ae^{2x} + (B \cos 2x + C \sin 2x)$ . Находим  $\tilde{y}'$  и  $\tilde{y}''$ :  $\tilde{y}' = 2Ae^{2x} + 2C \cos 2x - 2B \sin 2x$ ;  $\tilde{y}'' = 4Ae^{2x} - 4C \sin 2x - 4B \cos 2x$ . Подставим полученные производные в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$4Ae^{2x} - 4C \sin 2x - 4B \cos 2x - 8Ae^{2x} - 8C \cos 2x + 8B \sin 2x + 8Ae^{2x} + (8B \cos 2x + 8C \sin 2x) = e^{2x} + \sin 2x.$$

Приведем подобные, получим:

$$4Ae^{2x} + 4C \sin 2x + 4B \cos 2x - 8C \cos 2x + 8B \cos 2x = e^{2x} + \sin 2x.$$

Приравнявая коэффициенты слева и справа при  $e^{2x}$ ,  $\cos 2x$  и  $\sin 2x$ , получим:

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 4B - 8C = 0, \\ 4C + 8B = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4, \\ B = 1/10, \\ C = 1/20. \end{cases}$$

Тогда  $\tilde{y} = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x$ . Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{4}e^{2x}.$$

д) Найдем общее решение однородного уравнения  $y'' + 2y' = 0$ , для этого составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ , корни которого  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = -2$ . Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:  $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2$ . Частное решение исходного уравнения ищем в виде:  $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ . Находим  $\tilde{y}'$  и  $\tilde{y}''$ :

$$\tilde{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \tilde{y}'' = 6Ax + 2B.$$

Подставим полученные производные в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 2C = x^2 + 2.$$

Приравняем коэффициенты слева и справа при  $x^2$ ,  $x$  и  $x^0$ :

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 0, \\ 2B + 2C = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/6, \\ B = -1/4, \\ C = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Тогда  $\tilde{y} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{4}$ . Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{5x}{4}$ .

## Варианты для самостоятельной работы

**Задача 1.** Решите уравнения с разделяющимися переменными.

- |  |   |
|--|---|
| 1. а) $8(y-1) + (x+1)y' = 0$ ,                                   | б) $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$ .                              |
| 2. а) $(9+7\cos^3 x) - y'\cos^2 x = 0$ ,                         | б) $ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$ .                           |
| 3. а) $(a^2 + y^2) + y'2x\sqrt{ax-x^2} = 0, y(a) = 0$ ,          | б) $xdy - y^3dx = 0$ .  |
| 4. а) $x^2(y^3+5) + y'y^2(x^3+5) = 0, y(0) = 1$ ,                | б) $(x^2-1)dy + y^2dx = 0$ .                                  |
| 5. а) $e^x \sin^3 y + y'(1+e^{2x})\cos y = 0$ ,                  | б) $dy \operatorname{tg} x = ydx, y(\pi/2) = 1$ .             |
| 6. а) $(1-x^2)y' - xy = xy^2, y(0) = 1/2$ ,                      | б) $\cos^2 xdy = (y^2+4)\sin xdx$ .                           |
| 7. а) $x + xy + y'(y + xy) = 0$ ,                                | б) $2\sqrt{x}dy = ydx, y(4) = 1$ .                            |
| 8. а) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x, y(\pi/4) = 1/2$ ,        | б) $(x^2+1)dy + yx^3dx = 0$ .                                 |
| 9. а) $x^2y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$ ,                             | б) $\operatorname{ctg}^2 ydy + \operatorname{tg}^2 xdx = 0$ . |
| 10. а) $(x+1)y' + x(y^2 - y - 2) = 0$ ,                          | б) $dy = \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^3 dx$ .                 |
| 11. а) $yy' + x^4 = 0, y(1) = 1$ ,                               | б) $\sqrt{1-x^2}dy = (1+y^2)dx$ .                             |
| 12. а) $y^2y' + x^2 = 1$ ,                                       | б) $dy = e^{x+y}dx$ .   |
| 13. а) $x^2y' - 2y^2 + y = 0$ ,                                  | б) $dy + \frac{x \sin xdx}{y \cos y} = 0$ .                   |
| 14. а) $(1+y^2)x + (1+x^2)y' = 0$ ,                              | б) $2x^2ydy + y^2dx = 2dx$ .                                  |
| 15. а) $y' = 2\sqrt{y} \ln x, y(e) = 1$ ,                        | б) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$ .                                  |
| 16. а) $y' + y \operatorname{tg} x = 0, y(\pi) = 2$ ,            | б) $\cos \sqrt{x}dx - \sqrt{x}dy = 0$ .                       |
| 17. а) $(x^2y - y) + y'(xy^2 + x) = 0$ ,                         | б) $\frac{y}{y'} = \ln y, y(2) = 1$ .                         |
| 18. а) $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$ ,                      | б) $y' = x\sqrt{y}$ .   |
| 19. а) $\ln \cos ydx + x \operatorname{tg} ydy = 0$ ,            | б) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0$ .                      |
| 20. а) $xy' + y = y^2, y(1) = 1/2$ ,                             | б) $xdy - (1-\sqrt{x})^3dx = 0$ .                             |
| 21. а) $(x+2)dx - (x^2+4x-7)dy = 0$ ,                            | б) $yy' = \frac{1-2x}{y}$ .                                   |
| 22. а) $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$ ,                         | б) $e^{-y}(1+y') = 1$ .                                       |
| 23. а) $x^2(y^4+5) + y^3(x^6-4)y' = 0$ ,                         | б) $y \ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$ .                           |
| 24. а) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x}) + y'(\sqrt{xy} + \sqrt{y}) = 0$ , | б) $dy = 2^{x-y}dx, y(-3) = -5$ .                             |

25. а)  $x(y^6 + 1) + y'y^2(x^4 + 1) = 0$ ,

б)  $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$ .

**Задача 2.** Решите однородные уравнения.

1. а)  $yy' = 2y - x$ ,

б)  $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}, y(1) = 1$ .

2. а)  $x^2 y' = y^2 + xy$ ,

б)  $xy' \cos(y/x) = y \cos(y/x) - x$ .

3. а)  $(xy)^2 y' + yx^3 = 0$ ,

б)  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ .

4. а)  $(x - y)dx + xdy = 0$ ,

б)  $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}, y(-1) = 1$ .

5. а)  $y' = \frac{x - y}{x + y}$ ,

б)  $x^2 dy + xy dx = y^2 dx$ .

6. а)  $y' = \frac{x + 3y}{2x}$ ,

б)  $xy^2 dy + y^3 dx = x^2 y dy$ .

7. а)  $xy' = \frac{3y^3 + 2x^2 y}{2y^2 + x^2}$ ,

б)  $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y dy}{x} = 0$ .

8. а)  $xdy - ydx = ydy, y(-1) = 1$ ,

б)  $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0, y(1) = 0$ .

9. а)  $y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}$ ,

б)  $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, y(1) = 1$ .

10. а)  $xy' = x + y/2$ ,

б)  $y' = 4 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, y(1) = 2$ .

11. а)  $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2$ ,

б)  $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$ .

12. а)  $y^2 + x^2 y' = xyy'$ ,

б)  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, y(1) = \pi/2$ .

13. а)  $xy' = \frac{3y^2 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$ ,

б)  $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right), y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

14. а)  $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$ ,

б)  $x^2 dy = (y^2 - xy + x^2)dx$ .

15. а)  $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y})$ ,

б)  $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ .

16. а)  $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$ ,

б)  $xdy - \left(y - x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right)dx = 0$ .

17. а)  $xy' + 2\sqrt{xy} = y$ ,

б)  $\frac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{dy}{y^2 - 4xy}$ .

$$18. a) xy' = \frac{3y^3 + 4x^2y}{2x^2 + 2y^2},$$

$$19. a) xy' = y \cos \ln \frac{y}{x},$$

$$20. a) y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy},$$

$$21. a) 2x^3y' = y(2x^2 - y^2),$$

$$22. a) x^2 + y^2 - 2xyy' = 0,$$

$$23. a) (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x,$$

$$24. a) y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

$$25. a) xy' = y(\ln y - \ln x),$$

$$б) 2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{y}{x}\right) + 3.$$

$$б) xy' = y + 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$б) xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$$

$$б) (y + \sqrt{xy})dx = xdy.$$

$$б) (4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0.$$

$$б) ydx - (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0.$$

$$б) (y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0.$$

$$б) xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

**Задача 3.** Решите линейные уравнения первого порядка.

$$1. a) y' - \frac{y}{x} = xe^x,$$

$$2. a) y' - \frac{3y}{x} = x,$$

$$3. a) y' = 2y + e^x - x,$$

$$4. a) xy' - 2y = 2x^4,$$

$$5. a) y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x},$$

$$6. a) y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x,$$

$$7. a) y' - 2xy = xe^{-x^2},$$

$$8. a) y' - \frac{2y}{x+1} = (1+x)^3,$$

$$9. a) y' + y \cos x = e^{-\sin x},$$

$$10. a) xy' + y = \ln x + 1,$$

$$11. a) (2x+1)y' + y = x,$$

$$б) y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0.$$

$$б) y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, y(e) = e^2 / 2.$$

$$б) y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 0.$$

$$б) \sqrt{1+y^2}dx = \left( \frac{\sqrt{1+y^2}}{e^{\sqrt{1+y^2}}} - xy \right) dy.$$

$$б) y^2dx + (xy - 1)dy = 0, y(1) = e.$$

$$б) y' \operatorname{arctg} x - \frac{y}{1+x^2} = \operatorname{arctg}^3 x.$$

$$б) y' \arcsin x - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$б) (104y^3 - x)y' = 4y, y(8) = 1.$$

$$б) dx + (xy - y^3)dy = 0, y(-1) = 0.$$

$$б) (3y \cos 2y - 2x)y' = y.$$

$$б) 8(4y^3 + xy - y)y' = 1, y(0) = 0.$$

12. а)  $xy' - 3y = 3 - 4x$ ,

13. а)  $(xy' - 1) \ln x = 2y$ ,

14. а)  $y' + y \operatorname{tg} 2x = \sin 4x$ ,

15. а)  $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$ ,

16. а)  $xy' + x^2 + xy - y = 0$ ,

17. а)  $y' + y \cos x = \sin 2x$ ,

18. а)  $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$ ,

19. а)  $x dy + (x^2 - y) dx = 0$ ,

20. а)  $(y^4 e^y + 2x)y' = y$ ,

21. а)  $y' - y \sin x = \sin x \cos x$ ,

22. а)  $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ ,

23. а)  $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$ ,

24. а)  $xy' - 4y = 2x^2 - 3x$ ,

25. а)  $xy' - 2y = x^3 \cos x$ ,

б)  $(2 \ln y - \ln^2 y) dy = y dx - x dy$ .

б)  $y^3(y - 1) + 3xy^2(y - 1)y' = (y + 2)y'$ .

б)  $y^2(y^2 + 4) dx + 2xy(y^2 + 4) dy = 2 dy$ .

б)  $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$ .

б)  $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ .

б)  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ .

б)  $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y$ .

б)  $e^{y^2}(dx - 2xy dy) = y dy$ .

б)  $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = y/2$ .

б)  $x dy - (y + x^3 \sin x) dx = 0$ .

б)  $2(x + y^4)y' = y, y(-2) = -1$ .

б)  $y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$ .

б)  $y' \ln x - \frac{y}{x} = 1 - \ln x$ .

б)  $y' \cos x + y \sin x = -\cos x - x \sin x$ .

**Задача 4.** Решите уравнения с помощью понижения порядка.

1. а)  $y''y^3 + 9 = 0$ ,

б)  $2xy'' = y', y(9) = 8, y'(9) = 3$ .

2. а)  $yy'' - (y')^2 = 0$ ,

б)  $xy'' = y' \ln y', y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

3. а)  $2yy'' = (y')^2$ ,

б)  $y''' = \sin^2 x, y(0) = 5, y'(0) = 1,8, y''(0) = 0$ .

4. а)  $y''x \ln x = y'$ ,

б)  $y'' = x \sin x, y(0) = y'(0) = 0$ .

5. а)  $yy'' + (y')^2 = 0$ ,

б)  $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ .

6. а)  $y''y^3 = 1$ ,

б)  $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ .

7. а)  $y'' = \frac{1}{1 + x^2}$ ,

б)  $y'' = \frac{y'}{x} + x^2$ .

8. а)  $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}$ ,

б)  $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$ .

9. а)  $y'' = xe^{-x}$ ,

б)  $xy'' - y' = e^x x^2$ .

10. а)  $y^{(4)} = \cos^2 x$ ,

б)  $xy'' = y' \ln \left( \frac{y'}{x} \right)$ .

11. а)  $y'' = \frac{x - xy'}{x^2}$ ,

б)  $y'' + (y')^2 = 2e^{-y} y'$ .

- |   |   |
|---|---|
| 12. а) $y'' \operatorname{tgy} = 2(y')^2$ , | б) $y'' = 4 \cos 2x, y(0) = y'(0) = 0$ .              |
| 13. а) $y'' \operatorname{tgx} = y' + 1$ ,  | б) $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$ .                      |
| 14. а) $y''' \cos^4 x = -\sin 2x$ ,         | б) $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0, y(0) = y'(0) = 1$ .     |
| 15. а) $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$ ,          | б) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ .                         |
| 16. а) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$ ,          | б) $y''(1 + y) - 5(y')^2 = 0$ .                       |
| 17. а) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ ,           | б) $y''(e^x + 1) + y' = 0$ .                          |
| 18. а) $1 + (y')^2 = yy''$ ,                | б) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$ .                    |
| 19. а) $y'' + 2y(y')^3 = 0$ ,               | б) $y'' + y' \operatorname{tgx} = \sin 2x$ .          |
| 20. а) $y'' + 2x(y')^2 = 0$ ,               | б) $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$ .              |
| 21. а) $2yy'' = 1 + (y')^2$ ,               | б) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$ .                      |
| 22. а) $x^2 y'' + xy' = 1$ ,                | б) $y''(1 + y) = (y')^2 + y'$ .                       |
| 23. а) $y'' - (x + 2)^5 = 1$ ,              | б) $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}, y(2) = 1, y'(2) = 2$ . |
| 24. а) $xy'' + 2y' = x^3$ ,                 | б) $y'' \cos y + (y')^2 \sin y - y' = 0$ .            |
| 25. а) $x^2 y'' + x^2 y' = 1$ ,             | б) $y'' + \frac{y'}{x} = x^2$ .                       |

**Задача 5.** Решите линейные неоднородные уравнения методом неопределенных коэффициентов.

- а)  $y'' + 4y = \sin 2x$ , б)  $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = \frac{1}{27}$ .
- а)  $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$ , б)  $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .
- а)  $y'' - 6y' + 25y = 2 \sin x + 3 \cos x$ , б)  $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .
- а)  $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$ , б)  $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, y(0) = y'(0) = 0$ .
- а)  $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ , б)  $y'' - 4y' = 6x^2 + 1, y(0) = 1, y'(0) = 3$ .
- а)  $y'' - 4y' + 8y = 61e^{2x} \sin x$ , б)  $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .
- а)  $y'' + 2y' + y = \cos x$ , б)  $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .
- а)  $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$ , б)  $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .
- а)  $y'' + y' - 2y = x - e^x$ , б)  $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x, y(0) = y'(0) = 0$ .
- а)  $y'' - y' = 1 - 3x$ , б)  $y'' - 2y' + y = 16e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2$ .
- а)  $y'' - 2y' + y = 3xe^x$ , б)  $y'' + y' - 20y = 42 \cos x, y(0) = 3, y'(0) = 10$ .
- а)  $y'' + y = x \sin x$ , б)  $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}, y(0) = 3, y'(0) = 2$ .
- а)  $y'' - 4y = 8x^3$ , б)  $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x, y(\pi) = \pi e^\pi, y'(\pi) = 0$ .

14.a)  $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$ , б)  $y'' + 4y = x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(\pi/4) = \pi/2$ .

15.a)  $y^{(4)} - 81y = 27e^{-3x}$ , б)  $y'' - y' = -2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

16.a)  $y''' + 8y = e^{-2x}$ , б)  $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

17.a)  $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$ , б)  $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

18.a)  $y'' + 2y' + y = e^x$ , б)  $y'' - 3y' = x + \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

19.a)  $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$ , б)  $y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 5$ .

20.a)  $y'' + y' - 2y = 6x^2$ , б)  $y'' + 2y' + y = \sin x + e^{-x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .

21.a)  $4y'' - y = x^3 - 24x$ , б)  $y'' - y = 8e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

22.a)  $y'' - 2y' + y = 4e^x$ , б)  $y'' - 4y = 2 - x$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

23.a)  $y'' + 81y = 162e^{9x} + 9\sin 9x + 3\cos 9x$ , б)  $y'' - y = 3e^{2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 5$ .

24.a)  $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$ , б)  $y'' - y' = 9xe^{2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

25.a)  $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$ , б)  $y'' + 16y = x^2 + x - 5$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .



## Справочный материал

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Дифференциальные уравнения вида:  $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$  или  $y' = f(x)g(y)$  называются уравнениями с разделяющимися переменными.

**Алгоритм нахождения общего решения:**

1. Производная представляется в виде отношения дифференциалов:  $y' = \frac{dy}{dx}$ .
2. Обе части уравнения умножаются на  $dx$ .
3. Каждую функцию переносим к дифференциалу того же аргумента. Для этого разделим уравнение на  $g_1(y)f_2(x)$ :  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$ .
4. Интегрируем последнее уравнение. Получаем общий интеграл (общее решение в неявном форме).

- **Однородные уравнения**

Уравнения вида  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  называется однородным. Однородное уравнение подстановкой  $y = tx$ , где  $t = t(x)$  – новая функция, приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Тогда  $y' = xt' + t$  или  $dy = xdt + tdx$ .

- **Линейные уравнения**

Уравнение  $y' + p(x)y = q(x)$ , содержащее искомую функцию  $y(x)$  и ее производную в качестве членов первого порядка, называется линейным.

- **Уравнения допускающие понижение порядка**

Если уравнение 2 порядка  $F(x, y, y', y'') = 0$  содержит неполный набор аргументов, то возможно понизить порядок уравнения до первого:

- **уравнение вида**  $y^{(n)} = f(x)$  решается последовательным интегрированием;
- **уравнение** второго порядка  $F(x, y', y'') = 0$ , **не содержащее функции**  $y$ , подстановкой  $y' = z(x)$ ,  $y'' = z'(x)$  приводится к уравнению первого порядка  $F(x, z, z') = 0$ ;
- **уравнение** вида  $F(y, y', y'') = 0$ , **не содержащее аргумента**  $x$ , подстановкой  $y' = z(y)$ ,  $y'' = z \frac{dz}{dy}$  приводится к уравнению первого порядка  $F(y, z, z') = 0$ .

- **Линейные однородные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.** Уравнение вида  $y'' + py' + qy = 0$ , все члены которого первой степени относительно функции и ее производных, а коэффициенты  $p, q$  – постоянные величины, называется **линейным однородным**. Общий

интеграл находится с помощью характеристического уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ . Если:

- корни  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения **действительны и различны**, то общее решение выражается формулой  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ ;
- действительный корень  $\lambda_1$  **имеет кратность 2** ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ), то общее решение имеет вид  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$ ;
- характеристическое уравнение имеет **пару однократных комплексно-сопряженных корней**  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , то общее решение имеет вид  $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ ;

• **Метод неопределенных коэффициентов.** Метод применим только для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и со **специальной правой частью (квазимногочленом)**  $f(x) = P_n(x)e^{kx}$ , где  $k = \alpha + \beta i$  – показатель правой части. Уравнение вида  $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{kx}$ , где коэффициенты  $p, q$  – постоянные величины, называется **линейным неоднородным**. Общее решение имеет вид:  $y = \bar{y} + \tilde{y}$ , где  $\bar{y}$  – общее решение линейного однородного уравнения;  $\tilde{y}$  – частное решение линейного неоднородного уравнения, которое составляется по виду правой части и зависит от значений корней  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения.

- Если  $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , то  $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot x^r$ , где  $Q_n(x)$  – многочлен той же степени, что и  $P_n(x)$ , только с неопределенными коэффициентами;  $r$  – количество корней характеристического уравнения, равных 0:  $r = 0, 1$ .
- Если  $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ , то  $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r$ , где  $r$  – количество корней характеристического уравнения, равных  $\alpha$ :  $r = 0, 1, 2$ .
- Если  $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ , то  $\tilde{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot x^r$ , где  $r$  – количество корней характеристического уравнения, равных  $i\beta$ :  $r = 0, 1$ .
- Если  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x)$ , то

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x) \cdot x^r,$$

где  $Q_1(x), Q_2(x)$  – многочлены степени  $s$ ,  $s = \max(n, m)$ ;  $r$  – количество корней характеристического уравнения, равных  $\alpha + i\beta$ :  $r = 0, 1$ .