

§ 1. МАТРИЦЫ

1.1. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$ (т. е. $i = 1, 2, 3, \dots, m$) — номер строки, $j = \overline{1, n}$ (т. е. $j = 1, 2, 3, \dots, n$) — номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Числа a_{ij} , составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют *главную диагональ*.

⇒ Матрицы *равны между собой*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \quad \text{если } a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{где } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей *n -го порядка*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой E .

Пример 1.1.

$$E_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка.

$$E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

— единичная матрица n -го порядка.

⇒ Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

⇒ Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Обозначается буквой O . Имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

⇒ Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n).$$

Матрица размера 1×1 , состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е. $(5)_{1 \times 1}$ есть 5.

⇒ Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной. Обозначается A^T .

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1 \ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

1.2. Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Пример 1.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется **разность матриц**.

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Пример 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, k = 2, A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A .

Разность матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$,

где A, B, C — матрицы, α и β — числа.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

⇒ Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \boxed{-5} \\ \boxed{1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \overbrace{-2} \\ \boxed{-3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \boxed{3} \\ \begin{matrix} :5 \\ :2 \\ :3 \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \boxed{-1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц

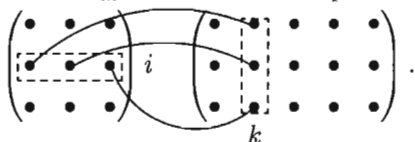
⊙ Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}, \quad \text{где } i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p},$$

т. е. элемент i -й строки и k -го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B .

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера.

Пример 1.5.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Пример 1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2). При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Основные понятия

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1. $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.
2. $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.
3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$
 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Определитель матрицы A также называют ее *детерминантом*. Правило вычисления детерминанта для матрицы порядка N является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов

основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда (с. 23, свойство 7). При этом заметим, что определители невысоких порядков (1, 2, 3) желательно уметь вычислять согласно определению.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Пример 2.1. Найти определители матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

○ Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad \bullet$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

(основания
равнобедренных
треугольников
параллельны
главной
диагонали)

(основания
треугольников
параллельны
побочной
диагонали)

Пример 2.2. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

○ Решение:

$$\det A =$$

$$\begin{aligned} &= 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = \\ &= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9. \quad \bullet \end{aligned}$$

2.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя*.

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что *если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю*.

□ Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Свойство 6 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Пример 2.3. Доказать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

○ Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot 0 = \Delta. \quad \bullet$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

⇒ **Минором** некоторого элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $n - 1$ -го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij} .

Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

⇒ **Алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство 7 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

□ В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \\ & = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ & = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ & = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ & \quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 2.4. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 7 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 4) + \\ & + (5 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 8 - (-1) \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 2) - \\ & - (5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 0 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 7 \cdot 7 \cdot 2) = 122. \quad \bullet \end{aligned}$$

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

§ 3. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

3.1. Основные понятия

Пусть A — квадратная матрица n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

⇒ Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если определитель $\Delta = \det A$ не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется **вырожденной**.

☞ Матрицей, *союзной к матрице* A , называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

☞ Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A , если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (3.1)$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A . Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A .

3.2. Обратная матрица

Теорема 3.1. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

☐ Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и A^* :

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E, \end{aligned}$$

т. е.

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E. \quad (3.2)$$

Здесь мы использовали свойства 7 и 8 определителей (см. п. 2.2).

Аналогично убеждаемся, что

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E. \quad (3.3)$$

Равенства (3.2) и (3.3) перепишем в виде

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{и} \quad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E.$$

Сравнивая полученные результаты с определением (3.1), получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.}$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример 3.1. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

○ Решение: 1) Находим $\det A$: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2) Находим A^* : $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$, поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Находим A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad \bullet$$

Пример 3.2. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдем определитель матрицы A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$$

Если $4\lambda - 9 \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{9}{4}$, то $\Delta A \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, имеет обратную. ●

Пример 3.3. Показать, что матрица A является обратной для B , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Найдем произведение матриц A и B :

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Аналогично $B \cdot A = E$. Следовательно, матрица A является обратной для B . ●

3.3. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leq \min(m; n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k -го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы*. В матрице A пунктиром выделен минор 2-го порядка. (Заметим, что таких миноров можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k .)

⇒ Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется **рангом матрицы**. Обозначается r , $r(A)$ или $\text{rang } A$.

Очевидно, что $0 \leq r \leq \min(m; n)$, где $\min(m; n)$ — меньшее из чисел m и n .

⇒ Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется **базисным**. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 3.4. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$. Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами. ●

Отметим *свойства ранга матрицы*:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы (см. с. 18).

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример 3.5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

используя результаты примера 1.4.

○ Решение: В примере 1.4 показано, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен $r(A) = 2$. ●

виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

☞ Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему — это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

☉ Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

4.2. Решение систем линейных уравнений.

Теорема Кронекера–Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает *теорема Кронекера–Капелли*.

Теорема 4.1. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Примем ее без доказательства.

Правила практического разыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 4.2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 4.3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Пример 4.1. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невыврожденной*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.} \quad (4.1)$$

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Матричное равенство (4.1) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta}, \\ &\dots \\ x_n &= \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}. \end{aligned}$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots$
 $\dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.2)$$

называются **формулами Крамера**.

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом (4.1) либо по формулам Крамера (4.2).

Пример 4.3. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14.$

Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1, x_2 = \frac{14}{7} = 2.$

4.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (4.3)$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Приведенная ниже система имеет ступенчатый вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \phantom{a_{11}x_1 +} a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \phantom{a_{11}x_1 +} \phantom{a_{22}x_2 +} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \phantom{a_{11}x_1 +} \phantom{a_{22}x_2 +} \phantom{a_{1k}x_k +} a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \leq n, a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, k}$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными элементами* системы.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Опишем метод Гаусса подробнее.

Прямой ход.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого (используя элементарные преобразования системы). Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}. \end{cases}$$

Здесь $a_{ij}^{(1)}, b_i^{(1)}$ ($i, j = \overline{2, m}$) — новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Если в процессе приведения системы (4.3) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида $0 = 0$, их отбрасывают. Если же появится уравнение вида $0 = b_i$, а $b_i \neq 0$, то это свидетельствует о несовместности системы.

Второй этап (*обратный ход*) заключается в решении ступенчатой системы. Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные (x_{k+1}, \dots, x_n) . Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через (x_{k+1}, \dots, x_n) ; затем находим x_{k-2}, \dots, x_1 . Придавая свободным неизвестным (x_{k+1}, \dots, x_n) произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечания: 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т. е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n , из предпоследнего уравнения x_{n-1} , далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные (x_{n-2}, \dots, x_1) .

2. На практике удобнее работать не с системой (4.3), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над

ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 4.4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

○ Решение: В результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3$; $x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1$. Если положить, например, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. ●

Пример 4.5. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

○ Решение: Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.5. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

□ Если система имеет ненулевые решения, то $\Delta = 0$. Ибо при $\Delta \neq 0$ система имеет только единственное, нулевое решение. Если же $\Delta = 0$, то ранг r основной матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $r < n$. И, значит, система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений. ■

Пример 4.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

○ Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right), \quad n = 3.$$

Так как $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем их

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3. \quad \text{Стало быть, } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2x_3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3x_3 \text{ — общее решение.}$$

Положив $x_3 = 0$, получаем одно частное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Положив $x_3 = 1$, получаем второе частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ и т. д. ●